Maxima 在線性代數上之應用

基本矩陣運算與線性方程組

國立屏東教育大學 應用數學系 研究助理 徐偉玲

weilinghsu@mail.npue.edu.tw

日期：2009/8/5

第三章 基本矩陣運算與線性方程組

3.1 基本矩陣運算與基本矩陣

3.利用定理 3.2 的証明，求下列各個基本矩陣的反矩陣

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

((%i1) A:matrix([0,0,1],[0,1,0],[1,0,0]);　//矩陣名稱定爲 A，矩陣第一列的元素有 0, 0, 1，第二列的元素有 0, 1, 0，第三列的元素有 1, 0, 0

(%o1) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(%i2) invert(A);　//求矩陣 A 的反矩陣，反矩陣的指令爲 invert(矩陣)

(%o2) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(%i1) A:matrix([1,0,0],[0,3,0],[0,0,1]);　//矩陣名稱定爲 A，矩陣第一列的元素有 1, 0, 0，第二列的元素有 0, 3, 0，第三列的元素有 0, 0, 1

(%o1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(%i2) invert(A); //求矩陣 A 的反矩陣

$$(\%o2)\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(%i1) A:matrix([1,0,0],[0,1,0],[-2,0,1]); //矩陣名稱定爲 A，矩陣第一列的元素有 1, 0, 0，第二列的元素有 0, 1, 0，第三列的元素有-2, 0, 1

$$(\%o1)\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(%i2) invert(A); //求矩陣 A 的反矩陣

$$(\%o2)\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.2 矩陣的秩與反矩陣

2.試求下列各矩陣的秩

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(%i1) A:matrix([1,1,0],[0,1,1],[1,1,0]); //矩陣名稱定爲 A，矩陣第一列的元素有 1, 1, 0，第二列的元素有 0, 1, 1，第三列的元素有 1, 1, 0

(%o1) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(%i2) rank(A);　//計算矩陣 A 的秩，求矩陣秩的指令為 rank(矩陣)

(%o2) 2

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(%i1) A:matrix([1,1,0],[2,1,1],[1,1,1]);　//矩陣名稱定為 A，矩陣第一列的元素有 1, 1, 0，第二列的元素有 2, 1, 1，第三列的元素有 1, 1, 1

(%o1) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(%i2) rank(A);　//求矩陣 A 的秩

(%o2) 3

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

(%i1) A:matrix([1,0,2],[1,1,4]);　//矩陣名稱定為 A，矩陣第一列的元素有 1, 0, 2，第二列的元素有 1, 1, 4

(%o1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

(%i2) rank(A);　//求矩陣 A 的秩

(%o2) 2

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

(%i1) A:matrix([1,2,1],[2,4,2]);　//矩陣名稱定爲 A，矩陣第一列的元素有 1, 2, 1，第二列的元素有 2, 4, 2

(%o1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

(%i2) rank(A);　//求矩陣 A 的秩

(%o2) 1

(e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(%i1) A:matrix([1,2,3,1,1],[1,4,0,1,2],[0,2,-3,0,1],[1,0,0,0,0]);　//矩陣名稱定爲 A，矩陣第一列的元素有 1, 2, 3, 1, 1，第二列的元素有 1, 4, 0, 1, 2，第三列的元素有 0, 2, -3, 0, 1，第四列的元素有 1, 0, 0, 0, 0

(%o1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(%i2) rank(A);　//求矩陣 A 的秩

(%o2) 3

(f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 2 & 5 & 1 \\ -4 & -8 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

(%i1) A:matrix([1,2,0,1,1],[2,4,1,3,0],[3,6,2,5,1],[-4,-8,1,-3,1]); //矩陣名稱定為 A，矩陣第一列的元素有 1, 2, 0, 1, 1，第二列的元素有 2, 4, 1, 3, 0，第三列的元素有 3, 6, 2, 5, 1，第四列元素有-4, -8, 1, -3, 1

$$(\%o1) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 2 & 5 & 1 \\ -4 & -8 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

(%i2) rank(A); //求矩陣 A 的秩

(%o2) 3

(g) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(%i1) A:matrix([1,1,0,1],[2,2,0,2],[1,1,0,1],[1,1,0,1]); //矩陣名稱定為 A，矩陣第一列的元素有 1, 1, 0, 1，第二列的元素有 2, 2, 0, 2，第三列的元素有 1, 1, 0, 1，第四列的元素有 1, 1, 0, 1

$$(\%o1) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(%i2) rank(A); //計算矩陣 A 的秩

(%o2) 1

4.利用基本列及行運算將下列各矩陣化成矩陣 D，滿足定理 3.6 的條件，再決定各矩陣的秩

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(%i1) A:matrix([1,1,1,2],[2,0,-1,2],[1,1,1,2]); //矩陣名稱定爲 A，矩陣第一列的元素有 1, 1, 1, 2，第二列的元素有 2, 0, -1, 2，第三列的元素有 1, 1, 1, 2

(%o1) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(%i2) rank(A); //計算矩陣 A 的秩

(%o2) 2

(b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(%i1) A:matrix([2,1],[-1,2],[2,1]); //矩陣名稱定爲 A，矩陣第一列的元素有 2, 1，第二列的元素有-1, 2，第三列的元素有 2, 1

(%o1) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

(%i2) rank(A); //計算矩陣 A 的秩

(%o2) 2

5.對下列各矩陣，試求其秩及反矩陣(如果它存在的話)

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(%i1) A:matrix([1,2],[1,1]); //矩陣名稱定爲 A，矩陣第一列的元素有 1, 2，第二列的元素有 1, 1

(%o1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(%i2) rank(A); //計算矩陣 A 的秩

(%o2) 2

(%i3) invert(A); //計算矩陣 A 的反矩陣

(%o3) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

(%i1) A:matrix([1,2],[2,4]); //矩陣名稱定爲 A，矩陣第一列的元素有 1, 2，第二列的元素有 2, 4

(%o1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

(%i2) rank(A); //計算矩陣 A 的秩

(%o2) 1

(%i3) invert(A); //求矩陣 A 的反矩陣 （但此題矩陣 A 沒有反矩陣）

```
Division by 0
 -- an error.  To debug this try debugmode(true);
```

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

(%i1) A:matrix([1,2,1],[1,3,4],[2,3,-1]); //矩陣名稱定爲 A，矩陣第一列的元素有 1, 2, 1，第二列的元素有 1, 3, 4，第三列的元素有 2, 3, -1

(%o1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

(%i2) rank(A);　//計算矩陣 A 的秩

(%o2)　2

(%i3) invert(A);　//求出矩陣 A 的反矩陣　（此題 A 也沒有反矩陣）

```
Division by 0
 -- an error.  To debug this try debugmode(true);
```

(d) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$

(%i1) A:matrix([0,-2,4],[1,1,-1],[2,4,-5]);　//矩陣名稱定爲 A，矩陣第一列的元素有 0, -2, 4，第二列的元素有 1, 1, -1，第三列的元素有 2, 4, -5

(%o1) $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -5 \end{bmatrix}$

(%i2) rank(A);　//計算矩陣 A 的秩

(%o2)　3

(%i3) invert(A);　　//求矩陣 A 的反矩陣

(%o3) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 3 & -1 \\ \frac{3}{2} & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(%i1) A:matrix([1,2,1],[-1,1,2],[1,0,1]);　//矩陣名稱定為 A，矩陣第一列的元素有 1, 2, 1，第二列的元素有-1, 1, 2，第三列的元素有 1, 0, 1

(%o1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(%i2) rank(A);　//計算矩陣 A 的秩

(%o2) 3

(%i3) invert(A);　//求矩陣 A 的反矩陣

(%o3) $\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(%i1) A:matrix([1,2,1],[1,0,1],[1,1,1]);　//矩陣名稱定為 A，矩陣第一列的元素有 1, 2, 1，第二列的元素有 1, 0, 1，第三列的元素有 1, 1, 1

(%o1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(%i2) rank(A);　//計算矩陣 A 的秩

(%o2) 2

(%i3) invert(A);　//求矩陣 A 的反矩陣　（此題矩陣 A 沒有反矩陣）

```
Division by 0
 -- an error.  To debug this try debugmode(true);
```

(g) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 5 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

(%i1) A:matrix([1,2,1,0],[2,5,5,1],[-2,-3,0,3],[3,4,-2,-3]);　//矩陣名稱定爲 A，矩陣第一列的元素有 1, 2, 1, 0，第二列的元素有 2, 5, 5, 1，第三列的元素有-2, -3, 0, 3，第四列的元素有 3, 4, -2, -3

