Maxima 在線性代數上之應用

對角化

國立屏東教育大學 應用數學系 研究助理 徐偉玲

weilinghsu@mail.npue.edu.tw

日期：2009/8/10

第五章 對角化

5.1 特徵值與特徵向量

2.對下面每一個在向量空間 V 上的線性算子 T 及有序基底β，計算$[T]_\beta$，並決定β是否由 T 的特徵向量所組成

(a) $V=R^2$, $T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10a-6b \\ 17a-10b \end{pmatrix}$, 及$\beta=\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\}$

(b) $V=P_1(R)$, $T(a+bx)=(6a-6b)+(12a-11b)x$, 及$\beta=\{3+4x, 2+3x\}$

(c) $V=R^3$,$T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3a+2b-2c \\ -4a-3b+2c \\ -c \end{pmatrix}$,及$\beta=\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\}$

(d) $V=P_2(R)$, $T(a+bx+cx^2)=(-4a+2b-2c)-(7a+3b+7c)x+(7a+b+5c)x^2$, 及$\beta=\{x-x^2, -1+x^2, -1-x+x^2\}$

(e) $V=P_3(R)$, $T(a+bx+cx^2+dx^3)=-d+(-c+d)x+(a+b-2c)x^2+(-b+c-2d)x^2$, 及 $\beta=\{1-x+x^3, 1+x^2, x+x^2\}$

(f) $V=M_{2\times 2}(R)$, $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7a-4b+4c-4d & b \\ -8a-4b+5c-4d & d \end{pmatrix}$, 及$\beta=\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\}$

3.給定下列矩陣 $A\in M_{n\times n}(F)$，

(I) 決定 A 的所有特徵值

(Ⅱ) 對 A 的每一特徵值，求出對應λ的特徵向量集

(Ⅲ) 若上述存在，求 F^n 的一組基底係 A 的特徵向量組成

(Ⅳ) 若已求出一組基底，試決定一可逆矩陣 Q 及對角矩陣 D 使得 $Q^{-1}AQ=D$

(a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, F=R

(%i1) A:matrix([1,2],[3,2]); //定義一矩陣，矩陣名稱叫做 A，第一列的元素有 1, 2，第二列的元素有 3, 2

(%o1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

(%i2) eigenvalues(A); 特徵值的指令：eigenvalue(矩陣)，結果中會出現 2 個 list，第一個 list 中是真正的特徵值，而第二個 list 則是代表每個特徵值的幾何重數，也就是每個特徵值對應的特徵向量空間之維度 //計算 A 之特徵值，真正的特徵

值是放在結果的第一個 list 中，也就是 4 跟-1，而第二個 list 代表每個特徵值的幾何重數，也就是每個特徵值對應的特徵向量空間之維度

(%o2) [[4,-1],[1,1]]

(%i3) eigenvectors(A); 我們也可以用 eigenvector 計算特徵向量，事實上，eigenvector 也會把特徵值列出來，所以是包含前面 eigenvalues 功能的指令。特徵向量指令：eigenvector(矩陣)，第一部分和 eigenvalues 輸出一樣，這些向量會生成相對應特徵值的向量空間 //第一部分和 eigenvalues 輸出一樣，對於特徵值 4 有一個對應的特徵向量$[1,\frac{3}{2}]$，而特徵值-1 對應到的特徵向量為[1, -1]

(%o3) $[[[4,-1],[1,1]],[1,\frac{3}{2}],[1,-1]]$

(%i4) Q:matrix([1,1],[3/2,-1]); //取 Q 為所有特徵向量為行之矩陣，矩陣名稱定為 Q，第一列的元素有 1, 1，第二列的元素有$\frac{3}{2}$, -1

(%o4) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix}$

(%i5) invert(Q); 反矩陣的指令為 invert(矩陣) //求矩陣 Q 之反矩陣

(%o5) $\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$

(%i6) invert(Q).A.Q; //求 $Q^{-1}AQ$，為一對角矩陣且矩陣的對角元素即為 A 分別對應到 Q 的特徵值

(%o6) $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

(b) $A=\begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, F=R

(%i1) A:matrix([0,-2,-3],[-1,1,-1],[2,2,5]); //定義一矩陣，矩陣名稱叫做 A，第一列的元素有 0, -2, -3，第二列的元素有-1, 1, -1，第三列的元素有 2, 2, 5

(%o1) $\begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

(%i2) eigenvalues(A); 特徵值的指令：eigenvalue(矩陣)，結果中會出現 2 個 list，第一個 list 中是真正的特徵值，而第二個 list 則是代表每個特徵值的幾何重數，也就是每個特徵值對應的特徵向量空間之維度 //計算 A 之特徵值，真正的特徵值是放在結果的第一個 list 中，也就是 1、2、3，而第二個 list 代表每個特徵值的幾何重數，也就是每個特徵值對應的特徵向量空間之維度

(%o2) [[1,2,3],[1,1,1]]

(%i3) eigenvectors(A); 我們也可以用 eigenvector 計算特徵向量，事實上，eigenvector 也會把特徵值列出來，所以是包含前面 eigenvalues 功能的指令。特徵向量指令：eigenvector(矩陣)，第一部分和 eigenvalues 輸出一樣，這些向量會生成相對應特徵值的向量空間 //第一部分和 eigenvalues 輸出一樣，對於特徵值 1 有一個對應的特徵向量[1, 1 -1]，而特徵值 2 對應到的特徵向量爲[1, -1, 0]，特徵值 3 對應到的特徵向量爲[1, 0, -1]

(%o3) [[[1,2,3],[1,1,1]],[1,1,-1],[1,-1,0],[1,0,-1]]

(%i4) Q:matrix([1,1,1],[1,-1,0],[-1,0,-1]); //取 Q 爲所有特徵向量爲行之矩陣，矩陣名稱定爲 Q，第一列的元素有 1, 1, 1，第二列的元素有 1, -1, 0，第三列的元素有-1, 0, -1

(%o4) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

(%i5) invert(Q); $\boxed{\text{反矩陣的指令爲 invert(矩陣)}}$ //求矩陣 Q 之反矩陣

(%o5) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

(%i6) invert(Q).A.Q; //求 $Q^{-1}AQ$，爲一對角矩陣且矩陣的對角元素即爲 A 分別對應到 Q 的特徵值

(%o6) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(c) A=$\begin{pmatrix} i & 1 \\ 2 & -i \end{pmatrix}$, F=C

(%i1) A:matrix([%i,1],[2,-%i]);

(%o1) $\begin{bmatrix} \%i & 1 \\ 2 & -\%i \end{bmatrix}$

(%i2) load("eigen");

(%o2)
C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/matrix/eigen.mac

(%i3) eigenvalues(A);

(%o3) [[−1,1],[1,1]]

(%i4) eigenvectors(A);

(%o4) [[[−1,1],[1,1]],[[[1,−%i−1]],[[1,1−%i]]]]

(%i5) Q:matrix([1,1],[-%i-1,1-%i]);

(%o5) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\%i-1 & 1-\%i \end{bmatrix}$

(%i6) invert(Q);

$$(\%o6)\quad \begin{bmatrix} \frac{1-\%i}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{\%i+1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(%i7) f:invert(Q).A.Q;

$$(\%o7)\quad \begin{bmatrix} -\frac{2-(-\%i-1)\,\%i}{2}-\frac{1-\%i}{2} & \frac{1-\%i}{2}-\frac{2-(1-\%i)\,\%i}{2} \\ \frac{2-(-\%i-1)\,\%i}{2}-\frac{\%i+1}{2} & \frac{2-(1-\%i)\,\%i}{2}+\frac{\%i+1}{2} \end{bmatrix}$$

(%i8) expand(f);

$$(\%o8)\quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(d) $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, F=R

(%i1) A:matrix([2,0,-1],[4,1,-4],[2,0,-1]); //定義一矩陣，矩陣名稱叫做 A，第一列的元素有 2, 0, -1，第二列的元素有 4, 1, -4，第三列的元素有 2, 0, -1

$$(\%o1)\quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(%i2) eigenvalues(A); 特徵值的指令：eigenvalue(矩陣)，結果中會出現 2 個 list，第一個 list 中是真正的特徵值，而第二個 list 則是代表每個特徵值的幾何重數，也就是每個特徵值對應的特徵向量空間之維度 //計算 A 之特徵值，真正的特徵值是放在結果的第一個 list 中，也就是 0 跟 1，而第二個 list 代表每個特徵值的幾何重數，也就是每個特徵值對應的特徵向量空間之維度

(%o2) [[0 , 1] , [1 , 2]]

