

相同教學單元之創意作品所著重創意觀點與創意呈現之比較——以『中小學數學教師創意教學競賽』作品為例

趙中平¹ 蕭嘉璋²

¹國立中央大學 數學研究所碩士班

²國立中央大學 數學系

摘要：由國家科學委員會科學教育處與國立中央大學數學系合辦的『中小學數學教師創意教學競賽』，舉辦五屆以來，獲得了超過 250 件創意作品的熱情參與和支持，其中有許多相同教學單元的創意作品，熱門的單元更是多達 10 件以上。而在累積了這些同單元的創意作品之後，我們不禁想問，對一個相同的教學單元，各參賽教師所著重的教育目標是什麼；各參賽教師要如何展現他們的創意；他們所設計的創意是否真的能引發學生學習動機或培養學生創造力？本研究以比較相同教學單元（勾股定理）的創意作品為起點，藉由『中小學數學教師創意教學競賽』所得的寶貴資料，嘗試分析每位參賽教師對於相同教學單元所著重的教學重點有什麼不同，以及每位參賽教師要如何展現他們的創意。並期望能藉由整理、分析其餘參賽教師所給予每份創意作品的評價與改進建議，能提供站在第一線的教師們在製作此教學單元的教材時，有個參考的依據。更期望能擷取出所有創意作品的優點，製作出一份具有創意的單元教材。

關鍵詞：創意競賽、創意教學、數學科創意教學、勾股定理

壹、緒言

由國家科學委員會科學教育處與國立中央大學數學系合辦的『中小學數學教師創意教學競賽』，舉辦五屆以來，獲得了超過 250 件創意作品的熱情參與和支持，其中有許多相同教學單元的創意作品，熱門的單元更是多達 10 件以上。而在累積了這些同單元的創意作品之後，我們不禁想問，對一個相同的教學單元，各參賽教師所著重的教育目標是什麼；各參賽教師要如何展現他們的創意；他們所設計的創意是否真的能引發學生學習動機或培養學生創造力？

在研究主題的選擇上，研究者本擬於歷屆獲獎作品中，挑選一個教學單元作為研究的主題，藉由分析此單元的所有參賽作品，找出獲獎作品與未獲獎作品之間最大的差異。並期望能藉由指出獲獎作品的優異處，以及未獲獎作品不足的地

方，能提供站在第一線的教師們在製作此教學單元的教材時，有個參考的依據。然而在挑選的過程中，卻發生一件令研究者更感興趣的事。目前安排於國二進行教學的單元主題『勾股定理』，在國中小的數學課程中，是個少見的同時包含幾何性質與代數性質的主題，而且勾股定理在生活中的應用非常的廣泛，相信這是一個所有老師都願意多花時間讓學生熟練的單元。而我們也在近三屆中（第三、四、五屆），收到 7 件關於勾股定理的創意作品，然而，令研究者不解的是，在這 7 件作品之中，竟然沒有一件獲得佳作以上的佳績！究竟這些創意作品是否欠缺了什麼？其餘的參賽教師又給予了什麼樣的評價與改進建議？著實令研究者感到好奇，因此將研究主題定為『勾股定理』。本研究的待答問題如下：

- 一、 參賽教師在設計創意作品時，所著重的教育重點為何？
- 二、 參賽教師認為用什麼樣的教學方法進行數學科教學是有創意的？
- 三、 其餘參賽教師對創意作品的教學可行性評價為何？(以評分結果論)
- 四、 參賽教師呈現的創意展現能否得到大多數教師的認同？(以評分結果論)
- 五、 其餘參賽教師所提的改進建議能否幫助增進教學效果？

貳、研究範圍與限制

一、研究範圍

本研究以『中小學數學教師創意教學競賽』的參賽作品為主體，舉辦五屆以來，獲得了超過 250 件創意作品的熱情參與和支持。將歷屆參賽作品依適用年級以及主題軸分類整理如下：

表 1：歷屆參賽作品分類表

學習階段 主題軸	第一階段	第二階段	第三階段	第四階段	高中	總計
數與量	4 3	2 7	4 1	1 7	5	1 3 3
幾何	5	9	2 2	9	4	4 9
代數	0	4	1 0	2 6	1 2	5 2
統計與機率	6	3	9	1	1	2 0
總計	5 4	4 3	8 2	5 3	2 2	2 5 4

在適用年級上，以第三階段（六、七年級）最多；而在主題軸上，則是以數與量最多。而本研究的主題單元『勾股定理』，在『中小學數學教師創意教學競賽』的參賽作品中共有 7 件，分別在第三屆（2 件）、第四屆（4 件），及第五屆（1 件）。因此，本研究的範圍，將會只以第三屆、第四屆，及第五屆競賽中所得資料做分析及整理。

二、研究限制

本研究的數據分析及討論方式，是以『中小學數學教師創意教學競賽』所得的評分資料為主軸，因此，必須在此簡述一下此競賽的評審方式以及評分標準。同時，由於每屆競賽結束之後，內部工作人員都會舉行該屆競賽實施的檢討，在評分的格式上，歷屆皆有所修改，在此一併作評分格式的詳細說明。

（一）競賽評審方式

第一階段

邀請所有參賽教師以記名方式線上互評。此階段評審評分將佔決定入圍作品部分百分比。互評結果不公開，但可以在競賽結束後於頒獎典禮當天供當事人查詢。此段評審結果將提供給第三段評審參考。

第二階段

所有作品，透過「中央大學數學系」與「教育學程」管道挑選適合作品學習對象學生或數學科教育學程學生若干名，進行評分或問卷調查(未必需要參賽作品原作者本人之學生參與)。此段評審結果亦將提供給第三段評審參考。

第三階段

邀請五名分別具有數學專業、教育專業、數學或科學教育專業、中學資深教師、小學資深教師背景的學者先進，參考前二段評審的評語，並根據本身的專業素養，做出總評。每項作品都應有評分與評語，評審委員亦應簽名負責。

由第一階段及第二階段的評審評分結果，選出該屆的入圍作品，交由第三階段評審評分，再依第三階段的評分結果決定名次。而由於本研究欲探究的 7 件創意作品，只有 1 件（商高定理，第四屆，作品編號 1 4）進入第三階段的評審，因此本研究的討論，將會以第一階段及第二階段的評分數據為主。

（二）歷屆評分格式

第三屆評分格式：

表 2：第三屆評分表

編號	評	價
鼓勵學生分組討論，來激發學生學習意願	☐	採用多元的評量方式 ☐
提供學生問題解決的情境，鼓勵學生相互合作	☐	活用多樣的教學方法 ☐
運用多樣豐富的教學內容	☐	能激發學生的學習動機 ☐
營造出一個溫馨和諧的班級學習氣氛	☐	實行上有相當大的困難 ☐
正確使用假設開放的發問技巧	☐	有抄襲嫌疑 ☐
有效使用資源生動活潑的教學媒體	☐	
極力推薦 ☐ 推薦 ☐ 勉予推薦 ☐ 不推薦 ☐ 十分不推薦 ☐ 此作品。		

第三屆的評分格式如上表，採用勾選的方式來進行評分。在第三屆的評分表中，我們列出了九項對於創意教學一般性的優點敘述，以及兩項缺點敘述，供評分者做評分的依據。評分者可在觀看過作品之後，在他們認為符合此評價的敘述打勾（可複選）。因此，優點的部分勾選的越多，即代表評分者對此份作品的評價越高。最後，再請評分者給予這份作品一個整體性的推薦程度評價。

第三屆的評分方式則分為「優點平均」與「推薦程度加權平均」兩項來做比較。「優點平均」是將此份作品所獲得的所有優點評價累計之後，再除以評比人數而來，主要目的是希望能藉由此數據，得知每份作品平均所獲得的優點評價數有多少；「推薦程度加權平均」則是將推薦程度以加權的方式算平均數（極力推薦到十分不推薦的加權數依次是 2，1，0，-1，-2），藉此獲得每件作品的推薦程度評價。

第四屆評分格式：

表 3：第四屆評分表

評分作品編號：_____	
(評分說明：5 非常同意 4 同意 3 尚可 2 不同意 1 非常不同意)	
1. 作品內容新奇，頗具獨創性 _____	11. 能激發深入學習的意願 _____
2. 能與生活經驗相連結 _____	12. 作品能吸引我的注意力 _____
3. 能提高學生學習興趣 _____	13. 教學目標明確 _____
4. 能引導學生多樣思考 _____	14. 作品能有效達成教學目標 _____
5. 能帶動班級的學習氣氛 _____	15. 教學內容豐富多元化 _____
6. 內容架構清楚分明 _____	16. 內容與學生程度相配合 _____
7. 能鼓勵學生分組討論 _____	17. 作品名稱新鮮有趣，饒富創意，與
8. 內容和主題相符 _____	內容相通 _____
9. 作品內容富整體性，且有完整的總結 _____	18. 教學時間分配恰當 _____
10. 教學實行上具有可行性 _____	19. 充分使用資源及教學媒體 _____
20. 作品的編排整齊有系統 _____	
● 這份作品是否有抄襲的嫌疑（1 是 2 否）_____	
● （5 非常推薦 4 很推薦 3 沒感覺 2 不推薦 1 非常不推薦）_____	
整體評估，我對此作品 _____	

第三屆的評分是採用勾選的方式，在競賽結束後的檢討會中，我們認為此種方式十分的不精確，不是有就是沒有，對於模稜兩可的中間地帶無法掌握，而且評分的項目也不夠完整。因此，第四屆的評分改以比分的方式呈現，讓評分者依自己對此項評分項目的同意程度給分，同時也將評分項目增加至 20 項。另外，我們還增加了一項開放式的問題，希望評分者能夠給予作品一些簡單的回饋。

第四屆的評分方式則分為「總分平均」與「推薦程度平均」兩項，直接利用評分者給予的評分數做平均值的計算。

第五屆評分格式：

表4：第五屆評分表

評分作品編號：_____	
(評分說明：5 非常同意 4 同意 3 尚可 2 不同意 1 非常不同意)	
1. 作品內容新奇，頗具獨創性 _____	11. 能激發深入學習的意願 _____
2. 能與生活經驗相連結 _____	12. 作品能吸引我的注意力 _____
3. 能提高學生學習興趣 _____	13. 教學目標明確 _____
4. 能引導學生多樣思考 _____	14. 作品能有效達成教學目標 _____
5. 能帶動班級的學習氣氛 _____	15. 教學內容豐富多元化 _____
6. 內容架構清楚分明 _____	16. 內容與學生程度相配合 _____
7. 能鼓勵學生分組討論 _____	17. 作品名稱新鮮有趣，饒富創意，與內容相通 _____
8. 內容和主題相符 _____	18. 教學時間分配恰當 _____
9. 作品內容富整體性，且有完整的總結 _____	19. 充分使用資源及教學媒體 _____
10. 教學實行上具有可行性 _____	20. 作品的編排整齊有系統 _____
21. 整體評估，我對此作品的推薦程度為何？ (5 非常推薦 4 很推薦 3 沒感覺 2 不推薦 1 非常不推薦) _____	
22. 這份作品是否與其他作品過分雷同或有抄襲嫌疑 (1 是 2 否) _____	
23. 承上題，若有雷同之處請舉例雷同部分與相關佐證的資料。	
24. 請敘述你對於這份作品的感想。	
25. 請說明這份作品的優點為何？	
26. 請給予此作品一些改進意見。	

第五屆的評分格式基本上與第四屆沒有太大的差異，但是對於開放式的評分項目，我們發現有些人或許想表達什麼，卻詞不達意。例如，很籠統的說「這份作品很不錯」，可是我們無法瞭解他說的不錯是指全體、或創意的部分，還是教法的部分等。因此，在第五屆的評分格式中，對於開放式的評分項目，我們特別增加了淺顯易懂的指導語，希望能讓評分者更加用心地欣賞參賽者的創意，以及給予最適當的評價。

第五屆的評分方式同樣分為「總分平均」與「推薦程度平均」兩項，直接利用評分者給予的評分數做平均值的計算。

參、各創意作品教案內容及呈現方式簡述

一、作品名稱：神秘之旅（第三屆，作品編號 1 4）

作者：張哲豪、廖力蓉

呈現方式：教案、學習單、教學 ppt

連結網址：<http://cp.math.ncu.edu.tw/~mathcp/upload/3rd/wowlisa.zip>

作品簡介：

作品藉由活動故事的包裝，賦予傳統式的商高定理趣味性，進而引起學生學習興趣。在教學方式的選擇，採用了小組討論法，希望藉由小組的合作與討論，更能加深學生對商高定理的理解。