(%o1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 5 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

(%i2) rank(A);　//計算矩陣 A 的秩

(%o2) 4

(%i3) invert(A);　//求矩陣 A 的反矩陣

(%o3) $\begin{bmatrix} -51 & 15 & 7 & 12 \\ 31 & -9 & -4 & -7 \\ -10 & 3 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(h) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

(%i1) A:matrix([1,0,1,1],[1,1,-1,2],[2,0,1,0],[0,-1,1,-3]);　//矩陣名稱定爲 A，矩陣第一列的元素有 1, 0, 1, 1，第二列的元素有 1, 1, -1, 2，第三列的元素有 2, 0, 1, 0，

第四列的元素有 0, -1, 1, -3

(%o1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

(%i2) rank(A); //計算矩陣 A 的秩

(%o2) 3

(%i3) invert(A); //求矩陣 A 的反矩陣（此題矩陣 A 沒有反矩陣）

```
Division by 0
 -- an error.  To debug this try debugmode(true);
```

6.對下列各線性變換 T，決定 T 是否可逆，並計算 T^{-1}（如果它存在的話）

(a) T：$P_2(R) \to P_2(R)$定義爲 $T(f(x))= f''(x)+2f'(x)- f(x)$

(%i1) T:matrix([-1,2,2],[0,-1,4],[0,0,-1]); //矩陣名稱定爲 T，矩陣第一列的元素有 -1, 2, 2，第二列的元素有 0, -1, 4，第三列的元素有 0, 0, -1

(%o1) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

(%i2) rank(T); //計算矩陣 T 的秩

(%o2) 3

(%i3) invert(T); //求矩陣 T 的反矩陣

(%o3) $\begin{bmatrix} -1 & -2 & -10 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

(b) T：$P_2(R) \to P_2(R)$定義為 $T(f(x))=(x+1)f'(x)$

(c) T：$R^3 \to R^3$定義為 $T(a_1, a_2, a_3)=(a_1+2a_2+a_3, -a_1+a_2+2a_3, a_1+a_3)$

(%i1) T:matrix([1,2,1],[-1,1,2],[1,0,1]); //矩陣名稱定為 T，矩陣第一列的元素有 1, 2, 1，第二列的元素有-1, 1, 2，第三列的元素有 1, 0, 1

$$(\%o1) \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(%i2) rank(T); //計算矩陣 T 的秩

(%o2) 3

(%i3) invert(T); //求矩陣 T 的反矩陣

$$(\%o3) \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(d) T：$R^3 \to P_2(R)$定義為 $T(a_1, a_2, a_3)=(a_1+a_2+a_3)\backslash+ (a_1-a_2+a_3)x+a_1x^2$

(%i1) T:matrix([1,1,1],[1,-1,1],[1,0,0]); //矩陣名稱定為 A，矩陣第一列的元素有 1, 1, 1，第二列的元素有 1, -1, 1，第三列的元素有 1, 0, 0

$$(\%o1) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(%i2) rank(T); //計算矩陣 T 的秩

(%o2) 3

(%i3) invert(T);　//求矩陣 T 的反矩陣

$$(\%o3)\quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

(e) T：$P_2(R) \rightarrow R^3$ 定義爲 T(f(x))=(f(-1), f(0), f(1))

(%i1) T:matrix([1,-1,1],[1,0,0],[1,1,1]);　//矩陣名稱定爲 T，矩陣第一列的元素有 1, -1, 1，第二列的元素有 1, 0, 0，第三列的元素有 1, 1, 1

$$(\%o1)\quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(%i2) rank(T);　//計算矩陣 T 的秩

(%o2)　3

(%i3) invert(T);　//求矩陣 T 的反矩陣

$$(\%o3)\quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(f) T：$M_{2\times 2}(R) \rightarrow R^4$ 定義爲 T(A)=(tr(A), tr(A^t), tr(EA), tr(AE))，其中 E=$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(%i1) T:matrix([1,0,0,1],[1,0,0,1],[0,1,1,0],[0,1,1,0]);　//矩陣名稱定爲 T，矩陣第一列的元素有 1,0, 0, 1，第二列的元素有 1, 0, 0, 1，第三列的元素有 0, 1, 1, 0，第四

冽的元素有 0, 1, 1, 0

(%o1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(%i2) rank(T); //計算矩陣 T 的秩

(%o2) 2

(%i3) invert(T); //求矩陣 T 的反矩陣（但此題矩陣 T 反矩陣不存在）

```
Division by 0
 -- an error.  To debug this try debugmode(true);
```

3.3 線性方程組－理論觀點

2.對下列各線性齊次方程組，試求其解集合的維度及一組基底

(a) $x_1+3x_2=0$

$2x_1+6x_2=0$

(%i1) solve([x1+3*x2=0,2*x1+6*x2=0],[x1,x2]); 解線性方程組的指令為 solve([方程式 1，方程式 2，…，方程式 n]，[未知數 1，未知數 2，…，未知數 n]) //這題方程式 1 為 $x_1+3x_2=0$，方程式 2 為 $2x_1+6x_2=0$，且方程式不需定義名稱，變數為 x1，x2，此題的結果兩個方程式為線性相依的，%r3 代表著任意數而 x2=%r3，則 x1=-3%r3

```
solve: dependent equations eliminated: (2)
```

(%o1) $[[x1=-3\ \%r3, x2=\%r3]]$

(b) $x_1+x_2-x_3=0$

$4x_1+x_2-2x_3=0$

(%i2) solve([x1+x2-x3=0,4*x1+x2-2*x3=0],[x1,x2,x3]); 解線性方程組的指令為 solve([方程式 1，方程式 2，…，方程式 n]，[未知數 1，未知數 2，…，未知數 n]) //這題的方程式 1 為 $x_1+x_2-x_3=0$，方程式 2 為 $4x_1+x_2-2x_3=0$，且方程式不需定義名稱，變數為 x1，x2，此題的結果%r6 代表著任意數而 x1，x2，x3 是相互影響的，x3=%r6，x2=$\frac{2}{3}$%r6，x1=$\frac{1}{3}$%r6

(%o2) $[[x1=\frac{\%r6}{3}, x2=\frac{2\ \%r6}{3}, x3=\%r6]]$

(c) $x_1+2x_2-x_3=0$

$2x_1+x_2+x_3=0$

(%i1) solve([x1+2*x2-x3=0,2*x1+x2+x3=0],[x1,x2,x3]); 解線性方程組的指令爲 solve([方程式 1，方程式 2，…，方程式 n]，[未知數 1，未知數 2，…，未知數 n]) //這題的方程式 1 爲 $x_1+2x_2-x_3=0$，方程式 2 爲 $2x_1+x_2+x_3=0$，且方程式不需定義名稱，變數爲 x1，x2，x3，此題的結果%r7 代表著任意數而 x1，x2，x3 是相互影響的，x3=%r7，x2=%r7，x1=-%r7

(%o1) $[[x1=-\%r7, x2=\%r7, x3=\%r7]]$

(d) $2x_1+x_2-x_3=0$

$x_1-x_2+x_3=0$

$x_1+2x_2-2x_3=0$

(%i1) eq1:2*x1+x2-x3=0; 由於這題方程式有 3 個，爲了好辨認，我們採用方程式給定名稱，最後再用 slove([方程式名稱]，[未知數])的方法來解題 //方程式 1 名稱定爲 eq1，方程式 1 爲 $2x_1+x_2-x_3=0$

(%o1) $-x3+x2+2\ x1=0$

(%i2) eq2:x1-x2+x3=0; //方程式 2 名稱定爲 eq2，方程式 2 爲 $x_1-x_2+x_3=0$

(%o2) $x3-x2+x1=0$

(%i3) eq3:x1+2*x2-2*x3=0; //方程式 3 名稱定爲 eq3，方程式 3 爲 $x_1+2x_2-2x_3=0$

(%o3) $-2\ x3+2\ x2+x1=0$

(%i4) solve([eq1,eq2,eq3],[x1,x2,x3]); //用 slove 解線性方程組 eq1，eq2，eq3 和未知數 x1，未知數 x2，未知數 x3，由於方程組爲線性相依，但可求出解集合，%r8 爲任意數，x3=%r8，x2=%r8，x1=0

solve: dependent equations eliminated: (3)