(%i3) eigenvectors(A); $\boxed{\text{我們也可以用 eigenvector 計算特徵向量，事實上，eigenvector 也會把特徵值列出來，所以是包含前面 eigenvalues 功能的指令。特徵向量指令：eigenvector(矩陣)，第一部分和 eigenvalues 輸出一樣，這些向量會生成相對應特徵值的向量空間}}$ //第一部分和 eigenvalues 輸出一樣，對於特徵值 0 有一個對應的特徵向量[1, 4, 2]，而特徵值 1 對應到的特徵向量爲[1, 0, 1]，[0, 1, 0]

(%o3) [[[0,1],[1,2]],[1,4,2],[1,0,1],[0,1,0]]

(%i4) Q:matrix([1,1,0],[4,0,1],[2,1,0]); //取 Q 爲所有特徵向量爲行之矩陣，矩陣名稱定爲 Q，第一列的元素有 1, 1, 0，第二列的元素有 4, 0,1，第三列的元素有 2, 1, 0

(%o4) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(%i5) invert(Q); $\boxed{\text{反矩陣的指令爲 invert(矩陣)}}$ //求矩陣 Q 之反矩陣

(%o5) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -4 \end{bmatrix}$

(%i6) invert(Q).A.Q; //求 $Q^{-1}AQ$，爲一對角矩陣且矩陣的對角元素即爲 A 分別對應到 Q 的特徵值

(%o6) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4.對每一個 V 上的線性算子 T，求 T 的所有特徵值及 V 的一組有序基底 β 使得 $[T]_\beta$ 爲對角矩陣

(a) $V=R^2$, T(a,b)=(-2a+3b, -10a+9b)

(%i1) A:matrix([-2,-10],[3,9]);　//定義一矩陣，矩陣名稱叫做 A，第一列的元素有 -2, -10，第二列的元素有 3, 9

(%o1) $\begin{bmatrix} -2 & -10 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$

(%i2) eigenvalues(A);　特徵值的指令：eigenvalue(矩陣)，結果中會出現 2 個 list，第一個 list 中是真正的特徵值，而第二個 list 則是代表每個特徵值的幾何重數，也就是每個特徵值對應的特徵向量空間之維度　//計算 A 之特徵值，真正的特徵值是放在結果的第一個 list 中，也就是 3 跟 4，而第二個 list 代表每個特徵值的幾何重數，也就是每個特徵值對應的特徵向量空間之維度

(%o2) [[3, 4], [1, 1]]

(%i3) eigenvectors(A);　我們也可以用 eigenvector 計算特徵向量，事實上，eigenvector 也會把特徵值列出來，所以是包含前面 eigenvalues 功能的指令。特徵向量指令：eigenvector(矩陣)，第一部分和 eigenvalues 輸出一樣，這些向量會生成相對應特徵值的向量空間　//第一部分和 eigenvalues 輸出一樣，對於特徵值 3 有一個對應的特徵向量$[1,-\frac{1}{2}]$，而特徵值 4 對應到的特徵向量爲$[1, -\frac{3}{5}]$

(%o3) $[[[3, 4], [1, 1]], [1, -\frac{1}{2}], [1, -\frac{3}{5}]]$

(%i4) Q:matrix([1,1],[-1/2,-3/5]);　//取 Q 爲所有特徵向量爲行之矩陣，矩陣名稱定爲 Q，第一列的元素有 1, 1，第二列的元素有$-\frac{1}{2}, -\frac{3}{5}$

(%o4) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$

(%i5) invert(Q);　反矩陣的指令爲 invert(矩陣)　//求矩陣 Q 之反矩陣

(%o5) $\begin{bmatrix} 6 & 10 \\ -5 & -10 \end{bmatrix}$

(%i6) invert(Q).A.Q;　//求 $Q^{-1}AQ$，爲一對角矩陣且矩陣的對角元素即爲 A 分別對應到 Q 的特徵值

(%o6) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

(b) $V=R^3$, T(a, b, c)=(7a-4b+10c, 4a-3b+8c, -2a+b-2c)

(%i1) A:matrix([7,4,-2],[-4,-3,1],[10,8,-2]);　//定義一矩陣，矩陣名稱叫做 A，第一列的元素有 7, 4, -2，第二列的元素有-4, -3, 1，第三列的元素有 10, 8, -2

(%o1) $\begin{bmatrix} 7 & 4 & -2 \\ -4 & -3 & 1 \\ 10 & 8 & -2 \end{bmatrix}$

(%i2) eigenvalues(A);　特徵值的指令：eigenvalue(矩陣)，結果中會出現 2 個 list，第一個 list 中是真正的特徵值，而第二個 list 則是代表每個特徵值的幾何重數，也就是每個特徵值對應的特徵向量空間之維度　//計算 A 之特徵值，真正的特徵值是放在結果的第一個 list 中，也就是 2，-1，1，而第二個 list 代表每個特徵值的幾何重數，也就是每個特徵值對應的特徵向量空間之維度

(%o2) [[2,-1,1],[1,1,1]]

(%i3) eigenvectors(A);　我們也可以用 eigenvector 計算特徵向量，事實上，eigenvector 也會把特徵值列出來，所以是包含前面 eigenvalues 功能的指令。特徵向量指令：eigenvector(矩陣)，第一部分和 eigenvalues 輸出一樣，這些向量會生成相對應特徵值的向量空間　//第一部分和 eigenvalues 輸出一樣，對於特徵值 2 有一個對應的特徵向量$[1,-\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$，而特徵值-1 對應到的特徵向量爲[1, -1, 2]，特徵值 1 對應到的特徵向量爲$[1, -\frac{1}{2}, 2]$

(%o3) $[[[2,-1,1],[1,1,1]],[1,-\frac{1}{2},\frac{3}{2}],[1,-1,2],$

$[1,-\frac{1}{2},2]]$

(%i4) Q:matrix([1,1,1],[-1/2,-1,-1/2],[3/2,2,2]); //取 Q 爲所有特徵向量爲行之矩陣，矩陣名稱定爲 Q，第一列的元素有 1, 1, 1，第二列的元素有$-\frac{1}{2}$, -1, $-\frac{1}{2}$，第三列的元素有$\frac{3}{2}$, 2, 2

$$(\%o4)\quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

(%i5) invert(Q); 反矩陣的指令爲 invert(矩陣) //求矩陣 Q 之反矩陣

$$(\%o5)\quad \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

(%i6) invert(Q).A.Q; //求 $Q^{-1}AQ$，爲一對角矩陣且矩陣的對角元素即爲 A 分別對應到 Q 的特徵值

$$(\%o6)\quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(c) $V=R^3$, T(a, b, c)=(-4a+3b-6c, 6a-7b+12c, 6a-6b+11c)

(%i1) A:matrix([-4,6,6],[3,-7,-6],[-6,12,11]); //定義一矩陣，矩陣名稱叫做 A，第一列的元素有-4, 6, 6，第二列的元素有 3, -7, -6，第三列的元素有-6, 12, 11

$$(\%o1)\quad \begin{bmatrix} -4 & 6 & 6 \\ 3 & -7 & -6 \\ -6 & 12 & 11 \end{bmatrix}$$

(%i2) eigenvalues(A); 特徵值的指令：eigenvalue(矩陣)，結果中會出現 2 個 list，第一個 list 中是真正的特徵值，而第二個 list 則是代表每個特徵值的幾何重數，

$\boxed{\text{也就是每個特徵值對應的特徵向量空間之維度}}$ //計算 A 之特徵值，真正的特徵值是放在結果的第一個 list 中，也就是 2 跟-1，而第二個 list 代表每個特徵值的幾何重數，也就是每個特徵值對應的特徵向量空間之維度

(%o2) [[2,-1],[1,2]]

(%i3) eigenvectors(A); $\boxed{\text{我們也可以用 eigenvector 計算特徵向量，事實上，eigenvector 也會把特徵值列出來，所以是包含前面 eigenvalues 功能的指令。特徵向量指令：eigenvector(矩陣)，第一部分和 eigenvalues 輸出一樣，這些向量會生成相對應特徵值的向量空間}}$ //第一部分和 eigenvalues 輸出一樣，對於特徵值 2 有一個對應的特徵向量[1, -1, 2]，而特徵值-1 對應到的特徵向量為[1, 0, $\frac{1}{2}$]，[0, 1, -1]

(%o3) $[[[2,-1],[1,2]],[1,-1,2],[1,0,\frac{1}{2}],[0,1,-1]]$

(%i4) Q:matrix([1,1,0],[-1,0,1],[2,1/2,-1]); //取 Q 為所有特徵向量為行之矩陣，矩陣名稱定為 Q，第一列的元素有 1, 1, 0，第二列的元素有-1, 0, 1，第三列的元素有 2, $\frac{1}{2}$, -1