此作品對於商高定理的證明敘述，採用了達文西證法（剪貼），並利用網路動畫，讓學生實際操作，瞭解到商高定理的幾何意義。

最後的教學活動中，作者將一般性的題目以活動的故事包裝，與生活情境連結，讓學生產生情境式的思考，希望能讓學生了解商高定理後，活用運算於各種類的直角三角形，並應用商高定理於其他領域知識。

二、作品名稱：畢氏定理證明想法（第三屆，作品編號 2 2）

作者：鄧錦程

呈現方式：教學 ppt、Flash

連結網址：<http://cp.math.ncu.edu.tw/~mathcp/upload/3rd/gaojcanter.zip>

作品簡介：

作品名為畢氏定理證明想法，主要的教學重點即在於畢氏定理的證明。在作品中總共提到了 8 種證明方式，包括劉徽利用『出入相補原理』的證法、梯形面積證法、直角三角形比例中項性質的證法等。其中，使用到拼圖法的證明，更自製了可操作的 Flash 小動畫，讓學生可以自行翻轉移動圖形，進行操作及驗證。

除了證明之外，作品中也包含了畢達哥拉斯的小故事，以及利用舉例的方式，說明畢氏定理在日常生活中的應用。

三、作品名稱：商高定理（第四屆，作品編號 1 4）

作者：張瑩玲、鄭雅文、吳庭維、羅亦岩、邱琨棋

呈現方式：教案、學習單、教學 ppt

連結網址：<http://140.115.25.19/~mathcp/upload/4th/fgpkt.zip>

作品簡介：

作品奇特地以原住民的圖騰照片作為開始，希望能讓學生自己運用想像力和創造力，從圖騰中發現一些數學的味道，並以一幅規則排列的幾何圖形

引出商高定理，讓學生可以簡單地看出直角三角形的幾何意義。

此作品對於商高定理的證明敘述，著重於達文西的證法（剪貼），在提示了剪與貼的方式之後，特別讓學生能夠以自己隨意畫出的直角三角形作驗證，藉此強調此定理的一般性，對於任意的直角三角形皆適用。

在最後的教學活動中，以自製的台北市旅遊簡圖，由學生自行規劃旅遊路線，並融入比例尺的觀念，藉此讓學生學會利用商高定理，計算兩點距離的方法。

四、作品名稱：商高毀滅砲（第四屆，作品編號 1 5）

作者：王姿宜

呈現方式：教案、教學 ppt

連結網址：<http://140.115.25.19/~mathcp/upload/4th/Qqq5119mmm.zip>

作品簡介：

作品一開始藉由外星人以「商高毀滅砲」攻打地球，擬設最大攻擊範圍的故事，導引出數學原理中的商高定理。有趣的小故事，加上生動的配音，希望能激發學生們的學習動機，對商高定理產生學習興趣。

此作品對於商高定理的證明敘述，採用畢氏學派證法、面積公式推導、達文西證法（剪貼）三種，並讓學生以實際活動操作的方式，認識商高定理的幾何意義與學習使用商高定理的代數結構。

最後的教學活動中，以日常生活中常見的物品為教材，讓學生理解「商高定理」是無所不在的，數學原理與我們的生活是息息相關，數學不只是書本上一堆枯燥的數字與代碼。

五、作品名稱：商高定理學習象限（第四屆，作品編號 1 6）

作者：張艷華、紀銘銓

呈現方式：教案、教材與學習單、教學網站

連結網址：<http://140.115.25.19/~mathcp/upload/4th/cathye.zip>

作品簡介：

此作品的呈現方式以教學網站為主，作品名為學習『象限』，意味著作者將此單元的學習歷程分為四大主題，分別為：歷史探究、定理敘述、思考驗證，及解決問題。在教學方面，此作品以記載於《列子》一書中的『兩小兒辯日』故事開始，嘗試引導學生思考計算太陽與地球間距離的方法，再以《周髀算經》中陳子求日高的方法，引出商高定理。

此作品對於商高定理的證明敘述，主要是採用畢氏學派證法，而在教學網站之中，還另外附上了五種以上的證明方法，供有興趣的學生自行研讀。

網站中也特別介紹在巴比倫發現的『普林頓 322 號』泥版，藉此帶出商高定理中，直角三角形三邊長的特殊關係。

六、作品名稱：奇妙方塊裡的數學（第四屆，作品編號 5 3）

作者：蘇芳瑩

呈現方式：教案、教學網站、教學影片

連結網址：<http://140.115.25.19/~mathcp/upload/4th/greengable.zip>

作品簡介：

作品以摺紙的實作活動展開教學，先指導學生以 1 2 張紙摺成一個立體的正方體，希望學生能從摺紙活動中觀察到對稱、對角線與正立方體的概念。並巧妙的以此正方體所形成的每一個面，利用圖形的剪貼，找出屬於直角三角形邊長的特殊關係，藉此帶入商高定理。

此作品的教學網站上，除了有摺紙的完整步驟之外，也進一步將商高定理與直角坐標平面上兩點間的距離作結合，增加學生對商高定理的熟悉度。此外，作者更將此作品的實際教學情況利用影片完整的紀錄下來，提供給教師們作為實際教學的參考依據。

七、作品名稱：勾股定理及其推廣應用（第五屆，作品編號 6 6）

作者：林怡瑄、徐光裕

呈現方式：教材

連結網址：<http://cp.math.ncu.edu.tw/~mathcp/upload/5th/candyworm1982.zip>

作品簡介：

作品一開始藉由中國與西方的歷史故事，讓學生瞭解勾股定理的起源與發展，並直接指出故事中所敘述的勾股定理內容與計算的一般性法則，引起學生對勾股定理的興趣。

此作品提供了五種勾股定理的證明，其中包括了《九章算術注》中，劉徽利用『出入相補原理』所作的證明。而在畢氏數組的尋找上，作者更是利用四角數的性質，說明了一種尋找畢氏數組的方法。

$$n^2 + (2n+1) = (n+1)^2, \text{ 令 } 2n+1 = m^2, \forall m \in N$$

最後再加入例題，讓學生嘗試運用勾股定理理解題，更加入配合圖形的變換解題，讓學生瞭解勾股定理的另一面以及數學的多變性，激發學生思考應用的潛能。

肆、各創意作品所得評價與分數差異分析

由於第一階段與第二階段的評分者，在教學經驗與審查角度上有所差異，往往會呈現出不一樣的評分結果，因此本節將分別討論 7 件作品在不同階段中的評分結果以及分數差異。

一、作品名稱：神秘之旅（第三屆，作品編號 1 4）

表 5：神秘之旅第一階段評分結果

神秘之旅 第一階段		勾選比例	評分項目
優點平均	2.93		
推薦加權平均	0.26		
評比數	27		
名次	15/42		
第三屆優點平均	2.57		
第三屆推薦平均	0.12		

圖 1：神秘之旅評分項目勾選比例圖

註：由於第三屆是利用勾選的方式評分，因此以每個評分項目所獲評分者勾選的百分比來呈現。

在第一階段的評分中，此作品的排名是第 15 名，而優點平均與推薦加權平均也都高於第三屆全部作品的平均值。普遍評分項目的勾選比例都在三成到四成左右，而勾選比例最低的是項目 5「正確使用假設開放的發問技巧」。值得注意的是，在項目 10「實行上有相當大的困難」，竟然有兩成以上的評分者勾選，推測這或許是因為此作品以分組遊戲的方式進行教學，而讓部分評分者認為這不是一個正式的教學之故。

表 6：神秘之旅第二階段評分結果

神秘之旅 第二階段		勾選比例	評分項目
優點平均	2.54		
推薦加權平均	0.31		
評比數	13		
名次	26/42		
第三屆優點平均	2.63		
第三屆推薦平均	0.28		

圖 2：神秘之旅評分項目勾選比例圖

在第二階段的評分中，此作品的排名是第 26 名，優點平均略低於全體優點平均而推薦加權平均則是略高於全體推薦平均。此作品在項目 8「活用多樣的教

學方法」，達到了四成六的勾選率，但是在項目 7「採用多元的評量方式」上，勾選率卻低於一成。

二、作品名稱：畢氏定理證明想法（第三屆，作品編號 2 2）

表 7：畢氏定理證明想法第一階段評分結果

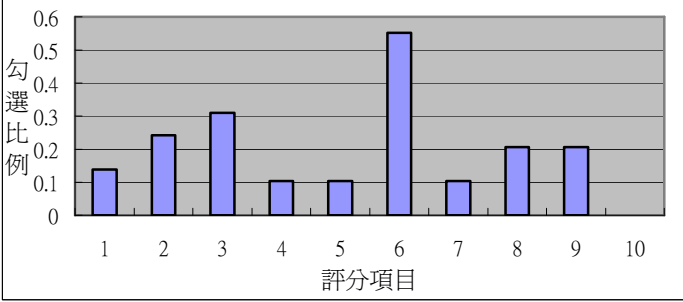
畢氏定理證明想法 第一階段		勾選比例	評分項目
優點平均	1.97		
推薦加權平均	-0.03		
評比數	29		
名次	36/42		
第三屆優點平均	2.57		
第三屆推薦平均	0.12		

圖 3：畢氏定理證明想法評分項目勾選比例圖

在第一階段的評分中，此作品的排名是第 36 名，而優點平均與推薦加權平均都低於第三屆的全體平均值。此作品的勾選比例大多都低於三成，但是在項目 6「有效使用資源生動活潑的教學媒體」上，卻獲得了超過五成的勾選率，說明由作者自製的 Flash 小動畫，相當獲得評分者的認同。但是由於此作品的教學重點只放在定理的證明上，因此在其他的評分項目上，獲得的分數並不高。

表 8：畢氏定理證明想法第二階段評分結果

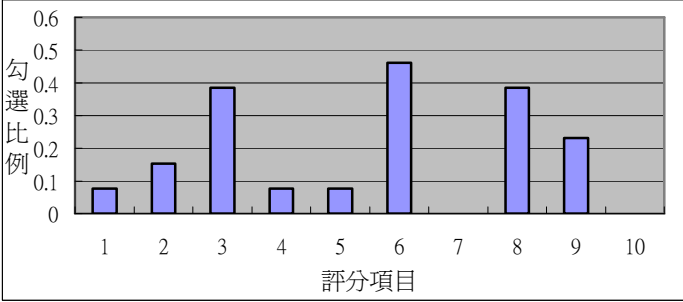
畢氏定理證明想法 第二階段		勾選比例	評分項目
優點平均	1.85		
推薦加權平均	-0.08		
評比數	13		
名次	36/42		
第三屆優點平均	2.63		
第三屆推薦平均	0.28		

圖 4：畢氏定理證明想法評分項目勾選比例圖

在第二階段的評分中，此作品的排名是第 36 名，而優點平均與推薦加權平均也是都低於全體平均值。此階段的評分者同樣在項目六給予了很高的勾選率，然而在項目 7「採用多元的評量方式」上，勾選率竟然是 0，這或許是因為評分者沒有在此作品中，看到教師對學生進行評量的活動吧。

三、作品名稱：商高定理（第四屆，作品編號 1 4）

表 9：商高定理第一階段評分結果

商高定理 第一階段		得分	評分項目
總分平均	70.07		
推薦平均	3.53		
評比數	15		
名次	18/95		
第四屆總分平均	66.48		
第四屆推薦平均	3.2		

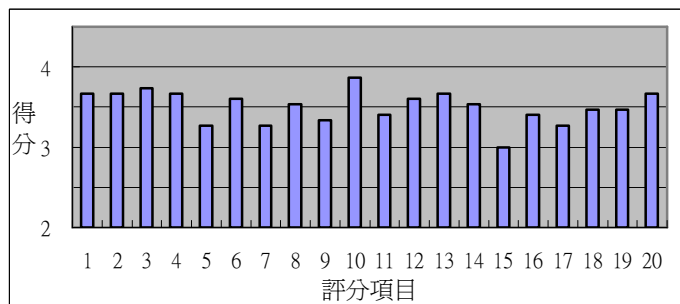


圖 5：商高定理評分項目得分圖

在第一階段的評分中，此作品的排名是第 18 名，而總分平均與推薦平均都高於第四屆的全體平均值。此階段的評分者對於此作品的評價可算是相當的平均，全部都介於 3 到 4 之間，而得分最低的项目 15「教學內容豐富多元化」，應該是正如回饋中所說，認為此作品的內容太少，而且給學生的基本練習也不足吧。而在項目 10「教學實行上具有可行性」上，此作品獲得了 3.87 分，是相當接近「同意」評價。