(%o4) $[[x1=0, x2=\%r8, x3=\%r8]]$

(e) $x_1+2x_2-3x_3+x_4=0$

(%i1) solve([x1+2*x2-3*x3+x4=0],[x1,x2,x3,x4]); 解線性方程組的指令爲 solve([方程式 1，方程式 2，…，方程式 n]，[未知數 1，未知數 2，…，未知數 n]) //方程式爲 $x_1+2x_2-3x_3+x_4=0$，未知數爲 x1，x2，x3，x4，求得的解%r9、%r10、%r11 爲任意數，可知 x1、x2、x3、x4 是相互影響的，x1=-%r9-2%r11+3%r10，x2=%r11，x3=%r10，x4=%r9

(%o1) [[$x1 = - \%r9 - 2\,\%r11 + 3\,\%r10$, $x2 = \%r11$, $x3 = \%r10$, $x4 = \%r9$]]

(f) $x_1+2x_2=0$

$x_1-x_2=0$

(%i1) solve([x1+2*x2=0,x1-x2=0],[x1,x2]); 解線性方程組的指令爲 solve([方程式 1，方程式 2，…，方程式 n]，[未知數 1，未知數 2，…，未知數 n]) //方程式 1 爲 $x_1+2x_2=0$，方程式 2 爲 $x_1-x_2=0$，未知數爲 x1，x2，求得的解爲 x1=0，x2=0

(%o1) [[$x1 = 0$, $x2 = 0$]]

(g) $x_1+2x_2+x_3+x_4=0$

$x_2-x_3+x_4=0$

(%i1) solve([x1+2*x2+x3+x4=0,x2-x3+x4=0],[x1,x2,x3,x4]); 解線性方程組的指令爲 solve([方程式 1，方程式 2，…，方程式 n]，[未知數 1，未知數 2，…，未知數 n]) //方程式 1 爲 $x_1+2x_2+x_3+x_4=0$，方程式 2 爲 $x_2-x_3+x_4=0$，未知數爲 x1，x2，x3，x4，求得的解%r12、%r13 爲任意數，可知 x1、x2、x3、x4 是相互影響的，x1=-%r12-3%r13，x2=%r13-%r12，x3=%r13，x4=%r12

(%o1) [[$x1 = \%r12 - 3\,\%r13$, $x2 = \%r13 - \%r12$, $x3 = \%r13$, $x4 = \%r12$]]

3.利用 2 的結果，試求下列方程組的所有解

(a) $x_1+3x_2=5$

$2x_1+6x_2=10$

(%i1) solve([x1+3*x2=5,2*x1+6*x2=10],[x1,x2]);

```
solve: dependent equations eliminated: (2)
```

(%o1) [[$x1 = 5 - 3\,\%r2$, $x2 = \%r2$]]

(b) $x_1+x_2-x_3=1$

$4x_1+x_2-2x_3=3$

(%i1) solve([x1+x2-x3=1,4*x1+x2-2*x3=3],[x1,x2,x3]);

(%o1) $[[x1=\frac{\%r4+2}{3}, x2=\frac{2\ \%r4+1}{3}, x3=\%r4]]$

(c) $x_1+2x_2-x_3=3$

$2x_1+x_2+x_3=6$

(%i1) solve([x1+2*x2-x3=3,2*x1+x2+x3=6],[x1,x2,x3]);

(%o1) $[[x1=3-\%r5, x2=\%r5, x3=\%r5]]$

(d) $2x_1+x_2-x_3=5$

$x_1-x_2+x_3=1$

$x_1+2x_2-2x_3=4$

(%i1) solve([2*x1+x2-x3=5,x1-x2+x3=1,x1+2*x2-2*x3=4],[x1,x2,x3]);

```
solve: dependent equations eliminated: (3)
```

(%o1) $[[x1=2, x2=\%r6+1, x3=\%r6]]$

(e) $x_1+2x_2-3x_3+x_4=1$

(%i1) solve([x1+2*x2-3*x3+x4=1],[x1,x2,x3,x4]);

(%o1) $[[x1=-2\ \%r9+3\ \%r8-\%r7+1, x2=\%r9, x3=\%r8, x4=\%r7]]$

(f) $x_1+2x_2=5$

$x_1-x_2=-1$

(%i1) solve([x1+2*x2-3*x3+x4=1],[x1,x2,x3,x4]);

(%o1) $[[x1=1, x2=2]]$

(g) $x_1+2x_2+x_3+x_4=1$

$x_2-x_3+x_4=1$

(%i1) solve([x1+2*x2+x3+x4=1,x2-x3+x4=1],[x1,x2,x3,x4]);

(%o1) $[[x1=-3\ \%r11+\%r10-1, x2=\%r11-\%r10+1, x3=\%r11, x4=\%r10]]$

4.對下面含有可逆係數矩陣 A 的線性方程組

(1)試用 A^{-1}

(2)利用 A^{-1} 來解下列方程組

(a) $x_1+3x_2=4$

$2x_1+5x_2=3$

(%i1) M:[x1+3*x2=4,2*x1+5*x2=3]$ 建立線性方程系統，指令：線性系統名稱：[方程式 1，方程式 2,…，方程式 n] //名稱系統名稱叫做 M，包含了方程式 1 爲 $x_1+3x_2=4$ 和方程式 2 爲 $2x_1+5x_2=3$，加上$是不把運算結果顯示出來

(%i2) A:coefmatrix(M,[x1,x2]); 將線性方程由代數形式轉換爲矩陣形式，所謂轉換，可以看作我們把方程式中的 x1、x2 隱藏，只留下係數，用 Maxima 的指令做轉換要使用 coefmatrix，指令：coefmatrix([線性系統名稱]，[未知數 1，…，未知數 n]) //運用 coefmatrix()，把方程式係數轉換爲矩陣，轉換後的矩陣名稱定爲 A

(%o2) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

(%i3) invert(A); //求矩陣 A 的反矩陣

(%o3) $\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

(%i4) invert(A).matrix([4,3]); //矩陣相乘用「.」，計算 $A^{-1}b$，b 爲方程組右邊的數字也把它轉換成矩陣形式，令 b 爲一矩陣第一列爲 4, 3，而此方程組恰有一解

(%o4) $\begin{bmatrix} -11 \\ 5 \end{bmatrix}$

(b) $x_1+2x_2-x_3=5$

$x_1+x_2+x_3=1$

$2x_1-2x_2+x_3=4$

(%i1) M:[x1+2*x2-x3=5,x1+x2+x3=1,2*x1-2*x2+x3=4]$ 建立線性方程系統，指令：線性系統名稱：[方程式 1，方程式 2,…，方程式 n] //名稱系統名稱叫做 M，包含了方程式 1 爲 $x_1+2x_2-x_3=5$ 和方程式 2 爲 $x_1+x_2+x_3=1$，方程式 3 爲 $2x_1-2x_2+x_3=4$，加上$是不把運算結果顯示出來

(%i2) A:coefmatrix(M,[x1,x2,x3]); 將線性方程由代數形式轉換爲矩陣形式，所謂轉換，可以看作我們把方程式中的 x1、x2、3 隱藏，只留下係數，用 Maxima 的指令做轉換要使用 coefmatrix，指令：coefmatrix([線性系統名稱]，[未知數

1，…，未知數 n]) //運用 coefmatrix()，把方程式係數轉換爲矩陣，轉換後的矩陣名稱定爲 A

(%o2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

(%i3) invert(A); //求矩陣 A 的反矩陣

(%o3) $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{9} \end{bmatrix}$

(%i4) invert(A).matrix([5,1,4]); //矩陣相乘用「.」，計算 $A^{-1}b$，b 爲方程組右邊的數字也把它轉換成矩陣形式，令 b 爲一矩陣第一列爲 5,1,4，而此方程組恰有一解

(%o4) $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$

6.令 T：$R^3 \to R^2$ 定義爲 T(a, b, c)=(a+b, 2a-c)，說明 $T^{-1}(1,11)$

7.決定下列線性方程組何者有解

(a) $x_1+x_2-x_3+2x_4=2$

$x_1+x_2+2x_3=1$

$2x_1+2x_2+x_3+2x_4=4$

(b) $x_1+x_2-x_3=1$

$2x_1+x_2+3x_3=2$

(%i1) solve([x1+x2-x3=1,2*x1+x2+3*x3=2],[x1,x2,x3]); 解線性方程組的指令爲 solve([方程式 1，方程式 2，…，方程式 n]，[未知數 1，未知數 2，…，未知數 n]) //方程式 1 爲 $x_1+x_2-x_3=1$，方程式 2 爲 $2x_1+x_2+3x_3=2$，未知數爲 x1，x2，x3，求得的解%r14 爲任意數，可知 x1、x2、x3 是相互影響的，x1=1-4%r14， x2=5%r14，x3=%r14