(%o4) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$

(%i5) invert(Q); $\boxed{\text{反矩陣的指令為 invert(矩陣)}}$ //求矩陣 Q 之反矩陣

(%o5) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

(%i6) invert(Q).A.Q;　//求 $Q^{-1}AQ$，爲一對角矩陣且矩陣的對角元素即爲 A 分別對應到 Q 的特徵值

$$(\%o6)\quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(d) $V=P_1(R)$, $T(ax+b)=(-6a+2b)x+(-6a+b)$

(%i1) A:matrix([1,-6],[2,-6]);　//定義一矩陣，矩陣名稱叫做 A，第一列的元素有 1, -6，第二列的元素有 2, -6

$$(\%o1)\quad \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$$

(%i2) eigenvalues(A);　特徵值的指令：eigenvalue(矩陣)，結果中會出現 2 個 list，第一個 list 中是真正的特徵值，而第二個 list 則是代表每個特徵值的幾何重數，也就是每個特徵值對應的特徵向量空間之維度　//計算 A 之特徵值，真正的特徵值是放在結果的第一個 list 中，也就是-3 跟-2，而第二個 list 代表每個特徵值的幾何重數，也就是每個特徵值對應的特徵向量空間之維度

(%o2) [[-3,-2],[1,1]]

(%i3) eigenvectors(A);　我們也可以用 eigenvector 計算特徵向量，事實上，eigenvector 也會把特徵值列出來，所以是包含前面 eigenvalues 功能的指令。特徵向量指令：eigenvector(矩陣)，第一部分和 eigenvalues 輸出一樣，這些向量會生成相對應特徵值的向量空間　//第一部分和 eigenvalues 輸出一樣，對於特徵值 -3 有一個對應的特徵向量$[1,\frac{3}{2}]$，而特徵值-2 對應到的特徵向量爲$[1, \frac{1}{2}]$

$$(\%o3)\quad [[[-3,-2],[1,1]],[1,\frac{2}{3}],[1,\frac{1}{2}]]$$

(%i4) Q:matrix([1,1],[2/3,1/2]);　//取 Q 為所有特徵向量為行之矩陣，矩陣名稱定為 Q，第一列的元素有 1, 1，第二列的元素有 $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$

(%o4) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(%i5) invert(Q);　反矩陣的指令為 invert(矩陣)　//求矩陣 Q 之反矩陣

(%o5) $\begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$

(%i6) invert(Q).A.Q;　//求 $Q^{-1}AQ$，為一對角矩陣且矩陣的對角元素即為 A 分別對應到 Q 的特徵值

(%o6) $\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

(e) $V=P_2(R)$, $T(f(x))=xf'(x)+f(2)x+f(3)$

(%i1) A:matrix([1,1,0],[3,3,0],[9,4,2]);　//定義一矩陣，矩陣名稱叫做 A，第一列的元素有 1, 1, 0，第二列的元素有 3, 3, 0，第三列的元素有 9, 4, 2

(%o1) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 9 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

(%i2) eigenvalues(A);　特徵值的指令：eigenvalue(矩陣)，結果中會出現 2 個 list，第一個 list 中是真正的特徵值，而第二個 list 則是代表每個特徵值的幾何重數，也就是每個特徵值對應的特徵向量空間之維度　//計算 A 之特徵值，真正的特徵值是放在結果的第一個 list 中，也就是 0，2，4，而第二個 list 代表每個特徵值的幾何重數，也就是每個特徵值對應的特徵向量空間之維度

(%o2) [[0,2,4],[1,1,1]]

(%i3) eigenvectors(A);　我們也可以用 eigenvector 計算特徵向量，事實上，eigenvector 也會把特徵值列出來，所以是包含前面 eigenvalues 功能的指令。特徵向量指令：eigenvector(矩陣)，第一部分和 eigenvalues 輸出一樣，這些向量會

$\boxed{\text{生成相對應特徵值的向量空間}}$　//第一部分和 eigenvalues 輸出一樣，對於特徵值 0 有一個對應的特徵向量[1,-1,-$\frac{5}{2}$]，而特徵值 2 對應到的特徵向量爲[0, 0, 1]，特徵值 4 對應到的特徵向量爲[1, 3, $\frac{21}{2}$]

(%o3) $[[[0,2,4],[1,1,1]],[1,-1,-\frac{5}{2}],[0,0,1],[1,3,\frac{21}{2}]]$

(%i4) Q:matrix([1,0,1],[-1,0,3],[-5/2,1,21/2]);　//取 Q 爲所有特徵向量爲行之矩陣，矩陣名稱定爲 Q，第一列的元素有 1, 0, 1，第二列的元素有-1, 0, 3，第三列的元素有-$\frac{5}{2}$, 1, $\frac{21}{2}$

(%o4) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -\frac{5}{2} & 1 & \frac{21}{2} \end{bmatrix}$

(%i5) invert(Q).A.Q;　//求 $Q^{-1}AQ$，爲一對角矩陣且矩陣的對角元素即爲 A 分別對應到 Q 的特徵值　$\boxed{\text{反矩陣的指令爲 invert(矩陣)}}$

(%o5) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

(f) $V=P_3(R)$，$T(f(x))=f(x)+f(2)x$

(%i1) A:matrix([1,1,0,0],[0,3,0,0],[0,4,1,0],[0,8,0,1]);　//定義一矩陣，矩陣名稱叫做 A，第一列的元素有 1, 1, 0, 0，第二列的元素有 0, 3, 0, 0，第三列的元素有 0, 4, 1,

0，第四列的元素有 0, 8, 0, 1

(%o1) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(%i2) eigenvalues(A); 特徵值的指令：eigenvalue(矩陣)，結果中會出現 2 個 list，第一個 list 中是真正的特徵值，而第二個 list 則是代表每個特徵值的幾何重數，也就是每個特徵值對應的特徵向量空間之維度 //計算 A 之特徵值，真正的特徵值是放在結果的第一個 list 中，也就是 1 跟 3，而第二個 list 代表每個特徵值的幾何重數，也就是每個特徵值對應的特徵向量空間之維度

(%o2) [[1,3],[3,1]]

(%i3) eigenvectors(A); 我們也可以用 eigenvector 計算特徵向量，事實上，eigenvector 也會把特徵值列出來，所以是包含前面 eigenvalues 功能的指令。特徵向量指令：eigenvector(矩陣)，第一部分和 eigenvalues 輸出一樣，這些向量會生成相對應特徵值的向量空間 //第一部分和 eigenvalues 輸出一樣，對於特徵值 1 有 3 個對應的特徵向量[1,0, 0, 0]，[0, 0, 1, 0]，[0, 0, 0, 1]，而特徵值 3 對應到的特徵向量爲[1, 2, 4, 8]

(%o3) [[[1,3],[3,1]],[1,0,0,0],[0,0,1,0],[0,0,0,1],[1,2,4,8]]

(%i4) Q:matrix([1,0,0,1],[0,0,0,2],[0,1,0,4],[0,0,1,8]); //取 Q 爲所有特徵向量爲行之矩陣，矩陣名稱定爲 Q，第一列的元素有 1, 0, 0, 1，第二列的元素有 0, 0, 0, 2，第三列的元素有 0, 1, 0, 4，第四列的元素有 0, 0, 1, 8

(%o4) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

(%i5) invert(Q).A.Q;　//求 $Q^{-1}AQ$，為一對角矩陣且矩陣的對角元素即為 A 分別對應到 Q 的特徵值　反矩陣的指令為 invert(矩陣)

$$(\%o5)\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(g) $V=P_3(R)$，$T(f(x))=x f'(x)+ f''(x)-f(2)$

(h) $V=M_{2\times 2}(R)$，$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix}$

(%i1) A:matrix([0,0,0,1],[0,0,1,0],[0,1,0,0],[1,0,0,0]);　//定義一矩陣，矩陣名稱叫做 A，第一列的元素有 0, ,0, 0, 1，第二列的元素有 0, 0, 1, 0，第三列的元素有 0, 1, 0, 0，第四列的元素有 1, 0, 0, 0

$$(\%o1)\quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(%i2) eigenvalues(A);　特徵值的指令：eigenvalue(矩陣)，結果中會出現 2 個 list，第一個 list 中是真正的特徵值，而第二個 list 則是代表每個特徵值的幾何重數，也就是每個特徵值對應的特徵向量空間之維度　//計算 A 之特徵值，真正的特徵值是放在結果的第一個 list 中，也就是-1 跟 1，而第二個 list 代表每個特徵值的幾何重數，也就是每個特徵值對應的特徵向量空間之維度

(%o2) [[-1,1],[2,2]]

(%i3) eigenvectors(A);　我們也可以用 eigenvector 計算特徵向量，事實上，eigenvector 也會把特徵值列出來，所以是包含前面 eigenvalues 功能的指令。特徵向量指令：eigenvector(矩陣)，第一部分和 eigenvalues 輸出一樣，這些向量會生成相對應特徵值的向量空間　//第一部分和 eigenvalues 輸出一樣，對於特徵值 -1 有 2 個對應的特徵向量[1, 0, 0, -1]、[0, 1, -1, 0]，而特徵值 1 對應到的特徵向量