表 10：商高定理第二階段評分結果

商高定理 第二階段		得分	評分項目
總分平均	75.00		
推薦平均	4.00		
評比數	6		
名次	31/95		
第四屆總分平均	72.42		
第四屆推薦平均	3.65		

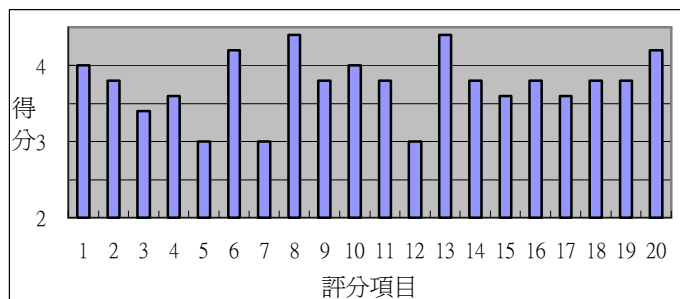


圖 6：商高定理評分項目得分圖

在第二階段的評分中，此作品的排名是第 31 名，而總分平均與推薦平均也都高於全體的平均值。此階段的評分者給予 6 個評分項目 4 以上的得分，認為作者在編排教學流程的時候，相當的有條理，且與主題相符。而在項目 10「教學實行上具有可行性」上，此作品獲得了 4.00 分，代表「同意」的評價。

而此份作品也是在本研究中討論的 7 件創意作品中，唯一進入第三階段評審的作品。

四、作品名稱：商高毀滅砲（第四屆，作品編號 15）

表 1 1：商高毀滅砲第一階段評分結果

商高毀滅砲 第一階段		得分	評分項目
總分平均	68.87		
推薦平均	3.33		
評比數	15		
名次	31/95		
第四屆總分平均	66.48		
第四屆推薦平均	3.20		

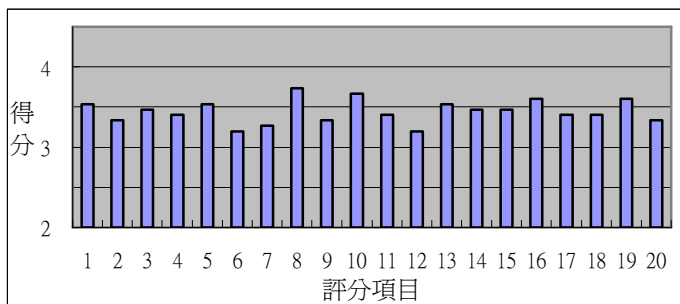


圖 7：商高毀滅砲評分項目得分圖

在第一階段的評分中，此作品的排名是第 31 名，而總分平均與推薦平均都高於第四屆全體的平均值。此份作品同樣獲得了相當平均的評價，不過有評分者認為此作品的重點沒有拿捏好，內容無法清楚教導學生學習課程主體，因此在項目 6「內容架構清楚分明」上，只獲得了 3.20 分。而在項目 10「教學實行上具有可行性」上，此作品獲得了 3.67 分，偏向「同意」的評價。

表 1 2：商高毀滅砲第二階段評分結果

商高毀滅砲 第二階段		得分	評分項目
總分平均	67.57		
推薦平均	3.57		
評比數	7		
名次	77/95		
第四屆總分平均	72.42		
第四屆推薦平均	3.65		

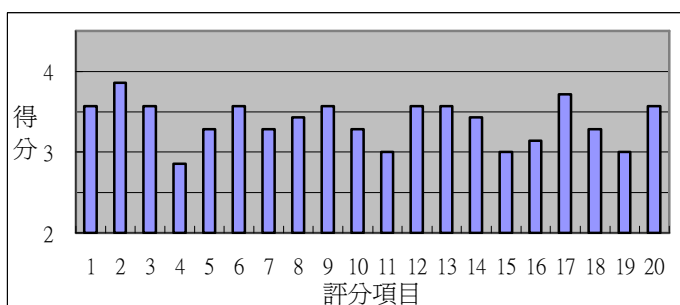


圖 8：商高毀滅砲評分項目得分圖

在第二階段的評分中，此作品的排名是第 77 名，而總分平均與推薦平均都低於第四屆全體的平均值。此階段的評分者對於此作品的「引起動機」活動，以故事加上口白的方式呈現，似乎頗有不認同之感，因此在某些項目的得分偏低，使得第二階段的排名過低，無緣進入第三階段的評分。而在項目 10「教學實行上具有可行性」上，此作品也只獲得了 3.29 分，偏向「尚可」的評價。

五、作品名稱：商高定理學習象限（第四屆，作品編號 16）

表 1 3：商高定理學習象限第一階段評分結果

商高定理學習象限 第一階段		得分	評分項目
總分平均	70.69		
推薦平均	3.25		
評比數	16		
名次	13/95		
第四屆總分平均	66.48		
第四屆推薦平均	3.20		

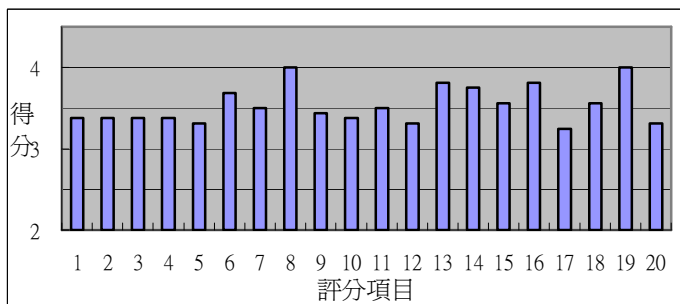


圖 9：商高定理學習象限評分項目得分圖

在第一階段的評分中，此作品的排名是第 13 名，而總分平均與推薦平均也都高於第四屆全體的平均值。此階段的評分者大多對於作者使用教學網站的呈現方式表示認同，在項目 19「充分使用資源及教學媒體」上，獲得了 4.00 分的「同意」評價。而在項目 10「教學實行上具有可行性」上，此作品只獲得了 3.38 分，略偏向「尚可」的評價，這或許是考量到教學現場限制的緣故。

表 1 4：商高定理學習象限第二階段評分結果

商高定理學習象限 第二階段		得分	評分項目
總分平均	70.57		
推薦平均	3.57		
評比數	7		
名次	61/95		
第四屆總分平均	72.42		
第四屆推薦平均	3.65		

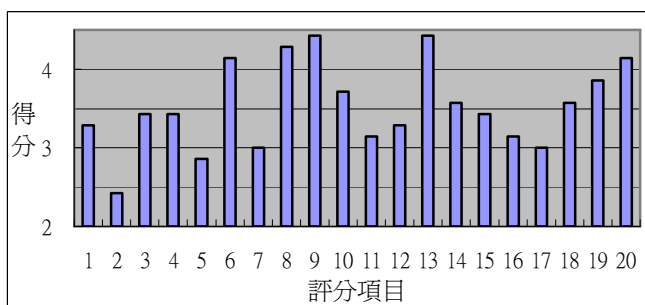


圖 10：商高定理學習象限評分項目得分圖

在第二階段的評分中，此作品的排名是第 61 名，而總分平均與推薦平均都低於第四屆全體的平均值。此階段的評分者相當認同作者所設計的教學網站，也認為作者在設計教學內容的時候，相當的豐富完整，且與主題相符。但是也認為部分內容難度過高，因此在部分的項目中分數偏低，使得第二階段的排名過低，無緣進入第三階段的評分。而在項目 10「教學實行上具有可行性」上，此作品獲得了 3.71 分，偏向「同意」的評價。

六、作品名稱：奇妙方塊裡的數學（第四屆，作品編號 53）

表 1 5：奇妙方塊裡的數學第一階段評分結果

奇妙方塊裡的數學 第一階段		得分	評分項目
總分平均	67.00		
推薦平均	3.21		
評比數	14		
名次	49/95		
第四屆總分平均	66.48		
第四屆推薦平均	3.20		

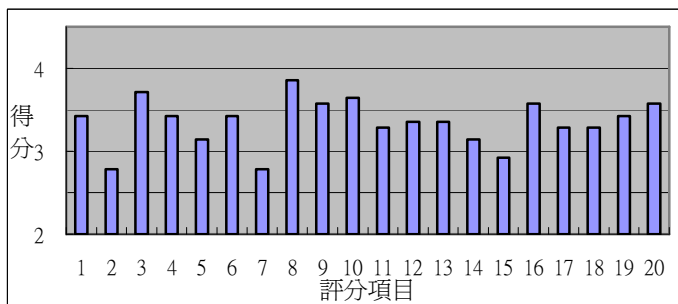


圖 1 1：奇妙方塊裡的數學評分項目得分圖

在第一階段的評分中，此作品的排名是第 49 名，總分平均與推薦平均都比第四屆全體的平均值高出一點點。此階段的評分者對於作者能夠透過方塊，讓學生瞭解勾股定理，表示相當的認同，但是因為作品中沒有呈現出教學目標中所說的「能應用商高定理解決日常生活中簡易的問題」，因此在項目 2「能與生活經驗相連結」獲得了偏低的分數。而在項目 10「教學實行上具有可行性」上，此作品獲得了 3.64 分，略偏向「同意」的評價。

表 1 6：奇妙方塊裡的數學第二階段評分結果

奇妙方塊裡的數學 第二階段		得分	評分項目
總分平均	67.00		
推薦平均	3.33		
評比數	3		
名次	79/95		
第四屆總分平均	72.42		
第四屆推薦平均	3.65		

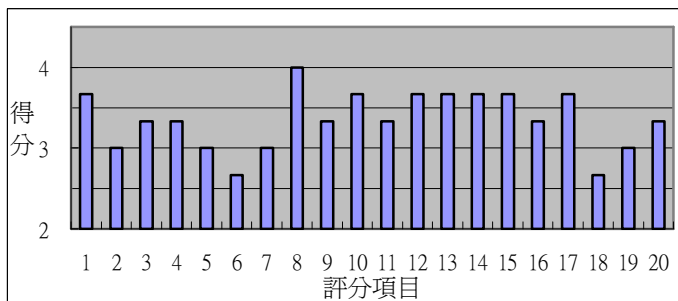


圖 1 2：奇妙方塊裡的數學評分項目得分圖

在第二階段的評分中，此作品的排名是第 79 名，而總分平均與推薦平均都低於第四屆全體的平均值。此階段的評分者對於此作品的「引起動機」活動（摺紙），頗有異議。認為此舉與主題的關聯性不甚明顯，且花的時間太長，因此在項目 18「教學時間分配恰當」上，只獲得了 2.67 分的評價。而在項目 10「教學實行上具有可行性」上，此作品獲得了 3.67 分，略偏向「同意」的評價。

七、作品名稱：勾股定理及其推廣應用（第五屆，作品編號 6 6）

表 1 7：勾股定理及其推廣應用第一階段評分結果

勾股定理及其推廣應用 第一階段		得分	評分項目
總分平均	56.88		
推薦平均	2.25		
評比數	9		
名次	68/83		
第五屆總分平均	67.83		
第五屆推薦平均	3.35		

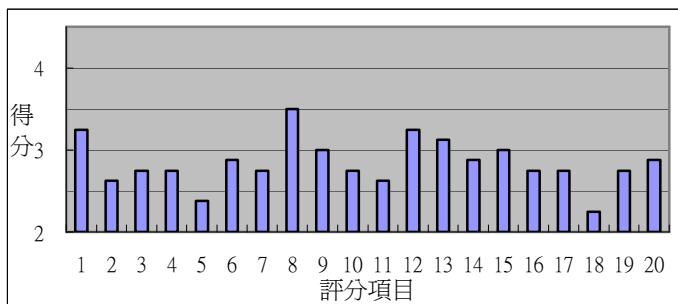


圖 1 3：勾股定理及其推廣應用評分項目得分圖

在第一階段的評分中，此作品的排名是第 6 8 名，而總分平均與推薦平均都明顯低於第五屆全體的平均值。此階段的評分者大多因為作者並沒有做教學流程以及時間分配的安排，而認為此份作品無法稱做教案，只能算是給老師的補充講義，因此普遍分數並不高。而在項目 1 0「教學實行上具有可行性」上，此作品只獲得了 2.75 分，偏向「尚可」的評價。

表 1 8：勾股定理及其推廣應用第二階段評分結果

勾股定理及其推廣應用 第二階段		得分	評分項目
總分平均	66.60		
推薦平均	3.20		
評比數	5		
名次	65/83		
第五屆總分平均	73.46		
第五屆推薦平均	3.64		