(%o1) $[[x1 = 1 - 4\ \%r14,\ x2 = 5\ \%r14,\ x3 = \%r14]]$

(c) $x_1+2x_2+3x_3=1$

$x_1+x_2-x_3=0$

$x_1+2x_2+x_3=3$

(%i1) eq1:x1+2*x2+3*x3=1; 解線性方程組，先建立好方程式 1，方程式 2，…，方程式 n，再用 solve([方程式 1 名稱，方程式 2 名稱，…，方程式 n 名稱]，[未知數 1，未知數 2，…，未知數 n])即可解線性方程組 //方程式 1 名稱定爲 eq1，方程式 1 爲 $x_1+2x_2+3x_3=1$

(%o1) $3\ x3 + 2\ x2 + x1 = 1$

(%i2) eq2:x1+x2-x3=0; //方程式 2 名稱定爲 eq2，方程式 2 爲 $x_1+x_2-x_3=0$

(%o2) $-x3 + x2 + x1 = 0$

(%i3) eq3:x1+2*x2+x3=3; //方程式 3 名稱定爲 eq3，方程式 3 爲 $x_1+2x_2+x_3=3$

(%o3) $x3 + 2\ x2 + x1 = 3$

(%i4) solve([eq1,eq2,eq3],[x1,x2,x3]); //解線性方程組得到 x1=-6，x2=5，x3=-1

(%o4) $[[x1 = -6,\ x2 = 5,\ x3 = -1]]$

(d) $x_1+x_2+3x_3-x_4=0$

$x_1+x_2+x_3+x_4=1$

$x_1-2x_2+x_3-x_4=1$

$4x_1+x_2+8x_3-x_4=0$

(%i1) eq1:x1+x2+3*x3-x4=0; //方程式 1 名稱定爲 eq1，方程式 1 爲 $x_1+x_2+3x_3-x_4=0$

(%o1) $-x4 + 3\ x3 + x2 + x1 = 0$

(%i2) eq2:x1+x2+x3+x4=1; //方程式 2 名稱定爲 eq2，方程式 2 爲 $x_1+x_2+x_3+x_4=1$

(%o2) $x4 + x3 + x2 + x1 = 1$

(%i3) eq3:x1-2*x2+x3-x4=1;　//方程式 3 名稱定爲 eq3，方程式 3 爲 $x_1-2x_2+x_3-x_4=1$

(%o3) $-x4+x3-2\,x2+x1=1$

(%i4) eq4:4*x1+x2+8*x3-x4=0;　//方程式 4 名稱定爲 eq4，方程式 4 爲 $4x_1+x_2+8x_3-x_4=0$

(%o4) $-x4+8\,x3+x2+4\,x1=0$

(%i5) solve([eq1,eq2,eq3,eq4],[x1,x2,x3,x4]);　解線性方程組，先建立好方程式 1，方程式 2，…，方程式 n，再用 solve([方程式 1 名稱，方程式 2 名稱，…，方程式 n 名稱]，[未知數 1，未知數 2，…，未知數 n])即可解線性方程組 //此題的解爲 x1=$\frac{25}{6}$，x2=$\frac{4}{3}$，x3=-$\frac{5}{2}$，x4=-2

(%o5) $[[x1=\frac{25}{6},\ x2=\frac{4}{3},\ x3=-\frac{5}{2},\ x4=-2]]$

(e) $x_1+2x_2-x_3=1$

$2x_1+x_2+2x_3=3$

$x_1-4x_2+7x_3=4$

3.4 線性方程組－計算觀點

2.利用高斯消去法解下列線性方程組

(a) $x_1+2x_2-x_3=-1$

$2x_1+2x_2+x_3=1$

$3x_1+5x_2-2x_3=-1$

(%i1) f1:x1+2*x2-x3=-1;f2:2*x1+2*x2+x3=1;f3:3*x1+5*x2-2*x3=-1;　//將方程式給定名稱，方程式 1：$x_1+2x_2-x_3=-1$ 的名稱爲 f1，方程式 2：$2x_1+2x_2+x_3=1$ 的名稱爲 f2，方程式 3：$3x_1+5x_2-2x_3=-1$ 的名稱爲 f3

(%o1) $-x3+2\,x2+x1=-1$

(%o2) $x3+2\,x2+2\,x1=1$

(%o3) $-2\,x3+5\,x2+3\,x1=-1$

(%i4) M:augcoefmatrix([f1,f2,f3],[x1,x2,x3]);　[f1,f2,f3]代表要轉換的線性方程，[x1,x2,x3]代表要轉換的變數名，希望也加入擴增矩陣是使用 augcoefmatrix()函數，Maxima 指令：augcoefmatrix([方程式名稱 1，…，方程式名稱 n]，[未知

數 1，…，未知數 n])　//方程組轉換後的增廣矩陣名稱定爲 M，方程式有 f1、f2、f3 而未知數有 x1、x2、x3

(%o4) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

augcoefmatrix 使用方式與 coefmatrix 相同，不同的地方就是使用 augcoefmatrix 做轉換的時後，會連擴增矩陣一起轉換，而 coefmatrix 且不會。這裡要注意一點，目前 augcoefmatrix 仍有 bug，注意擴增矩陣的地方，應該是(-1, 1, -1)，可是 maxima 卻跑出(1, -1, 1)，可以發現正負號相反，不過也可以想見，augcoefmatrix 應該還是 coefmatrix，只是用 augcoefmatrix 時會將等號右邊移到左邊再轉換，所以正負號會相反

(%i5) M:transpose(M);　//將矩陣 M 進行轉置，原本的列會變成行

(%o5) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

(%i6) M[4]:M[4]*(-1);　//把轉置後的 M 第 4 列乘上-1，M[4]代表著矩陣 M 的第 4 列

(%o6) [- 1 , 1 , - 1]

(%i7) M:transpose(M);　//最後再轉置回來，轉置矩陣 M，指令：transpose(矩陣)

(%o7) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

利用「高斯消去法」，首先就是把第一個元素化爲 1，然而題目給的時後，第一個元素就已經是 1 了，再看一次題目:

(%i8) M[2]:M[2]+M[1]*(-2)$M;　第二步我們將第二列(2,2,1,1)的第一個元素(2)，想辦法讓它變爲 0 ，爲方便講解，後面出現的 M[x], x 代表矩陣的第幾列，

例如 M[1]就代表矩陣的第一列(1 ,2,-1,-1)。接著繼續求解，我們要將 2 變成 0，就是加上-2，這樣 2-2=0，我們把 M[1]乘上-2 再加到 M[2]

$$(\%o9)\quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

(%i10) M[2]:M[2]*(-1/2)$M; M[2]就代表矩陣的第二列(0, -2, 3, 3)。接著，我們要將第二列第二個元素變成 1，於是把 M[2]乘上-$\frac{1}{2}$

$$(\%o11)\quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 3 & 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

(%i12) M[3]:M[3]+M[1]*(-3)$M; //M[3]就代表矩陣的第三列(3, 5, -2, -1)。接著繼續求解，我們要將 3 變成 0，就是加上-3，這樣 3-3=0，我們把 M[1]乘上-3 再加到 M[3]

$$(\%o13)\quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(%i14) M[3]:M[3]+M[2]*1$M; //M[3]就代表矩陣的第三列(0, -1, 1, 2)。接著繼續求解，我們要將-1 變成 0，就是加上 1，這樣 1-1=0，我們把 M[2]乘上 1 再加到 M[3]

(%o15) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(%i16) M[3]:M[3]*(-2)$M;　　//M[3]就代表矩陣的第三列(0, 0, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$)。接著，我們要將第三列第三個元素變成 1，於是把 M[3]乘上-2

(%o17) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

(%i18) M[1]:M[1]-2*M[2]$M;　　//M[1]就代表矩陣的第一列(1, 2, -1, -1)。接著繼續求解，我們要將 2 變成 0，就是加上-2，這樣 2-2=0，我們把 M[2]乘上-2 再加到 M[1]

(%o19) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

(%i20) M[1]:M[1]-M[3]*2$M;　　//M[1]就代表矩陣的第一列(1, 0, 2, 2)。接著繼續求解，我們要將 2 變成 0，就是加上-2，這樣 2-2=0，我們把 M[3]乘上-2 再加到 M[1]