爲[1, 0, 0, 0, 1]、[0, 1, 1, 0]

(%o3) [[[-1,1],[2,2]],[1,0,0,-1],[0,1,-1,0],[1,0,0,1],[0,1,1,0]]

(%i4) Q:matrix([1,0,1,0],[0,1,0,1],[0,-1,0,1],[-1,0,1,0]); //取 Q 爲所有特徵向量爲行之矩陣，矩陣名稱定爲 Q，第一列的元素有 1, 0, 1, 0，第二列的元素有 0, 1, 0, 1，第三列的元素有 0, -1, 0, 1，第四列的元素有-1, 0, 1, 0

(%o4) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(%i5) invert(Q).A.Q; 反矩陣的指令爲 invert(矩陣) //求 $Q^{-1}AQ$，爲一對角矩陣且矩陣的對角元素即爲 A 分別對應到 Q 的特徵值

(%o5) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(i) $V=M_{2\times2}(R)$，$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c & b \\ a & d \end{pmatrix}$

(%i1) A:matrix([0,1,0,0],[1,0,0,0],[0,0,0,1],[0,0,1,0]); //定義一矩陣，矩陣名稱叫做 A，第一列的元素有 0, 1, 0, 0，第二列的元素有 1, 0, 0, 0，第三列的元素有 0, 0, 0, 1，第四列的元素有 0, 0, 1, 0

(%o1) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(%i2) eigenvalues(A); 特徵值的指令：eigenvalue(矩陣)，結果中會出現 2 個 list，第一個 list 中是真正的特徵值，而第二個 list 則是代表每個特徵值的幾何重數，

也就是每個特徵值對應的特徵向量空間之維度　//計算 A 之特徵值，真正的特徵值是放在結果的第一個 list 中，也就是-1 跟 1，而第二個 list 代表每個特徵值的幾何重數，也就是每個特徵值對應的特徵向量空間之維度

(%o2) [[-1,1],[2,2]]

(%i3) eigenvectors(A);　我們也可以用 eigenvector 計算特徵向量，事實上，eigenvector 也會把特徵值列出來，所以是包含前面 eigenvalues 功能的指令。特徵向量指令：eigenvector(矩陣)，第一部分和 eigenvalues 輸出一樣，這些向量會生成相對應特徵值的向量空間　//第一部分和 eigenvalues 輸出一樣，對於特徵值-1 有 2 個對應的特徵向量[1, -1, 0, 0]、[0, 0, 1, -1]，而特徵值 1 對應到的特徵向量爲[1, 1, 0, 0]、[0, 0, 1, 1]

(%o3) [[[-1,1],[2,2]],[1,-1,0,0],[0,0,1,-1],[1,1,0,0],[0,0,1,1]]

(%i4) Q:matrix([1,0,1,0],[-1,0,1,0],[0,1,0,1],[0,-1,0,1]);　//取 Q 爲所有特徵向量爲行之矩陣，矩陣名稱定爲 Q，第一列的元素有 1, 0, 1, 0，第二列的元素有-1, 0, 1, 0，第三列的元素有 0, 1, 0, 1，第四列的元素有 0, -1, 0, 1

(%o4) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(%i5) invert(Q).A.Q;　反矩陣的指令爲 invert(矩陣)　//求 $Q^{-1}AQ$，爲一對角矩陣且矩陣的對角元素即爲 A 分別對應到 Q 的特徵值

(%o5) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(j) $V=M_{2\times2}(R)$，$T(A)=A^t+2\bullet tr(A)\bullet I_2$

(%i1) A:matrix([3,0,0,2],[0,0,1,0],[0,1,0,0],[2,0,0,3]);　//定義一矩陣，矩陣名稱叫做 A，第一列的元素有 3, 0, 0, 2，第二列的元素有 0, 0, 1, 0，第三列的元素有 0, 1, 0,

0，第四列的元素有 2, 0, 0, 3

$$(\%o1)\quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(%i2) eigenvalues(A); 特徵值的指令：eigenvalue(矩陣)，結果中會出現 2 個 list，第一個 list 中是真正的特徵值，而第二個 list 則是代表每個特徵值的幾何重數，也就是每個特徵值對應的特徵向量空間之維度 //計算 A 之特徵值，真正的特徵值是放在結果的第一個 list 中，也就是 5、-1、1，而第二個 list 代表每個特徵值的幾何重數，也就是每個特徵值對應的特徵向量空間之維度

(%o2) [[5,-1,1],[1,1,2]]

(%i3) eigenvectors(A); 我們也可以用 eigenvector 計算特徵向量，事實上，eigenvector 也會把特徵值列出來，所以是包含前面 eigenvalues 功能的指令。特徵向量指令：eigenvector(矩陣)，第一部分和 eigenvalues 輸出一樣，這些向量會生成相對應特徵值的向量空間 //第一部分和 eigenvalues 輸出一樣，對於特徵值 5 有一個對應的特徵向量[1, 0, 0, 1]，而特徵值-1 對應到的特徵向量爲[0, 1, -1, 0]，特徵值 1 對應到的特徵向量爲[1, 0, 0, -1]、[0, 1, 1, 0]

(%o3) [[[5,-1,1],[1,1,2]],[1,0,0,1],[0,1,-1,0],[1,0,0,-1],[0,1,1,0]]

(%i4) Q:matrix([1,0,1,0],[0,1,0,1],[0,-1,0,1],[1,0,-1,0]); //取 Q 爲所有特徵向量爲行之矩陣，矩陣名稱定爲 Q，第一列的元素有 1, 0, 1, 0，第二列的元素有 0, 1, 0, 1，第三列的元素有 0, -1, 0, 1，第四列的元素有 1, 0, -1, 0

$$(\%o4)\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

(%i5) invert(Q).A.Q; 反矩陣的指令為 invert(矩陣) //求 $Q^{-1}AQ$，為一對角矩陣且矩陣的對角元素即為 A 分別對應到 Q 的特徵值

(%o5) $$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5.2 可對角化性

2.給定下列各矩陣 $A \in M_{n\times n}(R)$， 判別 A 的可對角化性，且若 A 為可對角化，試求矩陣 Q 及一對角矩陣 D 使得 $Q^{-1}AQ=D$

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(%i1) A:matrix([1,2],[0,1]); //定義一矩陣，矩陣名稱叫作 A，第一列元素有 1, 2，第二列元素有 0, 1

(%o1) $$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(%i2) eigenvalues(A); 特徵值的指令：eigenvalue(矩陣)，結果中會出現 2 個 list，第一個 list 中是真正的特徵值，而第二個 list 則是代表每個特徵值的幾何重數，也就是每個特徵值對應的特徵向量空間之維度 //計算 A 之特徵值，真正的特徵值是放在結果的第一個 list 中，也就是 1，而第二個 list 代表每個特徵值的幾何重數，也就是每個特徵值對應的特徵向量空間之維度

(%o2) [[1],[2]]

(%i3) rank(A); //計算矩陣 A 之秩 秩的指令：rank(矩陣)

(%o3) 2

(%i4) f:charpoly(A,t); 特徵多項式指令：charpoly(矩陣，變數) //求 A 的特徵多項式，特徵多項式名稱定為 f，f 內的變數為 t

(%o4) $(1-t)^2$

(%i5) B:matrix([1,2],[0,1])-matrix([1,0],[0,1]); //對 A 的特徵值 1，求矩陣 B 爲 A-1*I

$$(\%o5)\quad \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(%i6) rank(B); //計算 rank(A-1*I)

(%o6) 1

(%i7) rank(A)-rank(B); //對 A 的特徵值 1，1 的相重數不等於 2-rank(A-1*I)，因此不可對角化

(%o7) 1

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

(%i1) A:matrix([1,3],[3,1]); //定義一矩陣，矩陣名稱叫作 A，第一列元素有 1, 3，第二列元素有 3, 1

$$(\%o1)\quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

(%i2) eigenvalues(A); 特徵值的指令：eigenvalue(矩陣)，結果中會出現 2 個 list，第一個 list 中是真正的特徵值，而第二個 list 則是代表每個特徵值的幾何重數，也就是每個特徵值對應的特徵向量空間之維度 //計算 A 之特徵值，真正的特徵值是放在結果的第一個 list 中，也就是-2、4，而第二個 list 代表每個特徵值的幾何重數，也就是每個特徵值對應的特徵向量空間之維度

(%o2) [[-2,4],[1,1]]