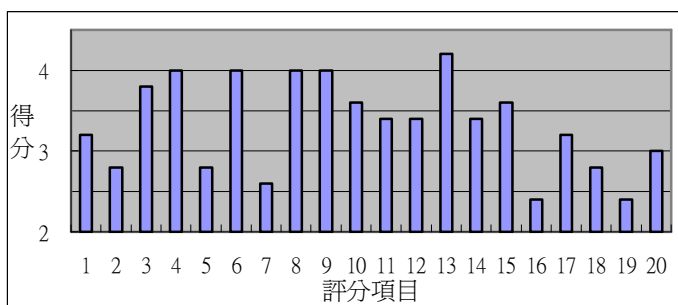


圖 1 4：勾股定理及其推廣應用評分項目得分圖

在第二階段的評分中，此作品的排名是第 6 5 名，而總分平均與推薦平均都明顯低於第五屆全體的平均值。此階段的評分者則是對作者以歷史故事當作引起動機，表示高度的認同，但是對於作品中所安排的練習例題，卻覺得難度太高，造成分數的起伏很大，而平均則偏低。在項目 1 0「教學實行上具有可行性」上，此作品獲得了 3.60 分，略偏向「同意」的評價。

伍、評分者對各創意作品的回饋與改進建議分析

在本研究的「研究範圍與限制」中提到，歷屆競賽中所使用的評分表格式都略有不同。而對於開放式的評分項目，也就是評分者對各創意作品的回饋與改進建議這部分，改變尤其多。在第三屆中，我們幾乎不要求一般的評分者給予作品回饋，因此對於第三屆的兩份創意作品，無法在本節中給予回饋，只好利用評分的數據，發現作品可能的疏失以及改進建議。而第五屆的開放式評分項目，要求的比第四屆更多，因此在回饋與改進建議的呈現方式上，也將會略有不同。

一、作品名稱：神秘之旅（第三屆，作品編號 1 4）

此作品以「神秘之旅」為主題，利用類似闖關遊戲的方式，將整個教學融入生活情境之中，這對於激發學生學習意願以及營造班級學習氣氛，相信會有不錯的效果。但是對於最重要的定理敘述與證明，卻讓人有一種不夠詳細的感覺，雖然以情境拋出題目，但似乎只是在做商高定理的例題而已。

建議：（一）定理的敘述與幾何意義可再多著墨，證明的方式可再更嚴謹一點或是多舉幾種不同的證法。

（二）此作品用作教學後的實作評量或許會更適合。

二、作品名稱：畢氏定理證明想法（第三屆，作品編號 2 2）

此作品以自製的 Flash 小動畫，讓學生可以自行翻轉移動圖形，進行操作及驗證，讓人留下了深刻的印象，而這個小動畫，也成功獲得了半數評分者的認同。作品中雖然提到了 8 種證明勾股定理的方法，但是這似乎不太適合用作對學生的教學。第一個原因是此作品太過強調證明的方法，卻忽略了該給學生基本的練習，第二個原因是有的證明方法超出了國二的範圍。

建議：（一）教學流程與時間分配應該要先做思考。

（二）在講述定理敘述以及證明之後，都要給學生足夠的基本練習，並適時地評量學習成效。

（三）證明的方法大約 3 個即可，其餘的可當作補充資料，讓有興趣的學生自我挑戰。

三、作品名稱：商高定理（第四屆，作品編號 14）

表 19：商高定理第一階段互評整理

第一階段教師互評評語整理：	推薦程度：3.53
內容新奇。	
很有創意。	
簡單可行。	
教學目標明確，內容合宜。	
教學程序有步驟性，條理化。	
課程能融入生活是很棒的，剪貼教學也非常有趣。	
簡單明瞭引出主題，但內容稍少了點。	
以生活化的話題導入學習，並且以圖解說明定理的由來，能夠增加學生的理解，但活動創新度不高。	
生活化，但可更多元。	
主題未凸顯。	
融入資訊，很不錯；但學生的實作略嫌少。	
評價 5：0 評價 4：11 評價 3：5 評價 2：1 評價 1：0 總計：17(人)	

表 20：商高定理第二階段互評整理

第二階段學程學生評語整理：	推薦程度：4.00
優點	缺點
教學方法與活動設計很特別，由參觀原住民圖騰引出主題，並由瓷磚圖片推導商高定理。	教材過於簡單，活動設計也太簡單，不易引起國二學生的興趣。
作品淺顯易懂，例子生活化，圖形剪貼讓學生了解商高定理的特性。展示磁磚讓同學觀察特性與現象，蠻有趣的。	內容太少，應多舉例子與變化題，覺得內容過於空洞。
以生活中的實例，讓學生可從生活學習並親身體驗，引發興趣，影片內容簡單。	一開始的圖騰柱作開端，有點讓人摸不著頭緒，感覺與主題不搭。缺少多樣的計算，不易產生成就感。
利用故事引導學生進入主題，題目活潑，和現實生活相關，整體感覺不錯。	此作品重點大多要學生自己去探討發現，當停頓在某一點時，就很難繼續下去，影響進度。
評價 5：0 評價 4：6 評價 3：0 評價 2：0 評價 1：0 總計：6(人)	

用圖騰或設計引入，頗有創意，但是開頭的鋪陳接上魯凱族的胚騰，實在有點牽強，在處理上可以再流暢一點。用紙上剪貼操作來『證明』勾股定理固然可行，但是技巧甚高，若在上課中進行，恐怕會延宕教學時間。此作品對於定理的建構與介紹非常的有邏輯性，學生應該可以很容易接受，但是基本的練習仍嫌太少。最後的教學活動，讓學生自行設計旅遊行程，題目活潑，感覺不錯，但是在棋盤上規劃路程，那麼所謂『距離』是沿棋盤（道路）走呢，還是取直線？或許該對學生做個情境式的假設。

建議：（一）要學生自己由圖騰中『發現』證明，不如當一個故事給他們欣賞來的有教育價值，也更能引起學習動機。

（二）若要讓學生體驗剪貼的操作，當作回家作業在流程上應該會更為順暢。而且剪的方式也該稍微有個提示才行。

（三）在講述定理敘述以及證明之後，都要給學生足夠的基本練習，並適時地評量學習成效。

四、作品名稱：商高毀滅砲（第四屆，作品編號 15）

表 2 1：商高毀滅砲第一階段互評整理

第一階段教師互評評語整理：	推薦程度：3.33
很豐富。	
新鮮，有趣。	
很有趣，創新！	
融入生活中，簡報很好。	
建議多讓學生操作。	
實用性可，但學生可應用面不足。	
創意不錯，但主題呈現方式不易了解。	
內容無法清楚教導學生學習課程的主題。	
認為並無特別創新之處，有隨處可見如此教學內容與方式之感。	
教案部分太簡略，重點沒拿捏很好，教學媒體無所適從，感覺有些搭配不起來。	
評價 5：0 評價 4：6 評價 3：10 評價 2：1 評價 1：0 總計：17(人)	

表 2 2：商高毀滅砲第二階段互評整理

第二階段學程學生評語整理：		推薦程度：3.57
優點	缺點	
把商高定理的原理和淵源解釋詳細，讓學生不只了解公式也了解歷史背景，也完整的作了總結。	PowerPoint 製作有點幼稚，概念雖不錯，不過在故事的選擇應多做考量。	
以日常生活常見物品為教材，讓學生理解商高定理是無所不在的，並以故事引發學習動機。	遊戲性質大過於教學性質，時間安排不適合。	
舉例非常生活化。	看不懂他要說明什麼。	
編排完整，善用多媒體，整體蠻創新的，教案完善。	故事內容蠻幼稚的，畢氏定理的證明不夠完整清楚。	
以日常生活常見物品為教材，讓學生理解商高定理是無所不在的，與生活息息相關。	關於國小部分的內容應減少介紹，並多給些題目練習。	
以故事為開頭，吸引學生注意力。簡報的版面設計與教材編排上皆有獨特整體的連貫性。	簡報使用的文字不正式，不適合用於教學，題材可再深入探討三角形的其他性質，使學生能多樣思考及應用。	
舉例題很生活化。	口白很爛不好笑且不清晰，字體太花俏，看來會亂，故事不好笑。	
評價 5	：1	評價 4：2
評價 3	：4	評價 2：0
評價 1	：0	總計：7 (人)

以故事加上口白的方式呈現，其實是相當有趣的。雖然不知道國中的學生對此故事的接受度如何，但是看來作為第二階段評審的大學生們是無法接受的。另外，此故事與勾股定理相關的部分，似乎只有那兩個面積相同的圖而已，用來作為「引起動機」的活動，實在有點牽強。定理證明的部分，面積的證明方式對學生而言，應該是相當容易接受，但是基本的練習與應用仍嫌不足。

建議：（一）在引起動機的故事設計上，應再多做考量。

（二）ppt 上的證明內容太過簡略，在教學時需要另外將證明過程寫下才行。

（三）在講述定理敘述以及證明之後，都要給學生足夠的基本練習，並適時地評量學習成效。

伍、作品名稱：商高定理學習象限（第四屆，作品編號 16）

表 2 3：商高定理學習象限第一階段互評整理

第一階段教師互評評語整理：					推薦程度：3.25
明確介紹畢氏定理。					
相當深入，也安排許多有趣的實驗。					
學習單豐富多元。					
可多與生活做結合，引起學習動機。					
Excellent！實在是太用心了，相信學生對於”商高定理”一定非常有學習興趣與成效。					
是相當有深度的作品，但是是否符合學生的能力與程度呢？					
普通，沒創意，但教學媒體應用不錯。					
文字敘述多，不易引起興趣。					
作品編排應更有序，並另以執行檔供評選者使用。					
看不懂。					
評價 5	：3	評價 4	：5	評價 3	：5
評價 2	：2	評價 1	：2	總計：17 (人)	

表 2 4：商高定理學習象限第二階段互評整理

第二階段學程學生評語整理：		推薦程度：3.57
優點	缺點	
對於數學上的專有名詞解釋的很詳細，並充分利用圖形做輔助教材，以達到圖文的結合，易幫助思考。	1.引用過多專有名詞，容易使學生搞混 2.教材難度過高，不易吸收。 3.稍微枯燥乏味。	
利用網路資源，給學生思考的空間，分組討論與課堂互動引起學生興趣。	內容程度過難，太理論，應多用實際例子讓學生了解。	
教案完整，也相當用心，有由深入淺淺的感覺，一步一步的讓學生進入商高定理的世界。	幾乎沒有分組討論的時間，建議多留一點討論或提問的時間。	
教材中含有許多圖示，幫助學生理解。	教師加權上，老師的給分是 9 倍，和其他比例相較之下 5~7 倍會較適合。	
教材內容豐富，網頁用色恰當，吸引瀏覽者的目光，善用圖示。線上遊戲等教材，可使學生在遊戲或觀賞中達到學習的成效。	網頁上的文字式 flash 速度過慢。	
評價 5	：1	評價 4
：2	評價 3	：4
評價 2	：0	評價 1
：0	總計：7 (人)	

此作品的呈現方式以教學網站為主，將教學分為歷史探究、定理敘述、思考驗證，及解決問題四大主題。在網頁的設計上，用色相當的豐富，輔助的圖片也相當的充足，應該很容易吸引學生的目光。而以小兒辯日故事引起學生的學習動機，再以陳子求日高的方法引出勾股定理，本來甚為合適，但是若以國二生的先備知識作考量，要他們在短時間內（課程安排 5 ~ 10 分鐘）討論出測量太陽高度的方法，似乎太過於勉強。而在巴比倫發現的『普林頓 322 號』泥版，也是個不錯的生活教材，只是表中的數字都偏大，若要學生自行從表中的數字，看出其中的特殊關係，則是非常困難的。

- 建議：（一）現階段要學生自己找出求日高的方法，不如當一個故事給他們欣賞來的有教育價值，也更能引起學習動機。
- （二）介紹過勾股定理之後，再帶入巴比倫泥版，或許會更容易讓學生找出數字間的關係，也可順便帶出畢氏數組的介紹。
- （三）在講述定理敘述以及證明之後，可以給學生基本的練習，並適時地評量學習成效。
- （四）此教學網站之詳細，就算當作學生課後自行進修的線上教材，也是相當適合的。