(%o21) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

(%i22) M[2]:M[2]+M[3]*(3/2)$M;　// M[2]就代表矩陣的第二列(0, 1, $-\frac{3}{2}$, $-\frac{3}{2}$)。接著繼續求解，我們要將$-\frac{3}{2}$變成 0，就是加上$\frac{3}{2}$，這樣$-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}$=0，我們把 M[3]乘上$\frac{3}{2}$再加到 M[2]。做到此步驟即完成高斯消去法，最後是我們所要求的矩陣。

(%o23) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

(b) $x_1-2x_2-x_3=1$
$2x_1-3x_2+x_3=6$
$3x_1-5x_2=7$
$x_1+5x_3=9$

(%i1) f1:x1-2*x2-x3=1;f2:2*x1-3*x2+x3=6;f3:3*x1-5*x2=7;f4:x1+5*x3=9;　//將方程式給定名稱，方程式 1：$x_1-2x_2-x_3=1$ 的名稱爲 f1，方程式 2：$2x_1-3x_2+x_3=6$ 的名稱爲 f2，方程式 3：$3x_1-5x_2=7$ 的名稱爲 f3，方程式 4：$x_1+5x_3=9$ 的名稱爲 f4

(%o1) $-x3-2\,x2+x1=1$

(%o2) $x3-3\,x2+2\,x1=6$

(%o3) $3\,x1-5\,x2=7$

(%o4) $5\,x3+x1=9$

(%i5) M:augcoefmatrix([f1,f2,f3,f4],[x1,x2,x3]);　[f1,f2,f3,f4]代表要轉換的線性方程，[x1,x2,x3]代表要轉換的變數名，希望也加入擴增矩陣是使用 augcoefmatrix()函數，Maxima 指令：augcoefmatrix([方程式名稱 1，…，方程式名稱 n]，[未知數 1，…，未知數 n])　//方程組轉換後的增廣矩陣名稱定爲 M，方程式有 f1、f2、f3、f4 而未知數有 x1、x2、x3

(%o5) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & -6 \\ 3 & -5 & 0 & -7 \\ 1 & 0 & 5 & -9 \end{bmatrix}$

(%i6) M:transpose(M);　//將矩陣 M 進行轉置，原本的列會變成行

$$(\%o6)\quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & -5 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 5 \\ -1 & -6 & -7 & -9 \end{bmatrix}$$

(%i7) M[4]:M[4]*(-1);　//把轉置後的 M 第 4 列乘上-1，M[4]代表著矩陣 M 的第 4 列

(%o7)　[1, 6, 7, 9]

(%i8) M:transpose(M);　//最後再轉置回來，轉置矩陣 M，指令：transpose(矩陣)

$$(\%o8)\quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 6 \\ 3 & -5 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

(%i9) M[2]:M[2]+M[1]*(-2)$M;　利用「高斯消去法」，首先就是把第一個元素化為 1，然而題目給的時後，第一個元素就已經是 1 了，再看一次題目:第二步我們將第二列(2, -3, 1, 6)的第一個元素(2)，想辦法讓它變為 0 ，為方便講解，後面出現的 M[x], x 代表矩陣的第幾列，例如 M[1]就代表矩陣的第一列(1 , -2, -1, 1)。接著繼續求解，我們要將 2 變成 0，就是加上-2，這樣 2-2=0，我們把 M[1]乘上-2 再加到 M[2]

$$(\%o10)\quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & -5 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

(%i11) M[3]:M[3]+M[1]*(-3)$M;　//M[3]就代表矩陣的第三列(3, -5, 0, 7)。接著繼續求解，我們要將 3 變成 0，就是加上-3，這樣 3-3=0，我們把 M[1]乘上-3 再加

到 M[3]

(%o12) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 5 & 9 \end{bmatrix}$

(%i13) M[3]:M[3]+M[2]*(-1)$M;　//M[3]就代表矩陣的第三列(0, 1, 3, 4)。接著繼續求解，我們要將 1 變成 0，就是加上-1，這樣 1-1=0，我們把 M[2]乘上-1 再加到 M[3]

(%o14) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 9 \end{bmatrix}$

(%i15) M[4]:M[4]+M[1]*(-1)$M;　//M[4]就代表矩陣的第四列(1 , 0, 5, 9)。接著繼續求解，我們要將 1 變成 0，就是加上-1，這樣 1-1=0，我們把 M[1]乘上-1 再加到 M[4]

(%o16) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 8 \end{bmatrix}$

(%i17) M[4]:M[4]+M[2]*(-2)$M;　//M[4]就代表矩陣的第四列(0, 2, 6, 8)。接著繼續求解，我們要將 2 變成 0，就是加上-2，這樣 2-2=0，我們把 M[2]乘上-2 再加到 M[4]

(%o18) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(%i19) M[1]:M[1]+M[2]*2$M; //M[1]就代表矩陣的第一列(1 , 2, -1, 1)。接著繼續求解，我們要將-2 變成 0，就是加上 2，這樣 2-2=0，我們把 M[2]乘上 2 再加到 M[1]，作到此步驟已完成高斯消去法所要求的矩陣。

(%o20) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $x_1+2x_2+2x_4=6$

$3x_1+5x_2-x_3+6x_4=17$

$2x_1+4x_2+x_3+2x_4=12$

$2x_1-7x_3+11x_4=7$

(%i1)

f1:x1+2*x2+2*x4=6;f2:3*x1+5*x2-x3+6*x4=17;f3:2*x1+4*x2+x3+2*x4=12;f4:2*x1-7*x3+11*x4=7; //將方程式給定名稱，方程式 1：$x_1+2x_2+2x_4=6$ 的名稱爲 f1，方程式 2：$3x_1+5x_2-x_3+6x_4=17$ 的名稱爲 f2，方程式 3：$2x_1+4x_2+x_3+2x_4=12$ 的名稱爲 f3，方程式 4：$2x_1-7x_3+11x_4=7$ 的名稱爲 f4，

(%o1) $2\,x4+2\,x2+x1=6$

(%o2) $6\,x4-x3+5\,x2+3\,x1=17$

(%o3) $2\,x4+x3+4\,x2+2\,x1=12$

(%o4) $11\,x4-7\,x3+2\,x1=7$

(%i5) M:augcoefmatrix([f1,f2,f3,f4],[x1,x2,x3,x4]); [f1, f2, f3, f4]代表要轉換的線性方程，[x1, x2, x3, x4]代表要轉換的變數名，希望也加入擴增矩陣是使用 augcoefmatrix()函數，Maxima 指令：augcoefmatrix([方程式名稱 1，…，方程式名稱 n]，[未知數 1，…，未知數 n]) //方程組轉換後的增廣矩陣名稱定爲 M，方程式有 f1、f2、f3、f4 而未知數有 x1、x2、x3、x4

(%o5) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & -6 \\ 3 & 5 & -1 & 6 & -17 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & -12 \\ 2 & 0 & -7 & 11 & -7 \end{bmatrix}$

(%i6) M:transpose(M); //將矩陣 M 進行轉置，原本的列會變成行

$$(\%o6)\quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -7 \\ 2 & 6 & 2 & 11 \\ -6 & -17 & -12 & -7 \end{bmatrix}$$

(%i7) M[5]:M[5]*(-1);　//把轉置後的 M 第 5 列乘上-1，M[5]代表著矩陣 M 的第 5 列

(%o7) [6 , 17 , 12 , 7]

(%i8) M:transpose(M);　//最後再轉置回來，轉置矩陣 M，$\boxed{\text{指令：transpose(矩陣)}}$

$$(\%o8)\quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & -1 & 6 & 17 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 12 \\ 2 & 0 & -7 & 11 & 7 \end{bmatrix}$$

(%i9) M[2]:M[2]+M[1]*(-3)$M;　利用「高斯消去法」，首先就是把第一個元素化為 1，然而題目給的時後，第一個元素就已經是 1 了，再看一次題目:第二步我們將第二列(3, 5, -1, 6, 17)的第一個元素(3)，想辦法讓它變為 0 ，為方便講解，後面出現的 M[x], x 代表矩陣的第幾列，例如 M[1]就代表矩陣的第一列(1 , 2, 0, 2, 6)。接著繼續求解，我們要將 3 變成 0，就是加上-3，這樣 3-3=0，我們把 M[1]乘上-3 再加到 M[2]

$$(\%o10)\quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 12 \\ 2 & 0 & -7 & 11 & 7 \end{bmatrix}$$

(%i11) M[2]:M[2]*(-1)$M;　//M[2]就代表矩陣的第二列(0, -1, -1, 0, -1)。接著，我們要將第二列第二個元素變成 1，於是把 M[2]乘上-1