(%i3) eigenvectors(A); 我們也可以用 eigenvector 計算特徵向量，事實上，eigenvector 也會把特徵值列出來，所以是包含前面 eigenvalues 功能的指令。特徵向量指令：eigenvector(矩陣)，第一部分和 eigenvalues 輸出一樣，這些向量會生成相對應特徵值的向量空間 //第一部分和 eigenvalues 輸出一樣，對於特徵值 -2 有一個對應的特徵向量[1,-1]，而特徵值 4 對應到的特徵向量爲[1, 1]

(%o3) [[[-2,4],[1,1]],[1,-1],[1,1]]

(%i4) Q:matrix([1,1],[-1,1]); //取 Q 爲所有特徵向量爲行之矩陣，矩陣名稱定爲 Q，第一列的元素有 1, 1，第二列的元素有-1, 1

$$(\%o4) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(%i5) invert(Q).A.Q; 反矩陣的指令爲 invert(矩陣) //求 $Q^{-1}AQ$，爲一對角矩陣且矩陣的對角元素即爲 A 分別對應到 Q 的特徵值

$$(\%o5) \quad \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

(%i1) A:matrix([1,4],[3,2]); //定義一矩陣，矩陣名稱叫做 A，第一列的元素有 1, 4，第二列的元素有 3, 2

$$(\%o1) \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

(%i2) rank(A); //計算矩陣 A 之秩 秩的指令：rank(矩陣)

(%o2) 2

(%i3) f:charpoly(A,t); 特徵多項式指令：charpoly(矩陣，變數) //求 A 的特徵多項式，特徵多項式名稱定爲 f，f 內的變數爲 t

(%o3) $(1-t)(2-t)-12$

(%i4) factor(f); 多項式分解指令：factor(多項式) //將特徵多項式分解，可以清楚看到 A 有幾個特徵值和各特徵值的代數重數

(%o4) $(t-5)(t+2)$

(%i5) eigenvectors(A); 我們也可以用 eigenvector 計算特徵向量，事實上，eigenvector 也會把特徵值列出來，所以是包含前面 eigenvalues 功能的指令。特徵向量指令：eigenvector(矩陣)，第一部分和 eigenvalues 輸出一樣，這些向量會生成相對應特徵值的向量空間 //第一部分和 eigenvalues 輸出一樣，對於特徵-2

有一個對應的特徵向量[1,-$\frac{3}{4}$]，而特徵值 5 對應到的特徵向量為[1, 1]

(%o5) $[[[-2,5],[1,1]],[1,-\frac{3}{4}],[1,1]]$

(%i6) Q:matrix([1,1],[-3/4,1]);　//取 Q 為所有特徵向量為行之矩陣，矩陣名稱定為 Q，第一列的元素有 1, 1，第二列的元素有-$\frac{3}{4}$, 1

(%o6) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix}$

(%i7) invert(Q).A.Q;　反矩陣的指令為 invert(矩陣)　//求 $Q^{-1}AQ$，為一對角矩陣且矩陣的對角元素即為 A 分別對應到 Q 的特徵值

(%o7) $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 7 & -4 & 0 \\ 8 & -5 & 0 \\ 6 & -6 & 3 \end{pmatrix}$

(%i1) A:matrix([7,-4,0],[8,-5,0],[6,-6,3]);　//定義一矩陣，矩陣名稱叫做 A，第一列的元素有 7, -4, 0，第二列的元素有 8, -5, 0，第三列的元素有 6, -6, 3

(%o1) $\begin{bmatrix} 7 & -4 & 0 \\ 8 & -5 & 0 \\ 6 & -6 & 3 \end{bmatrix}$

(%i2) rank(A);　//計算矩陣 A 之秩　秩的指令：rank(矩陣)

(%o2) 3

(%i3) f:charpoly(A,t); 特徵多項式指令：charpoly(矩陣，變數) //求 A 的特徵多項式，特徵多項式名稱定爲 f，f 內的變數爲 t

(%o3) $(-t-5)(3-t)(7-t)+32(3-t)$

(%i4) factor(f); 多項式分解指令：factor(多項式) //將特徵多項式分解，可以清楚看到 A 有幾個特徵值和各特徵值的代數重數

(%o4) $-(t-3)^2(t+1)$

(%i5) eigenvectors(A); 我們也可以用 eigenvector 計算特徵向量，事實上，eigenvector 也會把特徵值列出來，所以是包含前面 eigenvalues 功能的指令。特徵向量指令：eigenvector(矩陣)，第一部分和 eigenvalues 輸出一樣，這些向量會生成相對應特徵值的向量空間 //第一部分和 eigenvalues 輸出一樣，對於特徵值 3 有 2 個對應的特徵向量[1,1, 0]、[0, 0, 1]，而特徵值-1 對應到的特徵向量爲[1, 2, $\frac{3}{2}$]

(%o5) $[[[3,-1],[2,1]],[1,1,0],[0,0,1],[1,2,\frac{3}{2}]]$

(%i6) Q:matrix([1,0,1],[1,0,2],[0,1,3/2]); //取 Q 爲所有特徵向量爲行之矩陣，矩陣名稱定爲 Q，第一列的元素有 1, 0, 1，第二列的元素有 1, 0, 2，第三列的元素有 0, 1, $\frac{3}{2}$

(%o6) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$

(%i7) invert(Q).A.Q; 反矩陣的指令爲 invert(矩陣) //求 $Q^{-1}AQ$，爲一對角矩陣且矩陣的對角元素即爲 A 分別對應到 Q 的特徵值

(%o7) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(%i1) A:matrix([0,0,1],[1,0,-1],[0,1,1]); //定義一矩陣，矩陣名稱叫做 A，第一列的元素有 0, 0, 1，第二列的元素有 1, 0, -1，第三列的元素有 0, 1, 1

(%o1) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(%i2) rank(A); //計算矩陣 A 之秩 $\boxed{\text{秩的指令：rank(矩陣)}}$

(%o2) 3

(%i3) f:charpoly(A,t); $\boxed{\text{特徵多項式指令：charpoly(矩陣，變數)}}$ //求 A 的特徵多項式，特徵多項式名稱定為 f，f 內的變數為 t

(%o3) $1-t(1-(1-t)t)$

(%i4) factor(f); $\boxed{\text{多項式分解指令：factor(多項式)}}$ //將特徵多項式分解，可以清楚看到 A 有幾個特徵值和各特徵值的代數重數

(%o4) $-(t-1)\left(t^2+1\right)$

(f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(%i1) A:matrix([1,1,0],[0,1,2],[0,0,3]);　//定義一矩陣，矩陣名稱叫做 A，第一列的元素有 1, 1, 0，第二列的元素有 0, 1, 2，第三列的元素有 0, 0, 3

$$(\%o1)\quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(%i2) rank(A);　//計算矩陣 A 之秩　$\boxed{\text{秩的指令：rank(矩陣)}}$

(%o2) 3

(%i3) f:charpoly(A,t);　$\boxed{\text{特徵多項式指令：charpoly(矩陣，變數)}}$　//求 A 的特徵多項式，特徵多項式名稱定爲 f，f 內的變數爲 t

$$(\%o3)\quad (1-t)^2(3-t)$$

(%i4) factor(f);　$\boxed{\text{多項式分解指令：factor(多項式)}}$　//將特徵多項式分解，可以清楚看到 A 有幾個特徵值和各特徵值的代數重數

$$(\%o4)\quad -(t-3)(t-1)^2$$

$$\text{(g)}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(%i1) A:matrix([3,1,1],[2,4,2],[-1,-1,1]);　//定義一矩陣，矩陣名稱叫做 A，第一列的元素有 3, 1, 1，第二列的元素有 2, 4, 2，第三列的元素有-1, -1, 1

$$(\%o1)\quad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(%i2) rank(A);　//計算矩陣 A 之秩　$\boxed{\text{秩的指令：rank(矩陣)}}$

(%o2) 3

(%i3) f:charpoly(A,t);　$\boxed{\text{特徵多項式指令：charpoly(矩陣，變數)}}$　//求 A 的特徵多

項式，特徵多項式名稱定為 f，f 內的變數為 t

(%o3) $-t+((1-t)(4-t)+2)(3-t)-2(1-t)$

(%i4) factor(f); $\boxed{\text{多項式分解指令：factor(多項式)}}$ //將特徵多項式分解，可以清楚看到 A 有幾個特徵值和各特徵值的代數重數

(%o4) $-(t-4)(t-2)^2$

(%i5) eigenvectors(A); $\boxed{\text{我們也可以用 eigenvector 計算特徵向量，事實上，eigenvector 也會把特徵值列出來，所以是包含前面 eigenvalues 功能的指令。特徵向量指令：eigenvector(矩陣)，第一部分和 eigenvalues 輸出一樣，這些向量會生成相對應特徵值的向量空間}}$ //第一部分和 eigenvalues 輸出一樣，對於特徵值 4 有一個對應的特徵向量[1, 2, -1]，而特徵值 2 對應到的特徵向量為[1, 0, -1]、[0, 1, -1]