六、作品名稱：奇妙方塊裡的數學（第四屆，作品編號 53）

表 25：奇妙方塊裡的數學第一階段互評整理

第一階段教師互評評語整理：					推薦程度：3.21
媒體運用充分，網頁製作很棒！					
讓學生透過實際操作來了解困難的商高定理，是滿不錯的想法。					
能透過方塊，讓學生更深入瞭解商高定理，而且媒體製作精美，很不錯。					
和一般教學相似。					
沒什麼有創意的。					
具體行為目標："能應用商高定理解決日常生活中簡易的問題"，沒達到。					
教學目標說能夠與生活相結合，但似乎未達成這項目標。					
架構模糊，實施不易。					
評價 5	：1	評價 4	：4	評價 3	：8
評價 2	：2	評價 1	：0	總計：15(人)	

表 2 6：奇妙方塊裡的數學第二階段互評整理

第二階段學程學生評語整理：				推薦程度：3.33						
優點		缺點								
作者的一一講解看的出其用心，較活潑的教材，不會太死板，分組進行且讓學生動手做，使學生產生興趣進而思考。		內容和主題並不是很貼切，並不能充分的讓學生明白其真正意義，如果多加些和主題有關之教材或多講解些意義會更好。								
配合小實驗來了解商高定理，且以明確座標圖形來使學生理解，並以生活中的事物作例子，使學生能應用商高定理來解決日常生活中的簡易問題。		教學稍嫌枯燥乏味，缺乏了引導學生獨立思考的培育，而死板的訂定了每一步，少了創新。								
老師學生間有活動，不致造成台下睡成一片的情形發生，面積方法解釋畢氏定理相當明確。		在一開始的摺紙活動中花了太多時間，可再多舉兩三個例子，讓學生看到直角就想到畢氏定理。								
評價 5	：0	評價 4	：1	評價 3	：2	評價 2	：0	評價 1	：0	總計：3 (人)

作品以摺紙的實作活動展開教學，並巧妙的以此正方體所形成的每一個面，利用圖形的剪貼，簡單的證明了勾股定理，這點相當令人讚賞。但是為了達到此教學目標，卻花了整整一節課的時間做摺紙的教學，以一個引起動機的活動來說，似乎是太過於喧賓奪主了。此外，基本的練習與應用太少，無法讓學生瞭解到勾股定理與日常生活的關聯性。

建議：(一) 摺紙活動與勾股定理之間的關聯性，只在於完成之後每一面的圖形。

如果堅持要讓學生自行動手操作，則應該要發展此活動的附加價值（例如當作工藝課的教學，或是能夠與其他教學單元相連結），否則應該要重新考量「引起動機」活動的設計。

(二) 在講述定理敘述以及證明之後，可以給學生基本的練習，並適時地評量學習成效。

七、作品名稱：勾股定理及其推廣應用（第五屆，作品編號 6 6）

表 2 7：勾股定理及其推廣應用第一階段互評整理

第一階段教師互評評語整理：		推薦程度：2.25
請敘述你對於這份作品的感想		
整體不錯。若實現在實際的課程教學上，一定是可行的！很值得效法。且這份教案，讓一個沒有教過此課程的人，可以大致上瞭解，棒！		
原來，長期身處在國小的狀態下，對於國中以上的生活已經有點脫節了！看了這份教案，時光似乎回到以前。原來數學定理的故事，是如此的有趣。		
實際教學可能有執行上的困難。		
將整個勾股定理完整呈現。		
此份作品比較像是教材分析，而看不出教學步驟。		
這份作品似乎誤解了教案的意義，教案應該要有明確的教學流程，而不是知識的引述。		
此件作品像是一份數學報告，內容詳細，從數學發展史到數學內容豐富完整，非常適合數理老師作為補充教材或是資優班學生講義，不過，此時在數學教案設計比賽中，並不適宜。		
請說明這份作品的優點為何		
教學內容與主題相符		
經由生動的歷史故事帶入，引起學生學習動機。		
那些數學定理的故事，還有數學家的故事很吸引我。教案組織也很條理分明。		
內容豐富，是給數學老師好的補充講義教材，尤其在數學史的部份，介紹的更是詳細。		
1.從數學史的角度切入，引發學生的興趣，別於一般傳統的筆試導向教學中直接教公式與計算證明。2.推導內容豐富，有別於一般傳統單一的推論證明，提供教師新的推導證明方式與方法。		
請給予此作品一些改進意見		
缺少同學相互討論的時間。		
沒有教學時間的分配,沒有結論。		
1.教案流程如何呈現教學？在這一份作品中看不出來。 2.對於各項的數學教學活動時間沒有預估。3.應該可以預測學生會有哪些數學迷思概念，加上如何破解迷思概念的教學。4.對於此份作品沒有看見老師如何做總結。		
1.無法呈現出各活動所需使用時間。2.整份教案設計以教師知識為導向，似乎沒有其他較為開放式的引導。 3.教案中無法呈現出老師如何破除學生的迷思概念。4.教案中無法呈現出老師如何做最後的統整教學。		
評價 5：0 評價 4：1 評價 3：2 評價 2：3 評價 1：2 總計：8 (人)		

表 2 8：勾股定理及其推廣應用第二階段互評整理

第二階段學程學生評語整理：	推薦程度：3.20
請敘述你對於這份作品的感想	
內容多元，一個定理由許多不同的角度切入，並順勢帶出其年代的小故事，在一片充滿邏輯的數學當中，穿插出有趣的東西，給人會心一笑。平面圖使用的相當熟練，利用不同的顏色，把每個重點清楚的區分出來。如果能使用到 3D 立體圖就更加完美了。圖表的使用，也是一個特點，整理的有條理，可以讓讀者快速的掌握狀況。	
這一份作品把畢氏定理的歷史講得很清楚，不論是東方或西方有關畢氏定理的發展也以故事的方式有清楚的描述，所以更容易引起學習者的興趣。另外這份作品還提供了很多個有關畢氏定理的證明，這一點是我最欣賞的地方，因為我們一般很少會去想如何証畢氏定理，頂多就是用三角函數的餘弦定理去証而已，可是這份作品提供了很多不同的證明。	
這一個教學計畫完整而且非常詳盡，畢氏定理及其他名稱的原因跟由來都詳細的介紹，讓學生們可以知道東西方為什麼會有這些名稱跟講法，也以簡單易懂的方式證明公式，學生們可以不用死背硬記，這點就很不錯。只是用面積來證明公式的方法列舉太多，或許反而會造成學生在學習上的困擾。	
看完這份作品，我不知道該把它歸類為國中還是高中的教材，因為我覺得對國中生來說有些內容太困難，但是對高中生來說又太過於簡單，作為課外知識補充又略嫌不足，因為勾股定理在國、高中都是相當重要的內容，也因此應用有淺有深，所以如果要作為補充教材，希望能在內容上做些取捨，以配合課程需要以及學生程度。	
看完這麼精采的作品，只想國中為什麼當時沒有這樣這種創意競賽可以讓我的學習變有趣，這份作品用顏色做管理，清楚滴表示勾股定理，解釋的非常清楚一目了然，小朋友在上課過程中應該也可以很容易就進入老師的引導，很快的將這個章節學會，只是看到很多作品都有聲有色，自然就覺得這份作品少了些什麼？加點音效或許會更吸引我唷！	
請說明這份作品的優點為何	
引用了中國數學家的證明，比較少見。能夠加深讀者的印象。證明的方法平易又不失嚴謹，帶給人很輕鬆的感覺。並且比較了東西方之間的不同，開闊讀者的視野。	
把畢氏定理的歷史用故事的方式描述得很清楚，很容易引起學習者的興趣。另外這份作品還提供了很多個有關畢氏定理的證明，可以讓學習者知道數學的證明的多變性和好玩的地方。另外也介紹了和畢氏定理有關的四角數，讓學習者更熟悉畢氏定理的特性。	
用三角數來介紹等差級數還有用四角數來尋找畢氏數列也都是個不錯的方法，學生們對於數數比較習慣的情況之下，的確可以更快讓他們習慣這種教學方式。	

勾股定理的應用面非常的廣，作品中把握了這個要點，闡述了許多實際常碰到的例子，相信可以讓學生體會到它的重要性。

1.用顏色做管理，讓人一目了然。2.編排方式很有調理，看起來很舒服。3.定理說其由來，比較能夠了解。

請給予此作品一些改進意見

單純的文字做呈現，是一個美中不足的地方。內容通通寫在一個檔案當中，特別的重點，就變得不明顯了。可以拆成幾個小部分，或許會更好。

雖然整份作品有關圖的部份做得很精緻，不過整份作品都只有 word 檔的形式，如果可以配合上其它不同的軟體效果會更好，例如：PowerPoint。

這個教學主題基本上沒有什麼太大的缺點，只是他的面積證明太多了點，使用此教學方式的老師只需要選取其中一個甚至兩個證明來教學即可，不然我覺得會造成學生學習上的困擾。

作品在關於數學符號的排版上面有些不恰當，建議可以使用一些文書編輯軟體來改善數學符號排版的問題，另外，希望能加些小活動或是小遊戲，讓學生能夠更投入其中。

1.用 ppt 的方式呈現會更好，因為它可以有先後呈現的功能，比較能吸引人。2.定理都比較無聊，所以應該插一些小活動在其中。

評價 5	: 0	評價 4	: 2	評價 3	: 2	評價 2	: 1	評價 1	: 0	總計	: 5 (人)
------	-----	------	-----	------	-----	------	-----	------	-----	----	---------

由中國與西方的歷史故事切入，並直接指出故事中所敘述的勾股定理內容與計算的一般性法則，以此作為「引起動機」的活動可說是相當的完美。再加上作者利用了四角數的性質，說明了一種尋找畢氏數組的方法，雖然難度有點偏高，但是卻可以讓學生體會數學的多變性，激發學生思考應用的潛能。然而此份作品讓人的感覺是一份給老師看的補充教材，或是資優班學生的講義，而不是可以實際教學的教材。除了作品中所舉的例題大多偏難之外，更重要的是，作品中沒有呈現出教學的流程與時間的分配，讓人看不出作者在教學時會採取怎麼樣的教學策略、如何發現及破除學生的迷思概念，以及如何做最後的統整教學。

建議：（一）應先設計完整的教學流程以及適當的時間分配，並且預測學生可能會有的數學迷思概念，加上如何破解迷思概念的教學。

（二）證明的方法大約 3 個即可，其餘的可當作補充資料，讓有興趣的學生自我挑戰。

（三）在講述定理敘述以及證明之後，可以給學生基本的練習，並增加勾股定理於日常生活中的應用，提高學生的學習興趣。

陸、研究結果之結論與應用

一、「勾股定理」創意展現的有效做法及具體建議

本節將以上述分析討論所得的改進建議為基礎，嘗試針對進行「勾股定理」所需的教學流程，做一個完整的有效做法建議。

（一）利用故事來引起動機

建議以介紹中國與西方勾股定理的小故事，作為此單元的引起動機。除了可以直接在故事中學到勾股弦的意義，以及一般性的計算法則之外，還可以讓學生藉由中國與西方的歷史故事，欣賞並瞭解勾股定理的起源與發展。

（二）採用兩種以上的證明方式

建議採用兩種以上的方式來證明勾股定理，一方面讓學生知道數學並非只有單一的解法，一方面也可以提供給學生作學習的選擇。建議採用循序漸進的方式教學，先以簡單的規則排列圖形，驗證等腰直角三角形符合三邊長的特殊關係；再以剪貼法驗證任意直角三角形都會符合定理；最後再以面積法給予學生嚴謹的證明。剪貼法較直觀，而面積法較嚴謹，這兩種對學生來說應該都是容易接受的。

（三）勾股定理的幾何意義推廣

常見的勾股定理的幾何意義大多只討論到以直角三角形的三個邊往外作正方形或是圓形，建議可請學生思考看看為什麼往外作正方形與圓形，會滿足大的面積等於兩個小的面積和？更進一步可以請學生想想看還有什麼幾何圖形，會有類似的性質？

（四）畢氏數組的推廣

所有畢氏數組的倍數，都會是另一組畢氏數組。以國二生的先備知識來看，應該可以在舉例之後，給予較嚴謹的文字證明，而不再只是要他們死背結果了。利用了四角數的性質尋找畢氏數組，這是相當高明的手法，可依學生程度而增減教學內容。同樣的式子，當然也可以利用乘法公式得到 $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$ ，因此也可以考慮與乘法公式的單元作連結。

（五）善用生活情境出題與小組討論法

除了一般基本的練習之外，也建議以生活的情境，將題目做適度的包裝，讓學生體會勾股定理於生活中的應用，提高學習興趣。此綜合活動的部分也建議採用小組討論法，藉由小組的合作與討論，更能加深學生對勾股定理的理解。