(%o12) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 12 \\ 2 & 0 & -7 & 11 & 7 \end{bmatrix}$

(%i13) M[3]:M[3]+M[1]*(-2)$M;　//M[3]就代表矩陣的第三列(2, 4, 1, 2, 12)。接著繼續求解，我們要將 2 變成 0，就是加上-2，這樣 2-2=0，我們把 M[1]乘上-2 再加到 M[3]

(%o14) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -7 & 11 & 7 \end{bmatrix}$

(%i15) M[4]:M[4]+M[1]*(-2)$M;　//M[4]就代表矩陣的第四列(2, 0, -7, 11, 7)。接著繼續求解，我們要將 2 變成 0，就是加上-2，這樣 2-2=0，我們把 M[1]乘上-2 再加到 M[4]

(%o16) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & -7 & 7 & -5 \end{bmatrix}$

(%i17) M[4]:M[4]+M[2]*4$M;　//M[4]就代表矩陣的第四列(0, -4, -7, 7, -5)。接著繼續求解，我們要將-4 變成 0，就是加上 4，這樣 4-4=0，我們把 M[2]乘上 4 再加到 M[4]

(%o18) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & -1 \end{bmatrix}$

(%i19) M[4]:M[4]+M[3]*3$M;　//M[4]就代表矩陣的第四列(0, 0, -3, 7, -1)。接著繼續求解，我們要將-3 變成 0，就是加上 3，這樣 3-3=0，我們把 M[3]乘上 3 再加到 M[4]

$$(\%o20)\quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(%i21) M[1]:M[1]+M[2]*(-2)$M;　//M[1]就代表矩陣的第一列(1 , 2, 0, 2, 6)。接著繼續求解，我們要將 2 變成 0，就是加上-2，這樣 2-2=0，我們把 M[2]乘上-2 再加到 M[1]

$$(\%o22)\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(%i23) M[1]:M[1]+M[3]*2$M;　//M[1]就代表矩陣的第一列(1, 0, -2, 2, 4)。接著繼續求解，我們要將-2 變成 0，就是加上 2，這樣 2-2=0，我們把 M[3]乘上 2 再加到 M[1]

$$(\%o24)\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(%i25) M[1]:M[1]+M[4]*2$M;　//M[1]就代表矩陣的第一列(1 , 0, 0, -2, 4)。接著繼續求解，我們要將-2 變成 0，就是加上 2，這樣 2-2=0，我們把 M[4]乘上 2 再加到 M[1]

$$(\%o26)\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(%i27) M[2]:M[2]+M[3]*(-1)$M; //M[2]就代表矩陣的第二列(0, 1, 1, 0, 1)。接著繼續求解，我們要將 1 變成 0，就是加上-1，這樣 1-1=0，我們把 M[3]乘上-1 再加到 M[2]

(%o28) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

(%i29) M[2]:M[2]+M[4]*(-2)$M; //M[2]就代表矩陣的第二列(0, 1, 0, 2, 1)。接著繼續求解，我們要將 2 變成 0，就是加上-2，這樣 2-2=0，我們把 M[4]乘上-2 再加到 M[2]

(%o30) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

(%i31) M[3]:M[3]+M[4]*2$M; //M[3]就代表矩陣的第三列(0, 0, 1, -2, 0)。接著繼續求解，我們要將-2 變成 0，就是加上 2，這樣 2-2=0，我們把 M[4]乘上 2 再加到 M[3]，解出的矩陣即是用高斯消去法所要求的矩陣。

(%o32) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

(d) $x_1-x_2-2x_3+3x_4=-7$

$2x_1-x_2+6x_3+6x_4=-2$

$-2x_1+x_2-4x_3-3x_4=0$

$3x_1-2x_2+9x_3+10x_4=-5$

(%i1)
f1:x1-x2+2*x3+3*x4=-7;f2:2*x1-x2+6*x3+6*x4=-2;f3:-2*x1+x2-4*x3-3*x4=0;f4:3*x1-2*x2+9*x3+10*x4=-5; //將方程式給定名稱，方程式 1：$x_1-x_2-2x_3+3x_4=-7$ 的名稱為 f1，方程式 2：$2x_1-x_2+6x_3+6x_4=-2$ 的名稱為 f2，方程式 3：

$-2x_1+x_2-4x_3-3x_4=0$ 的名稱爲 f3，方程式 4：$3x_1-2x_2+9x_3+10x_4=-5$ 的名稱爲 f4

(%o1) $3\,x4+2\,x3-x2+x1=-7$

(%o2) $6\,x4+6\,x3-x2+2\,x1=-2$

(%o3) $-3\,x4-4\,x3+x2-2\,x1=0$

(%o4) $10\,x4+9\,x3-2\,x2+3\,x1=-5$

(%i5) M:augcoefmatrix([f1,f2,f3,f4],[x1,x2,x3,x4]); [f1, f2, f3, f4]代表要轉換的線性方程，[x1, x2, x3,x4]代表要轉換的變數名，希望也加入擴增矩陣是使用 augcoefmatrix()函數，Maxima 指令：augcoefmatrix([方程式名稱 1，…，方程式名稱 n]，[未知數 1，…，未知數 n]) //方程組轉換後的增廣矩陣名稱定爲 M，方程式有 f1、f2、f3、f4 而未知數有 x1、x2、x3、x4

(%o5)
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & 6 & 6 & 2 \\ -2 & 1 & -4 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 9 & 10 & 5 \end{bmatrix}$$

(%i6) M:transpose(M); //將矩陣 M 進行轉置，原本的列會變成行

(%o6)
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 6 & -4 & 9 \\ 3 & 6 & -3 & 10 \\ 7 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

(%i7) M[5]:M[5]*(-1); //把轉置後的 M 第 5 列乘上-1，M[5]代表著矩陣 M 的第 5 列

(%o7) [- 7 , - 2 , 0 , - 5]

(%i8) M:transpose(M);　//最後再轉置回來，轉置矩陣 M，$\boxed{\text{指令：transpose(矩陣)}}$

$$(\%o8)\quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & -7 \\ 2 & -1 & 6 & 6 & -2 \\ -2 & 1 & -4 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 9 & 10 & -5 \end{bmatrix}$$

(%i9) M[2]:M[2]+M[1]*(-2)$M;　//M[2]就代表矩陣的第二列(2, -1, 6, 6, -2)。接著繼續求解，我們要將 2 變成 0，就是加上-2，這樣 2-2=0，我們把 M[1]乘上-2 再加到 M[2]

$$(\%o10)\quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 12 \\ -2 & 1 & -4 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 9 & 10 & -5 \end{bmatrix}$$

(%i11) M[3]:M[3]+M[1]*2$M;　//M[3]就代表矩陣的第三列(-2, 1, -4, -3, 0)。接著繼續求解，我們要將-2 變成 0，就是加上 2，這樣 2-2=0，我們把 M[1]乘上 2 再加到 M[3]

$$(\%o12)\quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 12 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & -14 \\ 3 & -2 & 9 & 10 & -5 \end{bmatrix}$$

(%i13) M[4]:M[4]+M[1]*(-3)$M;　//M[4]就代表矩陣的第四列(3, -2, 9, 10, -5)。接著繼續求解，我們要將 3 變成 0，就是加上-3，這樣 3-3=0，我們把 M[1]乘上-3 再加到 M[4]

$$(\%o14)\quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 12 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & -14 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 16 \end{bmatrix}$$

(%i15) M[1]:M[1]+M[2]*1$M;　//M[1]就代表矩陣的第一列(1, -1, 2, 3, -7)。接著繼續求解，我們要將-1 變成 0，就是加上 1，這樣 1-1=0，我們把 M[2]乘上 1 再加到 M[1]

$$(\%o16)\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 12 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & -14 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 16 \end{bmatrix}$$

(%i17) M[3]:M[3]+M[2]*1$M;　//M[3]就代表矩陣的第三列(0, -1, 0, 3, -14)。接著繼續求解，我們要將-1 變成 0，就是加上 1，這樣 1-1=0，我們把 M[2]乘上 1 再加到 M[3]

$$(\%o18)\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 16 \end{bmatrix}$$

(%i19) M[4]:M[4]+M[2]*(-1)$M;　//M[4]就代表矩陣的第四列(0, 1, 3, 1, 16)。接著繼續求解，我們要將 1 變成 0，就是加上-1，這樣 1-1=0，我們把 M[2]乘上-1 再加到 M[4]

$$(\%o20)\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

(%i21) M[3]:M[3]*(1/2)$M;　//M[3]就代表矩陣的第三列(0, 0, 2, 3, -2)。接著，我們要將第三列第三個元素變成 1，於是把 M[3]乘上 $\frac{1}{2}$