(%o5) [[[4,2],[1,2]],[1,2,-1],[1,0,-1],[0,1,-1]]

(%i6) Q:matrix([1,1,0],[2,0,1],[-1,-1,-1]); //取 Q 為所有特徵向量為行之矩陣，矩陣名稱定為 Q，第一列的元素有 1, 1, 0，第二列的元素有 2, 0, 1，第三列的元素有-1, -1, -1

(%o6) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

(%i7) invert(Q).A.Q; $\boxed{\text{反矩陣的指令為 invert(矩陣)}}$ //求 $Q^{-1}AQ$，為一對角矩陣且矩陣的對角元素即為 A 分別對應到 Q 的特徵值

(%o7) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

3.對下列定義在向量空間 V 上的各線性算子 T，判別 T 的可對角化性，若 T 為可對角化，試求一組基底 β 使 $[T]_\beta$ 是對角矩陣

(a) $V=P_3(R)$ 且 T 定義為 $T(f(x))= f'(x)+ f''(x)$，其中 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 分別表示 f(x)

的第一及第二階導數

(%i1) A:matrix([0,1,2],[0,0,2],[0,0,0]); //定義一矩陣，矩陣名稱叫做 A，第一列的元素有 0, 1, 2，第二列的元素有 0, 0, 2，第三列的元素有 0, 0, 0

$$(\%o1) \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(%i2) rank(A); //計算矩陣 A 之秩 $\boxed{\text{秩的指令：rank(矩陣)}}$

(%o2) 2

(%i3) f:charpoly(A,t); $\boxed{\text{特徵多項式指令：charpoly(矩陣，變數)}}$ //求 A 的特徵多項式，特徵多項式名稱定爲 f，f 內的變數爲 t

$(\%o3) \quad -t^3$

(%i4) factor(f); $\boxed{\text{多項式分解指令：factor(多項式)}}$ //將特徵多項式分解，可以清楚看到 A 有幾個特徵值和各特徵值的代數重數可看出特徵值 0 有 3 重根，且 rank(A)=2，不可對角化

$(\%o4) \quad -t^3$

(b) $V=P_2(R)$且 T 定義爲 $T(ax^2+bx+c)=cx^2+bx+a$

(%i1) A:matrix([0,0,1],[0,1,0],[1,0,0]); //定義一矩陣，矩陣名稱叫做 A，第一列的元素有 0, 0, 1，第二列的元素有 0, 1, 0，第三列的元素有 1, 0, 0

$$(\%o1) \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(%i2) rank(A); //計算矩陣 A 之秩 $\boxed{\text{秩的指令：rank(矩陣)}}$

(%o2) 3

(%i3) f:charpoly(A,t); $\boxed{\text{特徵多項式指令：charpoly(矩陣，變數)}}$ //求 A 的特徵多項式，特徵多項式名稱定爲 f，f 內的變數爲 t

(%o3) $(1-t)t^2+t-1$

(%i4) factor(f); $\boxed{\text{多項式分解指令：factor(多項式)}}$ //將特徵多項式分解，可以清楚看到 A 有幾個特徵值和各特徵值的代數重數

(%o4) $-(t-1)^2(t+1)$

(%i5) eigenvalues(A); $\boxed{\text{特徵值的指令：eigenvalue(矩陣)，結果中會出現 2 個 list，第一個 list 中是真正的特徵值，而第二個 list 則是代表每個特徵值的幾何重數，也就是每個特徵值對應的特徵向量空間之維度}}$ //計算 A 之特徵值，真正的特徵值是放在結果的第一個 list 中，也就是-1 跟 1，而第二個 list 代表每個特徵值的幾何重數，也就是每個特徵值對應的特徵向量空間之維度

(%o5) [[-1, 1], [1, 2]]

(%i6) eigenvectors(A); $\boxed{\text{我們也可以用 eigenvector 計算特徵向量，事實上，eigenvector 也會把特徵值列出來，所以是包含前面 eigenvalues 功能的指令。特徵向量指令：eigenvector(矩陣)，第一部分和 eigenvalues 輸出一樣，這些向量會生成相對應特徵值的向量空間}}$ //第一部分和 eigenvalues 輸出一樣，對於特徵值 -1 有一個對應的特徵向量[1, 0, -1]，而特徵值 1 對應到的特徵向量爲[1, 0, 1]、[0, 1, 0]

(%o6) [[[-1, 1], [1, 2]], [1, 0, -1], [1, 0, 1], [0, 1, 0]]

(%i7) Q:matrix([1,1,0],[0,0,1],[-1,1,0]); //取 Q 爲所有特徵向量爲行之矩陣，矩陣名稱定爲 Q，第一列的元素有 1, 1, 0，第二列的元素有 0, 0, 1，第三列的元素有 -1, 1, 0

(%o7) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(%i8) invert(Q).A.Q; $\boxed{\text{反矩陣的指令爲 invert(矩陣)}}$ //求 $Q^{-1}AQ$，爲一對角矩陣且矩陣的對角元素即爲 A 分別對應到 Q 的特徵值

$$(\%o8)\quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(c) $V=R^3$ 且 T 定義爲 $T\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \\ 2a_3 \end{pmatrix}$

(%i1) A:matrix([0,1,0],[-1,0,0],[0,0,2]); //定義一矩陣，矩陣名稱叫做 A，第一列的元素有 0, 1, 0，第二列的元素有-1, 0, 0，第三列的元素有 0, 0, 2

$$(\%o1)\quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(%i2) rank(A); //計算矩陣 A 之秩 $\boxed{\text{秩的指令：rank(矩陣)}}$

(%o2) 3

(%i3) f:charpoly(A,t); $\boxed{\text{特徵多項式指令：charpoly(矩陣，變數)}}$ //求 A 的特徵多項式，特徵多項式名稱定爲 f，f 內的變數爲 t

(%o3) $(2-t)t^2-t+2$

(%i4) factor(f); $\boxed{\text{多項式分解指令：factor(多項式)}}$ //將特徵多項式分解，可以清楚看到 A 有幾個特徵值和各特徵值的代數重數

(%o4) $-(t-2)(t^2+1)$

(d) $V=P_2(R)$ 且 T 定義爲 $T(f(x))=f(0)+f(1)(x+x^2)$

(%i1) A:matrix([1,0,0],[1,1,1],[1,1,1]);　//定義一矩陣，矩陣名稱叫做 A，第一列的元素有 1, 0, 0，第二列的元素有 1, 1, 1，第三列的元素有 1, 1, 1

(%o1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(%i2) rank(A);　//計算矩陣 A 之秩　$\boxed{\text{秩的指令：rank(矩陣)}}$

(%o2) 2

(%i3) f:charpoly(A,t);　$\boxed{\text{特徵多項式指令：charpoly(矩陣，變數)}}$　//求 A 的特徵多項式，特徵多項式名稱定爲 f，f 內的變數爲 t

(%o3) $\left((1-t)^2-1\right)(1-t)$

(%i4) factor(f);　$\boxed{\text{多項式分解指令：factor(多項式)}}$　//將特徵多項式分解，可以清楚看到 A 有幾個特徵值和各特徵值的代數重數

(%o4) $-(t-2)(t-1)t$

(%i5) eigenvalues(A);　$\boxed{\text{特徵值的指令：eigenvalue(矩陣)，結果中會出現 2 個 list，第一個 list 中是真正的特徵值，而第二個 list 則是代表每個特徵值的幾何重數，也就是每個特徵值對應的特徵向量空間之維度}}$　//計算 A 之特徵值，真正的特徵值是放在結果的第一個 list 中，也就是 0、1、2，而第二個 list 代表每個特徵值的幾何重數，也就是每個特徵值對應的特徵向量空間之維度

(%o5) [[0,1,2],[1,1,1]]

(%i6) eigenvectors(A);　$\boxed{\text{我們也可以用 eigenvector 計算特徵向量，事實上，eigenvector 也會把特徵值列出來，所以是包含前面 eigenvalues 功能的指令。特徵向量指令：eigenvector(矩陣)，第一部分和 eigenvalues 輸出一樣，這些向量會生成相對應特徵值的向量空間}}$　//第一部分和 eigenvalues 輸出一樣，對於特徵值 0 有一個對應的特徵向量[0, 1, -1]，而特徵值 1 對應到的特徵向量爲[1, -1, -1]，特徵值 2 對應到的特徵向量爲[0, 1, 1]

(%o6) [[[0,1,2],[1,1,1]],[0,1,-1],[1,-1,-1],[0,1,1]]