二、以各創意作品為基礎的實驗教材

在分析過各創意作品的特色，以及得到呈現勾股定理的有效做法建議之後，我們希望能更進一步擷取出所有創意作品的優點，製作出一份具有創意的單元教材。而在這 7 份作品中，雖然不乏充滿創意以及實用性的教學媒體，但是考量到這是『中小學數學教師創意教學競賽』舉辦以來，第一次嘗試製作單元實驗教材，以及實際教學現場可能的諸多限制，因此本次的實驗教材，將以紙本作爲主要的呈現方式。而如何有效地將資訊融入教學之中，以及其他的教學單元該如何呈現，希望能在下次的研究中（或下個有興趣的研究者）再做討論。

『勾股定理』的實驗教材，收錄於附錄中，提供給教師先進們做個參考，也請各位不吝指正。

致謝

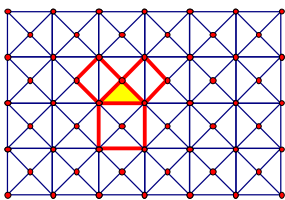
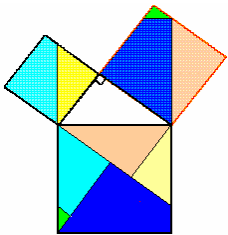
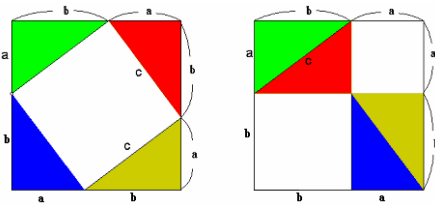
本研究蒙國科會經費支持(NSC 95-2515-S-008-004)，及國立屏東教育大學「創意數學教學」研討會主辦單位及師長的熱心指導，提供多項寶貴建議，特此致謝

參考文獻

1. 黃光雄、簡茂發主編（1998）：**教育研究法**。台北市：師大書苑。
2. 張漢宜（2002）：提升兒童數字感的創意教學策略之探討。**國教之友**,53(4),21-25。
3. 邱珍琬（2002）：國小教師創意教學實際。**初等教育學刊**,12,247-272。
4. 吳清山(2002)：創意教學的重要理念與實施策略。**台灣教育**,614,2-8。
5. 洪新春(2002)：教育改革 vs.創意教學。**台灣教育**,614,54-58。
6. 高強華(2002)：論主題統整與教學創新設計。**台灣教育**,614,9-15。
7. 陳怡樺（2003）：**中小學數學創意教學競賽實施之研究**。桃園縣：國立中央大學碩士論文（未出版）。
8. 簡心怡（2005）：**評分者對數學科創意教學觀點之比較，以「中小學數學教師創意教學競賽爲例」**。桃園縣：國立中央大學碩士論文（未出版）。
9. 王澄惠（2005）：**中小學數學教師創意教學競賽金牌得獎作品可行性分析之個案研究**。桃園縣：國立中央大學碩士論文（未出版）。

附錄一：勾股定理實驗教材之教案

年 班 別	二年 班	主題(單元)	勾股定理
教 學 者		設計者	『中小學數學教師創意教學競賽』工作小組
演示日期		教學時間	本單元共二節(演示第一、二節，共 90 分鐘)
教材來源	『中小學數學教師創意教學競賽』參賽作品之整合		
設計理念	經由歷史故事，引起學生對勾股定理的興趣，使其了解勾股定理的內容，再引入證明的方法，並配合例題，讓學生嘗試運用勾股定理題，更加入配合圖形的情境式例題，讓學生瞭解勾股定理的另一面以及數學的多變性，激發學生思考應用的潛能。		
教學方法	講述法、問答法、提問法、練習法等		
先備知識	1. 能熟練符號的代數操作 2. 能理解三角形邊角關係 3. 能使用直角三角形、正方形的面積公式求取面積 4. 具備近似值與方根的基本運算能力		
十大基本能力	一、了解自我與發展潛能 四、表達、溝通與分享 九、主動探索與研究 十、獨立思考與解決問題		
教學目標	相對應能力指標：	主題(單元)目標：	活動(具體)目標：
	A-4-10 能認識、欣賞生活中或其他學科領域常用的公式。 A-4-9 能認識勾股定理及其生活中的應用。 C-C-3 能用一般語言與數學語言說明情境與問題。 C-E-1 能用解題的結果闡釋原來的情境問題。 S-3-5 能利用形體的性質解決幾何問題。 S-4-1 能根據給定的性質作局部推理。	認知方面： 1. 能知道勾股定理的發展歷史。 2. 能知道直角三角形三邊的名稱。 3. 能敘述勾股定理。 4. 能以實際數字檢驗勾股定理。 情意方面： 5. 能欣賞勾股定理在日常生活中的地位。 6. 能分析問題的情境，發現其中所蘊含的幾何關係。 技能方面： 7. 能利用面積法證明勾股定理。 8. 能利用勾股定理解決數學及生活中的問題。	1-1 知道勾股定理的發展歷史，並能對照西方的畢氏定理。 2-1 能指出勾、股、弦的位置。 3-1 直角三角形兩股平方和等於斜邊的平方。 4-1 已知直角三角形的兩邊長，能利用勾股定理計算第三邊長。 5-1 能與同學分享勾股定理在測量、建築裡的重要地位。 6-1 能看出情境問題中所蘊含的直角三角形。 7-1 能由拼圖或面積的計算導出勾股定理。 8-1 能發現生活中的直角三角形，並利用勾股定理解決問題。

教學目標	教學活動	時間	注意事項
	第一節 壹、準備活動 (一)教師確認上課內容、進度，準備學習講義 (二)學生預習本單元 貳、發展活動 (一)勾股定理的歷史發展與敘述 1-1 1.中國的商高定理《周髀算經》 4' 2-1 2.西方的畢氏定理 4' 3-1 3.再做一次完整的勾股定理敘述 2' (二)勾股定理的幾何意義與證明 7-1 1.由規則排列的正方形瓷磚中，引導學生發現等腰直角三角形的三邊長特殊關係 7'  7-1 2.利用剪貼的方式讓學生瞭解勾股定理的幾何意義，並說明直角三角形三邊長特殊關係的一般性（想想看答案：正三角形或正多邊形） 5'  7-1 3. 利用面積法證明勾股定理 13' 		陳子求日高的方法過程繁複，故僅放在附錄以供參考 可多留時間讓學生由不一樣的圖形發現三邊長的特殊關係 可請學生帶回家做剪貼，剪的方式可利用大正方形兩邊延伸向上，再將第二大的正方形水平切過，貼的方式如圖所示 利用圖形左右面積相等，或是單看左圖利用和平方公式，或是梯形法等

4-1	(三)勾股定理的計算與應用 1.利用勾股定理的逆定理判斷直角三角形 2.利用勾股定理求直角三角形的第三邊 3.如還有剩餘時間，可在額外增加練習題 參、綜合活動 1.要求學生在家完成剪貼作業 第一節完 第二節 壹、準備活動 (一)教師確認上課內容、進度 (二)學生複習本單元，完成剪貼作業 貳、發展活動 (一)演示剪貼的方式，並再次敘述勾股定理	5' 5'	可利用第(4)小題說明學習平方根的原因
5-1	(二)由巴比倫石版引導學生認識並記憶常見的畢氏數組，以及邊長的倍數關係	8'	
6-1	(三)利用勾股定理求平面上任兩點的距離 參、綜合活動 1.亞特蘭提斯的尋寶之旅 (1)學生分組討論 (2)老師講解 第二節完	5'	可請同學示範
8-1		25'	

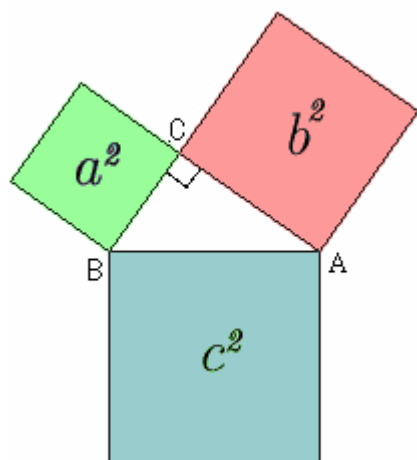
國科會 計畫



『中小學數學教師創意教學競賽』

之實驗教材

勾股定理



$$a^2 + b^2 = c^2$$

班級：_____

姓名：_____

座號：_____

主題一：勾股定理的起源與敘述

中國 → 周髀算經

南宋寧宗嘉定六年鮑澣之翻刻的《周髀算經》，卷上一開始周公問商高（約西元前 1100 年）「數安從出」之後，緊接著就有下面這段說明。

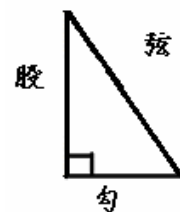
商高曰：「數之法出於圓方，圓出於方，方出於矩，矩出於九九八十一。故折矩，以為勾廣三，股脩四，徑隅五。既方之外，半其一矩，環而共盤，得成三四五，兩矩共長二十有五，是謂積矩。故禹之所以治天下者，此數之所生也。」

⇒ 文中提到，把一根直尺折成一個直角，

如果短的一段（稱為「勾」）是 3，較長的一段（稱為「股」）是 4，

那麼原來尺的兩端距離（就是直角三角形的斜邊「弦」）便是 5；

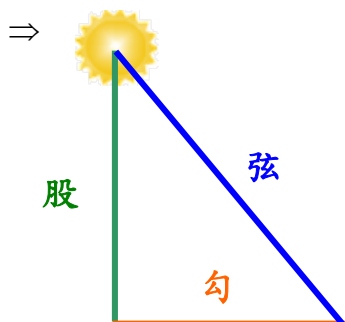
這就是勾股定理又稱商高定理的由來。



註：劉徽注《九章算術·勾股》所說，「短面曰勾，長面曰股，相與結角曰弦」，可知直角三角形的最短邊叫勾，與其垂直的邊叫股，而斜邊叫弦。（一般習慣將互相垂直的兩邊都通稱為「股」）

另外，《周髀算經》卷上陳子教榮方求日高時，陳子說：「若求邪至日者，以日下為勾，日高為股，勾股各自乘，并而開方除之，得邪至日。」，便提到了「勾股各自乘，并而開方除之」此勾股定理的一般性法則。

（有關陳子求日高的方法，有興趣的同學可參照附錄一）



「勾股各自乘」：勾 $\times$ 勾 = 勾²，股 $\times$ 股 = 股²

「并」：勾² + 股²

「開方除之」： $\sqrt{\text{勾}^2 + \text{股}^2}$

亦即：弦 = $\sqrt{\text{勾}^2 + \text{股}^2}$

西方 → 畢達哥拉斯學派

來自地磚的靈感

畢達哥拉斯 (Pythagoras) 有次應邀參加一位富有政要的餐會，這位主人豪華宮殿般的餐廳鋪著正方形美麗的大理石地，由於大餐遲遲不上桌，這些饑腸轆轆的貴賓頗有怨言；但這位善於觀察和理解的數學家卻凝視腳下這些排列規則、美麗的方形磁磚，但畢達哥拉斯不只是欣賞磁磚的美麗，而是想到它們和“數”之間的關係，於是他拿了畫筆並且蹲在地板上，以它的對角線為邊畫一個正方形，他遇然地發現這個正方形面積恰好等於兩塊磁磚的面積和。



大發現

他很好奇…於是再以 1×2 的矩形之對角線作另一個正方形，他發現這個正方形之面積等於 5 塊磁磚，也就是以兩股為邊作正方形面積之和…那一頓飯，這位古希臘數學大師視線都一直沒有離開地面。