(%o22) $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

(%i23) M[4]:M[4]+M[3]*(-1)$M;　//M[4]就代表矩陣的第四列(0, 0, 1, 1, 4)。接著繼續求解，我們要將 1 變成 0，就是加上-1，這樣 1-1=0，我們把 M[3]乘上-1 再加到 M[4]

(%o24) $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 5 \end{bmatrix}$$

(%i25) M[4]:M[4]*(-2)$M;　//M[4]就代表矩陣的第四列(0, 0, 0, $-\frac{1}{2}$)。接著，我們要將第四列第四個元素變成 1，於是把 M[4]乘上-2

(%o26) $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -10 \end{bmatrix}$$

(%i27) M[1]:M[1]+M[3]*(-4)$M;　//M[1]就代表矩陣的第一列(1, 0, 4, 3, 5)。接著繼續求解，我們要將 4 變成 0，就是加上-4，這樣 4-4=0，我們把 M[3]乘上-4 再

加到 M[1]

(%o28) $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -10 \end{bmatrix}$$

(%i29) M[1]:M[1]+M[4]*3$M;　//M[1]就代表矩陣的第一列(1 , 0, 0, -3, 9)。接著繼續求解，我們要將-3 變成 0，就是加上 3，這樣 3-3=0，我們把 M[4]乘上 3 再加到 M[1]

(%o30) $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -21 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -10 \end{bmatrix}$$

(%i31) M[2]:M[2]+M[3]*(-2)$M;　//M[2]就代表矩陣的第二列(0, 1, 2, 0, 12)。接著繼續求解，我們要將 2 變成 0，就是加上-2，這樣 2-2=0，我們把 M[3]乘上-2 再加到 M[2]

(%o32) $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -21 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -10 \end{bmatrix}$$

(%i33) M[2]:M[2]+M[4]*3$M;　//M[2]就代表矩陣的第二列(0, 1, 0-3, 14)。接著繼續求解，我們要將-3 變成 0，就是加上 3，這樣 3-3=0，我們把 M[4]乘上 3 再加

到 M[2]

$$(\%o34)\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -21 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -10 \end{bmatrix}$$

(%i35) M[3]:M[3]+M[4]*(-3/2)$M; //M[3]就代表矩陣的第三列(0, 0, 1, $\frac{3}{2}$, -1)。接著繼續求解，我們要將 $\frac{3}{2}$ 變成 0，就是加上 $-\frac{3}{2}$，這樣 $\frac{3}{2}-\frac{3}{2}$=0，我們把 M[4] 乘上 $-\frac{3}{2}$ 再加到 M[3]。到這裡最後這矩陣就是我們用高斯消去法所求的矩陣。

$$(\%o36)\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -21 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -10 \end{bmatrix}$$

(e) $x_1-4x_2-x_3+x_4=3$
$2x_1-8x_2+x_3-4x_4=-9$
$-x_1+4x_2-2x_3+5x_4=-6$

(%i1) f1:x1-4*x2-x3+x4=3;f2:2*x1-8*x2+x3-4*x4=9;f3:-x1+4*x2-2*x3+5*x4=-6;
//將方程式給定名稱，方程式 1：$x_1-4x_2-x_3+x_4=3$ 的名稱爲 f1，方程式 2：$2x_1-8x_2+x_3-4x_4=-9$ 的名稱爲 f2，方程式 3：$-x_1+4x_2-2x_3+5x_4=-6$ 的名稱爲 f3

(%o1) $x4-x3-4\,x2+x1=3$
(%o2) $-4\,x4+x3-8\,x2+2\,x1=9$
(%o3) $5\,x4-2\,x3+4\,x2-x1=-6$

(%i4) M:augcoefmatrix([f1,f2,f3],[x1,x2,x3,x4]); [f1,f2,f3]代表要轉換的線性方程，[x1,x2,x3,x4]代表要轉換的變數名，希望也加入擴增矩陣是使用 augcoefmatrix()函數，Maxima 指令：augcoefmatrix([方程式名稱 1，…，方程式名稱 n]，[未知數 1，…，未知數 n]) //方程組轉換後的增廣矩陣名稱定爲 M，

方程式有 f1、f2、f3 而未知數有 x1、x2、x3、x4

(%o4) $$\begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & -8 & 1 & -4 & -9 \\ -1 & 4 & -2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

(%i5) M:transpose(M);　//將矩陣 M 進行轉置，原本的列會變成行

(%o5) $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -4 & -8 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 5 \\ -3 & -9 & 6 \end{bmatrix}$$

(%i6) M[5]:M[5]*(-1); //把轉置後的 M 第 5 列乘上-1，M[5]代表著矩陣 M 的第 5 列

(%o6) [3, 9, -6]

(%i7) M:transpose(M);　//最後再轉置回來，轉置矩陣 M，指令：transpose(矩陣)

(%o7) $$\begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -8 & 1 & -4 & 9 \\ -1 & 4 & -2 & 5 & -6 \end{bmatrix}$$

(%i8) M[2]:M[2]+M[1]*(-2)$M;　//M[2]就代表矩陣的第二列(2, -8, 1, -4, 9)。接著繼續求解，我們要將 2 變成 0，就是加上-2，這樣 2-2=0，我們把 M[1]乘上-2 再加到 M[2]

(%o9) $$\begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 3 \\ -1 & 4 & -2 & 5 & -6 \end{bmatrix}$$

(%i10) M[3]:M[3]+M[1]*1$M;　//M[3]就代表矩陣的第三列(-1, 4, -2, 5, -6)。接著繼續求解，我們要將-1 變成 0，就是加上 1，這樣 1-1=0，我們把 M[1]乘上 1 再

加到 M[3]

$$(\%o11)\quad \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

(%i12) M[2]:M[2]+M[3]*1$M;　//M[2]就代表矩陣的第二列(0, 0, 3, -6, 3)。接著繼續求解，我們要將 3 變成 0，就是加上-3，這樣 3-3=0，我們把 M[3]乘上 1 再加到 M[2]

$$(\%o13)\quad \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

(%i14) M[1]:M[1]+M[3]*(-1/3)$M;　//M[1]就代表矩陣的第一列(1, -4, -1, 1, 3)。接著繼續求解，我們要將-1 變成 0，就是加上 1，這樣 1-1=0，我們把 M[3]乘上-$\frac{1}{3}$再加到 M[1]

$$(\%o15)\quad \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

(%i16) M[3]:M[3]*(-1/3)$M;　//M[3]就代表矩陣的第三列(0, 0, -3, 6, -3)。接著，我們要將第三列第三個元素變成 1，於是把 M[3]乘上-$\frac{1}{3}$

$$(\%o17)\quad \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

(%i18) M[1]:M[1]+M[3]*(-1/2)$M;　//M[1]就代表矩陣的第一列(1, -4, 0, -1, 4)。接著繼續求解，我們要將-1 變成 0，就是加上 1，這樣 1-1=0，我們把 M[3]乘上-$\frac{1}{2}$

再加到 M[1]，此矩陣就是我們用高斯消去法所求之矩陣。

(%o19) $\begin{bmatrix} 1 & -4 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

(f) $x_1+2x_2-x_3+3x_4=2$

$2x_1+4x_2-x_3+6x_4=5$

$x_2+2x_4=3$

(%i1) f1:x1+2*x2-x3+3*x4=2;f2:2*x1+4*x2-x3+6*x4=5;f3:x2+2*x4=3; //將方程式給定名稱，方程式 1：$x_1+2x_2-x_3+3x_4=2$ 的名稱為 f1，方程式 2：$2x_1+4x_2-x_3+6x_4=5$ 的名稱為 f2，方程式 3：$x_2+2x_4=3$ 的名稱為 f3

(%o1) $3\,x4-x3+2\,x2+x1=2$

(%o2) $6\,x4-x3+4\,x2+2\,x1=5$

(%o3) $2\,x4+x2=3$

(%i4) M:augcoefmatrix([f1,f2,f3],[x1,x2,x3,x4]); [f1,f2,f3]代表要轉換的線性方程，[x1,x2,x3,x4]代表要轉換的變數名，希望也加入擴增矩陣是使用 augcoefmatrix()函數，Maxima 指令：augcoefmatrix([方程式名稱 1，…，方程式名稱 n]，[未知數 1，…，未知數 n]) //方程組轉換後的增廣矩陣名稱定為 M，方程式有 f1、f2、f3 而未知數有 x1、x2、x3、x4