(%i7) Q:matrix([0,1,0],[1,-1,1],[-1,-1,1]);　//取 Q 為所有特徵向量為行之矩陣，矩陣名稱定為 Q，第一列的元素有 0, 1, 0，第二列的元素有 1, -1, 1，第三列的元素有-1, -1, 1

$$(\%o7)\quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(%i8) invert(Q).A.Q;　$\boxed{\text{反矩陣的指令為 invert(矩陣)}}$　//求 $Q^{-1}AQ$，為一對角矩陣且矩陣的對角元素即為 A 分別對應到 Q 的特徵值

$$(\%o8)\quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(e) $V=C^2$ 且 T 定義為 T(z,w)=(z+iw, iz+w)

(%i1) A:matrix([1,%i],[%i,1]);　//定義一矩陣，矩陣名稱叫做 A，第一列的元素有 1, i，第二列的元素有 i, 1

$$(\%o1)\quad \begin{bmatrix} 1 & \%i \\ \%i & 1 \end{bmatrix}$$

(%i2) rank(A); //計算矩陣 A 之秩　$\boxed{\text{秩的指令：rank(矩陣)}}$

(%o2)　2

(%i3) f:charpoly(A,t);　$\boxed{\text{特徵多項式指令：charpoly(矩陣，變數)}}$　//求 A 的特徵多項式，特徵多項式名稱定為 f，f 內的變數為 t

$$(\%o3)\quad (1-t)^2+1$$

(%i4) factor(f);　$\boxed{\text{多項式分解指令：factor(多項式)}}$　//將特徵多項式分解，可以清楚看到 A 有幾個特徵值和各特徵值的代數重數

$$(\%o4)\quad t^2-2t+2$$

(%i5) eigenvalues(A); $\boxed{\text{特徵值的指令：eigenvalue(矩陣)，結果中會出現 2 個 list，第一個 list 中是真正的特徵值，而第二個 list 則是代表每個特徵值的幾何重數，也就是每個特徵值對應的特徵向量空間之維度}}$ //計算 A 之特徵值，真正的特徵值是放在結果的第一個 list 中，也就是 1-i 跟 1+i，而第二個 list 代表每個特徵值的幾何重數，也就是每個特徵值對應的特徵向量空間之維度

(%o5) [[1 - %i , %i + 1] , [1 , 1]]

(%i6) eigenvectors(A); $\boxed{\text{我們也可以用 eigenvector 計算特徵向量，事實上，eigenvector 也會把特徵值列出來，所以是包含前面 eigenvalues 功能的指令。特徵向量指令：eigenvector(矩陣)，第一部分和 eigenvalues 輸出一樣，這些向量會生成相對應特徵值的向量空間}}$ //第一部分和 eigenvalues 輸出一樣，對於特徵值 1-i 有一個對應的特徵向量[1,-1]，而特徵值 1+i 對應到的特徵向量爲[1, 1]

(%o6) [[[1 - %i , %i + 1] , [1 , 1]] , [1 , - 1] , [1 , 1]]

(%i7) Q:matrix([1,1],[-1,1]); //取 Q 爲所有特徵向量爲行之矩陣，矩陣名稱定爲 Q，第一列的元素有 1, 1，第二列的元素有-1, 1

(%o7) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

(%i8) invert(Q).A.Q; $\boxed{\text{反矩陣的指令爲 invert(矩陣)}}$ //求 $Q^{-1}AQ$，爲一對角矩陣且矩陣的對角元素即爲 A 分別對應到 Q 的特徵值

(%o8) $\begin{bmatrix} \frac{1-\%i}{2}-\frac{\%i-1}{2} & 0 \\ \frac{\%i-1}{2}+\frac{1-\%i}{2} & \%i+1 \end{bmatrix}$

(f) $V=M_{2\times 2}(R)$且定義爲 $T(A)=A^t$

(%i1) A:matrix([1,0,0,0],[0,0,1,0],[0,1,0,0],[0,0,0,1]); //定義一矩陣，矩陣名稱叫做 A，第一列的元素有 1, 0, 0, 0，第二列的元素有 0, 0, 1, 0，第三列的元素有 0, 1, 0, 0，第四列的元素有 0, 0, 0, 1

(%i2) rank(A); //計算矩陣 A 之秩 $\boxed{\text{秩的指令：rank(矩陣)}}$

(%o2) 4

(%i3) f:charpoly(A,t); 特徵多項式指令：charpoly(矩陣，變數) //求 A 的特徵多項式，特徵多項式名稱定為 f，f 內的變數為 t

(%o3) $(1-t)\left((1-t)t^2+t-1\right)$

(%i4) factor(f); 多項式分解指令：factor(多項式) //將特徵多項式分解，可以清楚看到 A 有幾個特徵值和各特徵值的代數重數

(%o4) $(t-1)^3(t+1)$

(%i5) eigenvalues(A); 特徵值的指令：eigenvalue(矩陣)，結果中會出現 2 個 list，第一個 list 中是真正的特徵值，而第二個 list 則是代表每個特徵值的幾何重數，也就是每個特徵值對應的特徵向量空間之維度 //計算 A 之特徵值，真正的特徵值是放在結果的第一個 list 中，也就是-1 跟 1，而第二個 list 代表每個特徵值的幾何重數，也就是每個特徵值對應的特徵向量空間之維度

(%o5) [[-1,1],[1,3]]

(%i6) eigenvectors(A); 我們也可以用 eigenvector 計算特徵向量，事實上，eigenvector 也會把特徵值列出來，所以是包含前面 eigenvalues 功能的指令。特徵向量指令：eigenvector(矩陣)，第一部分和 eigenvalues 輸出一樣，這些向量會生成相對應特徵值的向量空間 //第一部分和 eigenvalues 輸出一樣，對於特徵值-1 有一個對應的特徵向量[0, 1, -1, 0]，而特徵值 1 對應到的特徵向量為[1, 0, 0, 0]、[0, 1, 1, 0]、[0, 0, 0, 1]

(%o6) [[[-1,1],[1,3]],[0,1,-1,0],[1,0,0,0],[0,1,1,0],[0,0,0,1]]

(%i7) Q:matrix([0,1,0,0],[1,0,1,0],[-1,0,1,0],[0,0,0,1]); //取 Q 為所有特徵向量為行之矩陣，矩陣名稱定為 Q，第一列的元素有 0, 1, 0, 0，第二列的元素有 1, 0, 1, 0，第三列的元素有-1, 0, 1, 0，第四列的元素有 0, 0, 0, 1

(%o7) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(%i8) invert(Q).A.Q; 反矩陣的指令爲 invert(矩陣) //求 $Q^{-1}AQ$，爲一對角矩陣且矩陣的對角元素即爲 A 分別對應到 Q 的特徵值

$$(\%o8)\quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7.若 $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(R)$，試求 A^n，n 爲任意正整數

(%i1) A:matrix([1,4],[2,3]); //定義一矩陣，矩陣名稱叫做 A，第一列的元素有 1, 4，第二列的元素有 2, 3

$$(\%o1)\quad \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(%i2) eigenvalues(A); 特徵值的指令：eigenvalue(矩陣)，結果中會出現 2 個 list，第一個 list 中是真正的特徵值，而第二個 list 則是代表每個特徵值的幾何重數，也就是每個特徵值對應的特徵向量空間之維度 //計算 A 之特徵值，真正的特徵值是放在結果的第一個 list 中，也就是 5 跟-1，而第二個 list 代表每個特徵值的幾何重數，也就是每個特徵值對應的特徵向量空間之維度

(%o2) [[5,-1],[1,1]]

(%i3) eigenvectors(A); 我們也可以用 eigenvector 計算特徵向量，事實上，eigenvector 也會把特徵值列出來，所以是包含前面 eigenvalues 功能的指令。特徵向量指令：eigenvector(矩陣)，第一部分和 eigenvalues 輸出一樣，這些向量會生成相對應特徵值的向量空間 //第一部分和 eigenvalues 輸出一樣，對於特徵值 5 有一個對應的特徵向量[1,1]，而特徵值-1 對應到的特徵向量爲$[1, -\frac{1}{2}]$

$$(\%o3)\quad [[[5,-1],[1,1]],[1,1],[1,-\frac{1}{2}]]$$

(%i4) Q:matrix([1,1],[1,-1/2]);　//取 Q 爲所有特徵向量爲行之矩陣，矩陣名稱定爲 Q，第一列的元素有 1, 1，第二列的元素有 1, $-\frac{1}{2}$

$$(\%o4)\quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(%i5) invert(Q).A.Q;　$\boxed{\text{反矩陣的指令爲 invert(矩陣)}}$　//求 $Q^{-1}AQ$，爲一對角矩陣且矩陣的對角元素即爲 A 分別對應到 Q 的特徵值

$$(\%o5)\quad \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(%i6) B:Q.matrix([5^n,0],[0,(-1)^n]);　//此矩陣名稱定爲 B，爲矩陣 Q 乘上對角矩陣 $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^n$

$$(\%o6)\quad \begin{bmatrix} 5^n & (-1)^n \\ 5^n & -\frac{(-1)^n}{2} \end{bmatrix}$$