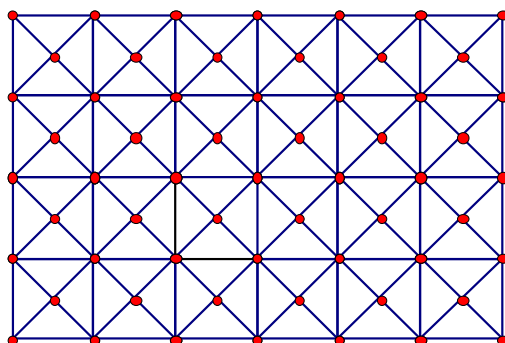
畢氏定理

畢達哥拉斯 最後對此定理作了一般性的證明，定理的內容是：「直角三角形的兩股平方和等於斜邊的平方。」後人就以畢達哥拉斯 的名字命名，稱為“畢氏定理”。

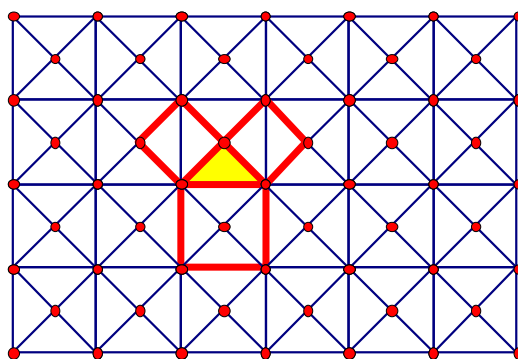
- ♥ 相傳畢達哥拉斯 發現畢氏定理後欣喜若狂，宰了 100 頭牛大肆慶賀了許多天，因此畢氏定理也叫做百牛定理。
- ♥ 畢達哥拉斯數 (畢氏數組) 是指能夠滿足畢氏定理的一組整數。
- ♥ 在歷史上，中國人 及 巴比倫人 比畢達哥拉斯 更早瞭解此定理，但當時少有文獻證明他們能夠「證明」此定理，因此一般人仍將定理歸屬於畢達哥拉斯。
- ♥ 依據統計，歷史記載證明畢氏定理的方法有四百多種，其中大部分的證法是用面積的方法。

主題二：勾股定理的幾何意義與證明

- ☺ 畢達哥拉斯由這些規則排列的正方形瓷磚中，發現了**直角三角形**邊長的特殊關係。
你是否能像畢達哥拉斯一樣，從這些瓷磚中發現些什麼呢？



- ☺ 告訴你，畢達哥拉斯發現了這個！你發現了嗎！



- ☺ 你是否能從這個圖形中得到什麼？

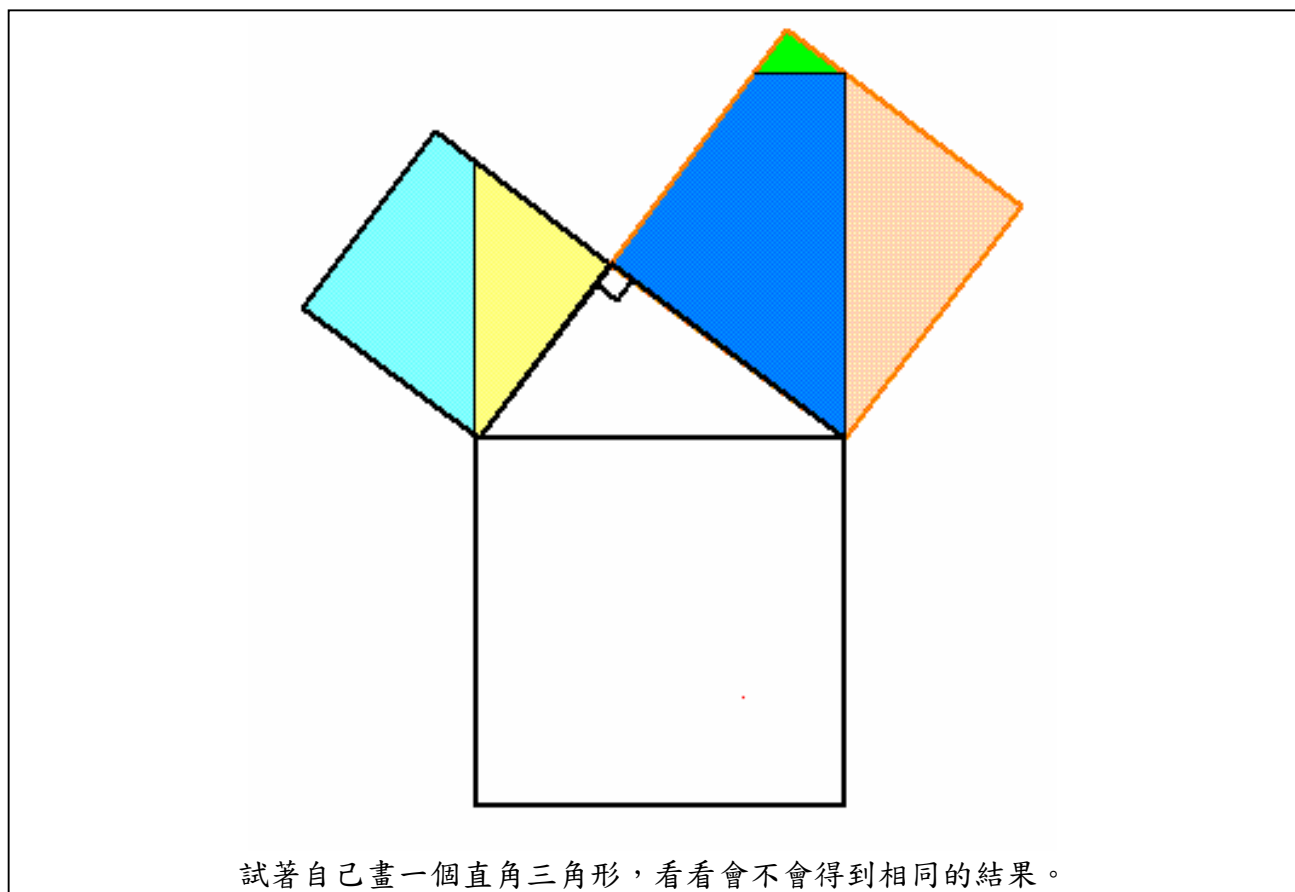
(把你的想法紀錄下來！)

【沒錯！等腰直角三角形以三邊為邊長往外所作的三個正方形中大正方形的面積恰好等於兩個小正方形的面積和。】你和畢達哥拉斯一樣聰明哦！

想想看：瓷磚中的直角三角形是等腰直角三角形，那麼是否對於所有的直角三角形都有相同的性質呢？我們就從接下來的活動去印證吧！

- ☺ 以下我們想知道，是不是對任意直角三角形，以三邊為邊長往外所作的三個正方形中，大正方形的面積恰好等於兩個小正方形的面積和？

請想辦法說明或展示兩個小正方形面積和等於大正方形的面積。（可將附錄三中的圖剪下）
提示：剪貼——>怎麼剪？——>怎麼貼？

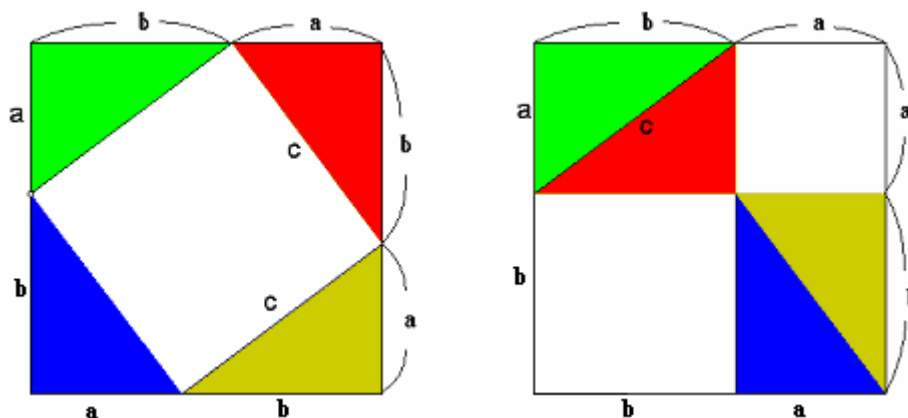


- ☺ 由上面的活動中我們發現，任何直角三角形，以三邊為邊長往外所作的三個正方形中，大正方形的面積恰好等於兩個小正方形的面積和。
- ☺ 你是否能將你所發現的性質用文字或數學符號描述出來呢？
若直角三角形的斜邊長為 c ，兩股長分別為 a 、 b ，則三個正方形的面積分別為 a^2 、 b^2 、 c^2 ，
我們可將以上所得的結果寫成_____。
即，直角三角形斜邊的平方等於兩股的平方和。

想想看：(1)若以直角三角形的三邊為半徑畫圓，那麼大圓的面積也會等於兩個小圓的面積和嗎？

(2)還有什麼幾何圖形，會有類似的性質？

- ☺ 畢達哥拉斯學派利用下圖對此定理作了一般性的證明，你看出來了嗎？
(下圖是利用 4 個全等的直角三角形所圍成的兩個正方形)

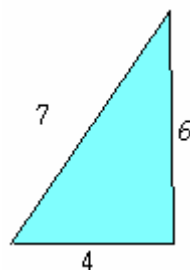
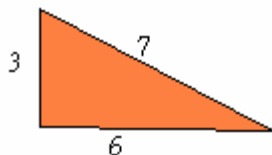
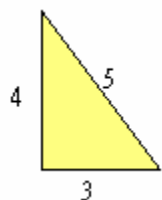


證明：(想想看：左圖中白色的部分是正方形嗎?)

想想看：利用我們曾經學過的知識，還有別的證明法嗎？

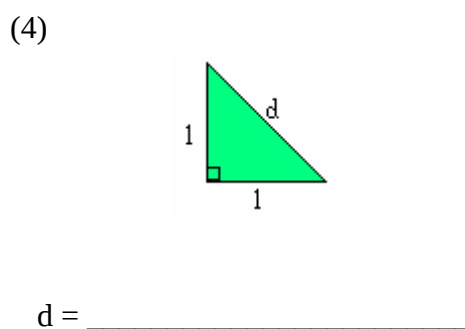
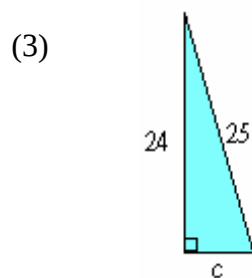
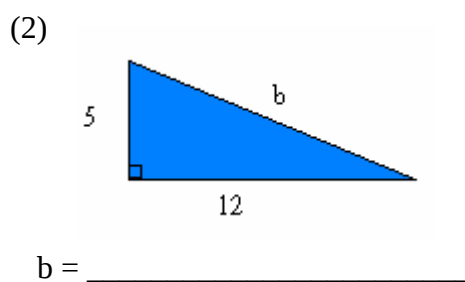
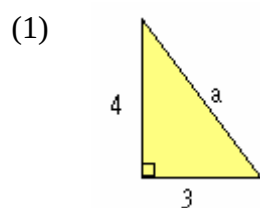
主題三：勾股定理的計算與應用

- ★ 在瞭解勾股定理後，你知道該如何判斷出三角形是否為直角三角形嗎？
下列三圖都很接近直角三角形，請找出真正的直角三角形並說明原因。



想想看：勾股定理僅限於直角三角形成立，那麼銳角或鈍角三角形最大邊的平方，與另外兩個小邊的平方和，會有什麼關係嗎？

- ★ 下列四圖皆為直角三角形，試利用勾股定理求第三邊的長度。



同學們有沒有注意到， d 並不是一個整數（甚至不是一個有理數）！這可是當初提出定理的畢達哥拉斯始料未及的事（見附錄二），而這也是我們必須學習『平方根』的原因！

- ★ 在畢達哥拉斯發現此定理的一千多年前，埃及、巴比倫和中國已懂得利用一些特殊的直角三角形來切割方型的石塊，從事廟宇、城牆等的建築。美國哥倫比亞收藏了一塊很古怪的泥板。這塊泥板是在巴比倫發掘出來的，編號 322。考古學家相信這塊泥板是公元前十八世紀的成品。泥板上有三列文字，沒有人能解釋。直至 1945 年，Neugebauer 和 Sachs 經過細心考究，發現泥板上是三列數字。你能看出這三列數字代表的意義嗎？

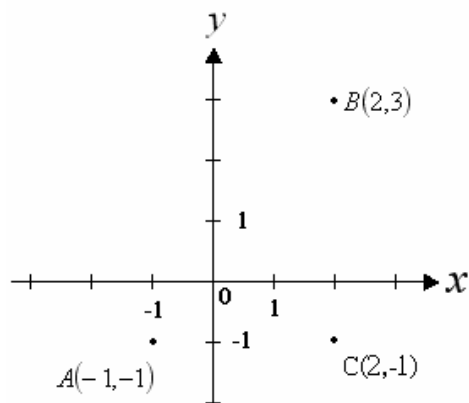
	普林頓 322 號 (Plimpton 322)		
	a	b	c
	120	119	169
	4,800	4,601	6,649
	13,500	12,709	18,541
	72	65	97
	360	319	481
	2,700	2,291	3,541
	960	799	1,249
	600	481	769
	6,430	4,961	8,161
	60	45	75
	240	161	289

沒錯！它們都是能夠滿足畢氏定理的一組整數，也就是畢達哥拉斯數(畢氏數組)。

你知道哪些畢氏數組呢？ $(\quad, \quad, \quad)$ 、 $(\quad, \quad, \quad)$ 、 $(\quad, \quad, \quad)$

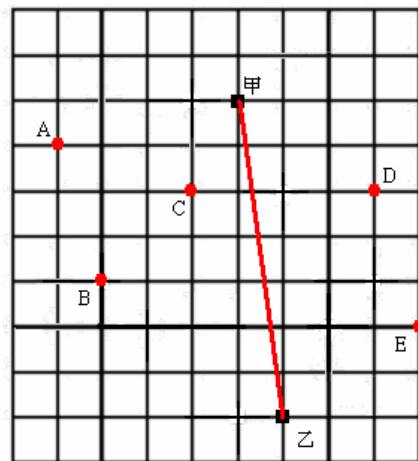
想想看：我們很容易知道 $(3, 4, 5)$ 是一組畢氏數組，而將每個數字乘以 2 倍的 $(6, 8, 10)$ 顯然也是一組畢氏數組。那麼，是否所有畢氏數組的倍數都會是另一組畢氏數組呢？

- ★ 在一年級的平面坐標中，我們學過如何計算在同一條垂直線或水平線上兩點的距離（如下圖中 $\overline{AC}$ 或 $\overline{BC}$ ），那麼 $\overline{AB}$ 的距離又該如何計算呢？



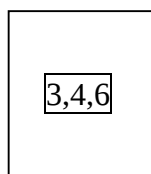
主題四：亞特蘭提斯的尋寶之旅

某日，柯南帶著偶然得到的藏寶圖，來到了亞特蘭提斯的遺跡之中，並發現了 5 個通往地下的洞穴。根據圖上的提示，與甲、乙兩點構成一個直角三角形的直角點，即為寶藏的入口。請問，柯南該走哪一個洞穴呢？

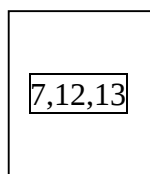


進入洞穴之後，柯南看到了四扇門以及一個石碑，門與石碑上面似乎都有一些字(如下圖)，請問柯南該往第幾扇門去呢？

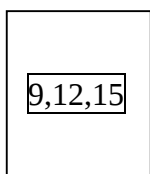
(1)



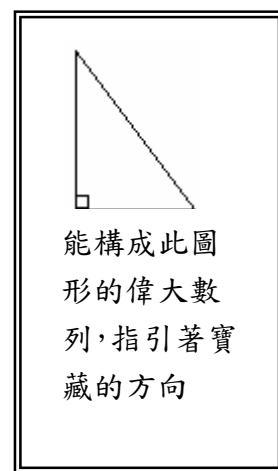
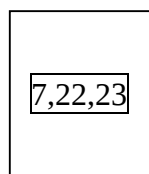
(2)



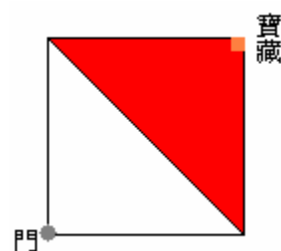
(3)



(4)

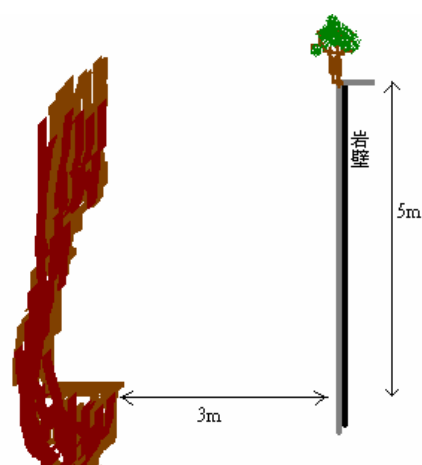


進入門後，來到了一個邊長 10 公尺的正方形房間，終於發現寶藏就在屋內的一角。但是在寶藏之前，卻有半個房間的地板破碎，而且下面佈滿岩漿。請問，若柯南要回到地面砍樹製作木板，則他至少要製作多少公尺的木板才可以拿到寶藏？

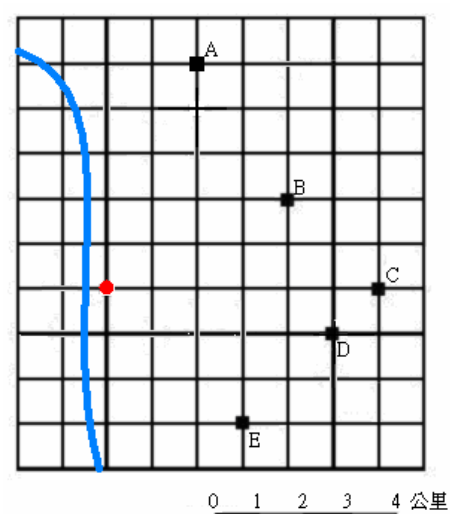


正當柯南拿起寶藏感到興奮的時候，整個地面開始震動了起來，看來古代的人還藏了最後一個陷阱等待著柯南。突然，柯南發現寶藏放置點的後方有個小通道，往前走，果然來到了外面。但是在外面等待著他的是一座岩壁，四周皆無出口，因此唯一逃生方法即為爬上岩壁，然而岩壁之下有一條湍急的河流。

這個岩壁高度為 5 公尺，柯南所站之地與岩壁距離 3 公尺，若柯南帶有一長為 6 公尺的繩索，他能順利勾住岩壁上的大樹逃生嗎？



登上岩壁後，柯南發現一架飛機，並且也有航空地圖，但是飛機上所剩的油量只夠讓他飛行 5 公里了。航空圖上顯示，柯南所在位置附近有 5 個現代都市，請問，柯南可以往哪些都市飛行，才能順利獲救呢？



勾股定理在生活中的應用還有很多（例如做出一個“直角”、畫出屬於無理數的任意根號的長度等），希望各位同學能從幾何圖形出發，真正瞭解勾股定理的意涵，進而觀察身邊的事物，體會到幾何之美！

附錄一：陳子求日高

《周髀算經》寫於西漢中期（公元前一百年左右）。這本書的內容記述了周代的數學問題。「髀」的原意是股或股骨，所以叫做《周髀算經》。「髀」在這裏的意思是指長八尺的日規，日規是量度日影來計算時間的儀器。這部數學典籍中，記載了古人怎樣用簡單的方法計算出太陽與地球間的距離。

陳子利用立竿（即周髀）測定日影，再用勾股法推算日高的方法，周髀高八尺，在鎬京（今西安附近）一帶，夏至日太陽影長一尺六寸，在正南千里，影長一尺五寸，正北千里，影長一尺七寸，我們的祖先天才地用測量日影的辦法，推算了夏至日太陽離地的斜高，用同理測定了冬至日的太陽斜高，又取中空竹，管徑一寸長八尺用來觀測太陽，發現太陽圓影恰巧充滿竹管的視線，於是用太陽的斜高和勾股的原則，推算太陽的直徑。這些測定的數據雖然非常粗略，和實際相差很遠，但在三千年前的年代，有這樣天才的創造和實際的觀測精神是我們應該學習的。

假設地是平的，太陽在正上方 S 的位置。AT 為八尺長的竿子，直立地上。

AC 為其影子，長度六尺。而北方的另一竿 A'T'，其影子 A'C' 比 AC 長，

每隔一千里差一寸。B 為太陽正下方的一點，若在 B 點立一竿，則必無影。

A 點越向 B 點接近，AC 越短。故得一比例式 $BC : AC = 1000 : 1$

$AC = 6 \text{ 尺} = 60 \text{ 寸}$ （我國古制一尺等於十寸）

(1) $\therefore$ 每隔 1000 里，影長差 1 寸 $\therefore BC = 60 \times 1000 = 60000 \text{ 里}$

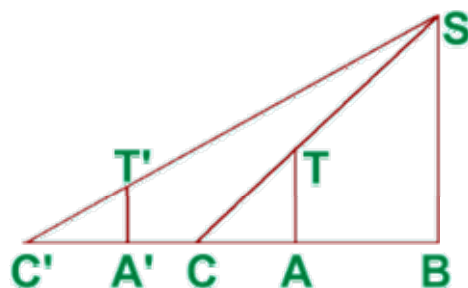
(2) 再求 B 至太陽的高度

$$\therefore \triangle SBC \sim \triangle TAC$$

$$\therefore SB : BC = AT : AC \text{（相似三角形，三邊成比例）}$$

$$SB : 60000 = 8 : 6 \rightarrow SB = 80000 \text{ 里}$$

應用商高定理（亦即我國古之勾股弦定理）



$$\triangle SBC \text{ 中 } SC^2 = SB^2 + BC^2 = 8000^2 + 6000^2 = 100000^2$$

故 $SC = 100000$ 里

想想看：我們知道太陽與地球間之距離是一億四千九百五十萬公里，與當時的計算結果差距很大。當時的方法有甚麼錯誤呢？

附錄二：畢達哥拉斯小故事

畢達哥拉斯是希臘的哲學家和數學家。出生在希臘撒摩亞（Samoa）地方的貴族家庭，年青時曾到過埃及和巴比倫那裡學習數學，遊歷了當時世界上二個文化水準極高的文明古國。畢達哥拉斯後來就到意大利的南部傳授數學及宣傳他的哲學思想，後來和他的信徒們組成了一個所謂「畢達哥拉斯學派」的政治和宗教團體。

畢達哥拉斯是比同時代中一些開壇授課的學者進步一點；因為他容許婦女（當然是貴族婦女而不是奴隸奴婢）來聽課。他認為婦女也和男人一樣在求知的權利上平等，因此他的學派中就有十多名女學者。這是其他學派所無的現象。

畢氏建立畢達哥拉斯兄弟會，崇拜整數、分數為偶像，他們認為透過對數的瞭解，可以揭示宇宙神秘，使他們更接近神，事實上是一個宗教性社團組織。入會時需宣誓不得將數學發現公諸於世，甚至在畢氏死後，有成員因公開正 12 面體可由 12 個正五邊形構成的發現而被迫浸水致死。他們集中注意於研究自然數和有理數，特別是完美數，它是本身正因數（除了本身之外）之和，例如： $6=1+2+3$ 、 $28=1+2+4+7+14$ 。他們認為上帝因為 6 是完美的，因此選擇以 6 天創造萬物，且月亮繞行地球一週約 28 天。

畢氏建立畢達哥拉斯兄弟會後不久，撰造了「哲學家(philosopher)」一詞，在一次出席奧林匹亞競賽時，弗利尤司的里昂王子問他會如何描述自己，他回道：「我是一位哲學家。」他解釋說：「有些人因愛好財富而被左右，令一些人因熱中於權力和支配而盲從，但是最優秀的人則獻身於發現生活本身的意義和目的。他設法揭示自然的奧秘，熱愛知識，這種人就是哲學家。」

「在一個直角三角形，斜邊的平方是兩股平方和。」這個定理中國人（周朝的商高）和巴比倫人早在畢氏提出前一千年就在使用，但一般人仍將定理歸屬於畢達哥拉斯，是因為他證明了定理的普遍性。畢氏認為尋找證明就是尋找認識，而這種認識比任何訓練所累積的經驗都不容置疑，數學邏輯是真理的仲裁者。

對畢達哥拉斯而言，數學之美在於有理數能解釋一切自然現象。這種起指導作用的哲學觀使畢氏對無理數的存在視而不見，甚至導致他一個學生被處死。這位學生名叫希帕索斯，出於無聊，

他試圖找出 $\sqrt{2}$ 的等價分數，最終他認識到根本不存在這個分數，也就是說 $\sqrt{2}$ 是無理數，希帕索斯對這發現喜出望外，但是他的老師畢氏卻不悅。因為畢氏已經用有理數解釋了天地萬物，無理數的存在會引起對他信念的懷疑。希帕索斯經洞察力獲致的成果一定經過了一段時間的討論和深思熟慮，畢氏本應接受這新數源。然而，畢氏始終不願承認自己的錯誤，卻又無法經由邏輯推理推翻希帕索斯的論證。使他終身蒙羞的是，他竟然判決將希帕索斯淹死。這是希臘數學的最大悲劇，只有在他死後無理數才得以安全的被討論著。後來，歐幾里德以反證法證明 $\sqrt{2}$ 是無理數。

附錄三：

請將此頁中兩個小正方形，按實線剪下，並試著將 P.4 中的大正方形貼滿。