(%i7) B.invert(Q);　//矩陣 B 乘上矩陣 Q 的反矩陣

$$(\%o7)\quad \begin{bmatrix} \frac{5^n}{3}+\frac{2(-1)^n}{3} & \frac{2\,5^n}{3}-\frac{2(-1)^n}{3} \\ \frac{5^n}{3}-\frac{(-1)^n}{3} & \frac{2\,5^n}{3}+\frac{(-1)^n}{3} \end{bmatrix}$$

14.求下列各微分方程組的通解

(a) $x' = x + y$

$y' = 3x - y$

(b) $x_1' = 8x_1 + 10x_2$

$x_2{}' = -5x_1 - 7x_2$

(c) $x_1{}' = x_1 + x_2$

$x_2{}' = x_2 + x_3$

$x_3{}' = 2x_3$

5.3 矩陣極限與馬爾可夫鏈

2.判定下列矩陣 A 的 $\lim_{m\to\infty} A^m$ 是否存在，若存在的話，試求之

(a) $\begin{pmatrix} 0.1 & 0.7 \\ 0.7 & 0.1 \end{pmatrix}$

(%i1) A:matrix([0.1,0.7],[0.7,0.1]); //定義一矩陣，矩陣名稱叫做 A，第一列的元素有 0.1, 0.7 ，第二列的元素有 0.7, 0.1

(%o1) $\begin{bmatrix} 0.1 & 0.7 \\ 0.7 & 0.1 \end{bmatrix}$

(%i2) eigenvalues(A); 特徵值的指令：eigenvalue(矩陣)，結果中會出現 2 個 list，第一個 list 中是真正的特徵值，而第二個 list 則是代表每個特徵值的幾何重數，也就是每個特徵值對應的特徵向量空間之維度，運算過程中 maxima 會運用 rat 將浮點數轉換爲分數型態 //計算 A 之特徵值，真正的特徵值是放在結果的第一個 list 中，也就是-$\frac{3}{5}$跟$\frac{4}{5}$，而第二個 list 代表每個特徵值的幾何重數，也就是每個特徵值對應的特徵向量空間之維度

```
rat: replaced -0.49 by -49/100 = -0.49
rat: replaced 0.1 by 1/10 = 0.1
```

(%o2) $[[-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}], [1, 1]]$

(%i3) eigenvectors(A); 我們也可以用 eigenvector 計算特徵向量，事實上，eigenvector 也會把特徵值列出來，所以是包含前面 eigenvalues 功能的指令。特徵向量指令：eigenvector(矩陣)，第一部分和 eigenvalues 輸出一樣，這些向量會生成相對應特徵值的向量空間 //第一部分和 eigenvalues 輸出一樣，對於特徵值

$-\frac{3}{5}$有一個對應的特徵向量[1,-1]，而特徵值$\frac{4}{5}$對應到的特徵向量爲[1, 1]

```
rat: replaced -0.49 by -49/100 = -0.49
rat: replaced 0.1 by 1/10 = 0.1
```

(%o3) $[[[-\frac{3}{5},\frac{4}{5}],[1,1]],[1,-1],[1,1]]$

(%i4) Q:matrix([1,1],[-1,1]); //取 Q 爲所有特徵向量爲行之矩陣，矩陣名稱定爲 Q，第一列的元素有 1, 1，第二列的元素有-1, 1

(%o4) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

(%i5) D:invert(Q).A.Q; $\boxed{\text{反矩陣的指令爲 invert(矩陣)}}$ //求 $Q^{-1}AQ$，矩陣名稱定爲 D 爲一對角矩陣且矩陣的對角元素即爲 A 分別對應到 Q 的特徵值

(%o5) $\begin{bmatrix} -0.6 & 0.0 \\ 0.0 & 0.8 \end{bmatrix}$

(%i6) Q.matrix([0,0],[0,0]).invert(Q); //求矩陣 Q 乘上$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$在乘上矩陣 Q 的反矩陣

(%o6) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(b)$\begin{pmatrix} -1.4 & 0.8 \\ -2.4 & 1.8 \end{pmatrix}$

(%i1) A:matrix([-1.4,0.8],[-2.4,1.8]); //定義一矩陣，矩陣名稱叫做 A，第一列的元素有-1.4, 0.8，第二列的元素有-2.4, 1.8

(%o1) $\begin{bmatrix} -1.4 & 0.8 \\ -2.4 & 1.8 \end{bmatrix}$

(%i2) f:charpoly(A,t); $\boxed{\text{特徵多項式指令：charpoly(矩陣，變數)}}$ //求 A 的特徵多項式，特徵多項式名稱定爲 f，f 內的變數爲 t

(%o2) $(-t-1.4)(1.8-t)+1.92$

(%i3) factor(f); $\boxed{\text{多項式分解指令：factor(多項式)}}$ //將特徵多項式分解，可以清楚看到 A 有幾個特徵值和各特徵值的代數重數

```
rat: replaced 1.92 by 48/25 = 1.92
rat: replaced -1.4 by -7/5 = -1.4
rat: replaced 1.8 by 9/5 = 1.8
```

(%o3) $\dfrac{(t-1)(5t+3)}{5}$

(%i5) eigenvalues(A); $\boxed{\text{特徵值的指令：eigenvalue(矩陣)，結果中會出現 2 個 list，第一個 list 中是真正的特徵值，而第二個 list 則是代表每個特徵值的幾何重數，也就是每個特徵值對應的特徵向量空間之維度}}$ //計算 A 之特徵值，真正的特徵值是放在結果的第一個 list 中，也就是-$\frac{3}{5}$跟 1，而第二個 list 代表每個特徵值的幾何重數，也就是每個特徵值對應的特徵向量空間之維度

```
rat: replaced 1.92 by 48/25 = 1.92
rat: replaced -1.4 by -7/5 = -1.4
rat: replaced 1.8 by 9/5 = 1.8
```

(%o5) $[[-\frac{3}{5}, 1], [1, 1]]$

(c) $\begin{pmatrix} 0.4 & 0.7 \\ 0.6 & 0.3 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} -1.8 & 4.8 \\ -0.8 & 2.2 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} 2.0 & -0.5 \\ 3.0 & -0.5 \end{pmatrix}$

(g) $\begin{pmatrix} -1.8 & 0 & -1.4 \\ -5.6 & 1 & -2.8 \\ 2.8 & 0 & 2.4 \end{pmatrix}$

(h) $\begin{pmatrix} 3.4 & -0.2 & 0.8 \\ 3.9 & 1.8 & 1.3 \\ -16.5 & -2.0 & -4.5 \end{pmatrix}$

(i) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}-2i & 4i & \frac{1}{2}+5i \\ 1+2i & -3i & -1-4i \\ -1-2i & 4i & 1+5i \end{pmatrix}$

(j) $\begin{pmatrix} \frac{-26+i}{3} & \frac{-28-4i}{3} & 28 \\ \frac{-7+2i}{3} & \frac{-5+i}{6} & 7-2i \\ \frac{-13+6i}{6} & \frac{-5+6i}{6} & \frac{35-20i}{6} \end{pmatrix}$

8.下列何者是正則轉移矩陣？

(a) $\begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.5 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 1 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0.2 \\ 0 & 0.3 & 0.8 \end{pmatrix}$

(g) $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(h) $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix}$

9.試求 8 中各矩陣 A 的 $\lim_{m\to\infty} A^m$(若它存在)

10.給定下列矩陣式某一種三狀態馬爾可夫鏈的正則轉移矩陣，各題的起始機率

向量是 P=$\begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.3 \\ 0.4 \end{pmatrix}$，對每一轉移矩陣，試求事物經二階段後在各狀態的比例，以及

在各狀態的最後比例，係決定其固定機率向量

(a) $\begin{pmatrix} 0.6 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.9 & 0.2 \\ 0.3 & 0 & 0.7 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.6 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.6 & 0.1 \\ 0 & 0.3 & 0.8 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.5 & 0.1 & 0.6 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} 0.6 & 0 & 0.4 \\ 0.2 & 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}$

5.4 不變子空間與 Cayley-Hamilton 定理

6.對在各向量空間 V 上的線性算子 T，求出由向量 z 生成之 T-循環子空間的一組有序基底

(a) $V=R^4$, T(a, b, c, d)=(a+b, b-c, a+c, a+d), 且 $z=e_1$

(b) $V=P_3(R)$, $T(f(x))=f''(x)$，且 $z=x^3$

(c) $V=M_{2\times2}(R)$，$T(A)=A^t$,且 $z=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $V=M_{2\times2}(R)$, $T(A)=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}A$, 且 $z=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$