(%o4) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -1 & 6 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

(%i5) M:transpose(M); //將矩陣 M 進行轉置，原本的列會變成行

(%o5) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \\ -2 & -5 & -3 \end{bmatrix}$

(%i6) M[5]:M[5]*(-1); //把轉置後的 M 第 5 列乘上-1，M[5]代表著矩陣 M 的第 5 列

(%o6) [2, 5, 3]

(%i7) M:transpose(M); //最後再轉置回來，轉置矩陣 M，指令：transpose(矩陣)

$$(\%o7)\quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(%i8) M[2]:M[2]+M[1]*(-2)$M; //M[2]就代表矩陣的第二列(2, 4, -1, 6, 5)。接著繼續求解，我們要將 2 變成 0，就是加上-2，這樣 2-2=0，我們把 M[1]乘上-2 再加到 M[2]

$$(\%o9)\quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(%i10) M[1]:M[1]+M[3]*(-2)$M; //M[1]就代表矩陣的第一列(1, 2, -1, 3, 2)。接著繼續求解，我們要將 2 變成 0，就是加上-2，這樣 2-2=0，我們把 M[3]乘上-2 再加到 M[1]

$$(\%o11)\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(%i12) M[1]:M[1]+M[2]*1$M; //M[1]就代表矩陣的第一列(1, 0, -1, -1, -4)。接著繼續求解，我們要將-1 變成 0，就是加上 1，這樣 1-1=0，我們把 M[2]乘上 1 再加到 M[1]，此矩陣就是我們用高斯消去法所求之矩陣。

$$(\%o13)\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(g) $2x_1 - 2x_2 - x_3 + 6x_4 - 2x_5 = 1$

$x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 2$

$4x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 - x_5 = 6$

(%i1) f1:2*x1-2*x2-x3+6*x4-2*x5=1;f2:x1-x2+x3+2*x4-x5=2;f3:4*x1-4*x2+5*x3+7*x4-x5=6;　//將方程式給定名稱，方程式 1：$2x_1-2x_2-x_3+6x_4-2x_5=1$ 的名稱爲 f1，方程式 2：$x_1-x_2+x_3+2x_4-x_5=2$ 的名稱爲 f2，方程式 3：$4x_1-4x_2+5x_3+7x_4-x_5=6$ 的名稱爲 f3

(%o1) $-2\,x5+6\,x4-x3-2\,x2+2\,x1=1$

(%o2) $-x5+2\,x4+x3-x2+x1=2$

(%o3) $-x5+7\,x4+5\,x3-4\,x2+4\,x1=6$

(%i4) M:augcoefmatrix([f1,f2,f3],[x1,x2,x3,x4,x5]);　[f1, f2, f3]代表要轉換的線性方程，[x1, x2, x3, x4, x5]代表要轉換的變數名，希望也加入擴增矩陣是使用augcoefmatrix()函數，Maxima 指令：augcoefmatrix([方程式名稱 1，…，方程式名稱 n]，[未知數 1，…，未知數 n])　//方程組轉換後的增廣矩陣名稱定爲 M，方程式有 f1、f2、f3 而未知數有 x1、x2、x3、x4、x5

(%o4) $\begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 6 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 4 & -4 & 5 & 7 & -1 & -6 \end{bmatrix}$

(%i5) M:transpose(M);　//將矩陣 M 進行轉置，原本的列會變成行

(%o5) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 5 \\ 6 & 2 & 7 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -6 \end{bmatrix}$

(%i6) M[6]:M[6]*(-1); //把轉置後的 M 第 6 列乘上-1，M[6]代表著矩陣 M 的第 6 列

(%o6) [1 , 2 , 6]

(%i7) M:transpose(M);　//最後再轉置回來，轉置矩陣 M，$\boxed{\text{指令：transpose(矩陣)}}$

(%o7)
$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 6 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & 5 & 7 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

(%i8) M[1]:M[1]*(1/2)$M;　//M[1]就代表矩陣的第一列(2, -2, -1, 6, -2, 1)。接著，我們要將第一列第一個元素變成 1，於是把 M[1]乘上$\frac{1}{2}$

(%o9)
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 3 & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & 5 & 7 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

(%i10) M[2]:M[2]+M[1]*(-1)$M;　//M[2]就代表矩陣的第二列(1, -1, 1, 2, -1, 2)。接著繼續求解，我們要將 1 變成 0，就是加上-1，這樣 1-1=0，我們把 M[1]乘上-1 再加到 M[2]

(%o11)
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 3 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & -1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 4 & -4 & 5 & 7 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

(%i12) M[3]:M[3]+M[1]*(-4)$M;　//M[3]就代表矩陣的第三列(4, -4, 5, 7, -1, 6)。接著繼續求解，我們要將 4 變成 0，就是加上-4，這樣 4-4=0，我們把 M[1]乘上-4 再加到 M[3]

(%o13)
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 3 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & -1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 7 & -5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

(%i14) M[2]:M[2]*(2/3)$M;　//M[2]就代表矩陣的第二列(0, 0, $\frac{3}{2}$, -1, 0, $\frac{3}{2}$)。接著，我們要將第二列第三個元素變成 1，於是把 M[2]乘上$\frac{2}{3}$

$$(\%o15)\quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 3 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

(%i16) M[3]:M[3]+M[2]*(-7)$M;　//M[3]就代表矩陣的第三列(0, 0, 7, -5, 3, 4)。接著繼續求解，我們要將 7 變成 0，就是加上-7，這樣 7-7=0，我們把 M[2]乘上-7 再加到 M[3]

$$(\%o17)\quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 3 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

(%i18) M[3]:M[3]*(-3)$M;　//M[3]就代表矩陣的第三列(0, 0, 0, -$\frac{1}{3}$, 3, -3)。接著，我們要將第三列第四個元素變成 1，於是把 M[3]乘上-3

$$(\%o19)\quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 3 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -9 & 9 \end{bmatrix}$$

(%i20) M[1]:M[1]+M[2]*(1/2)$M;　//M[1]就代表矩陣的第一列(1, -1, -$\frac{1}{2}$, 3, -1, $\frac{1}{2}$)。接著繼續求解，我們要將-$\frac{1}{2}$變成 0，就是加上$\frac{1}{2}$，這樣$\frac{1}{2}$-$\frac{1}{2}$=0，我們把

M[2]乘上$\frac{1}{2}$再加到 M[1]

(%o21) $$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \frac{8}{3} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -9 & 9 \end{bmatrix}$$

(%i22) M[1]:M[1]+M[3]*(-8/3)$M;　//M[1]就代表矩陣的第一列(1, -1, 0, $\frac{8}{3}$, -1, 1)。接著繼續求解，我們要將$\frac{8}{3}$變成 0，就是加上-$\frac{8}{3}$，這樣$\frac{8}{3}$-$\frac{8}{3}$=0，我們把 M[3]乘上-$\frac{8}{3}$再加到 M[1]

(%o23) $$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 23 & -23 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -9 & 9 \end{bmatrix}$$

(%i24) M[2]:M[2]+M[3]*(2/3)$M;　//M[2]就代表矩陣的第二列(0, 0, 1, -$\frac{2}{3}$, 0, 1)。接著繼續求解，我們要將-$\frac{2}{3}$變成 0，就是加上$\frac{2}{3}$，這樣$\frac{2}{3}$-$\frac{2}{3}$=0，我們把 M[3]乘上$\frac{2}{3}$再加到 M[2]，此矩陣就是我們用高斯消去法所求得之矩陣。

(%o25) $$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 23 & -23 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -9 & 9 \end{bmatrix}$$

(h) $3x_1-x_2+x_3-x_4+2x_5=5$
$x_1-x_2-x_3-2x_4-x_5=2$
$5x_1-2x_2+x_3-3x_4+3x_5=10$
$2x_1-x_2-2x_4+x_5=5$

(%i1)

f1:3*x1-x2+x3-x4+2*x5=5;f2:x1-x2-x3-2*x4-x5=2;f3:5*x1-2*x2+x3-3*x4+3*x5=10;f4:2*x1-x2-2*x4+x5=5; //將方程式給定名稱，方程式 1：$3x_1-x_2+x_3-x_4+2x_5=5$ 的名稱爲 f1，方程式 2：$x_1-x_2-x_3-2x_4-x_5=2$ 的名稱爲 f2，方程式 3：$5x_1-2x_2+x_3-3x_4+3x_5=10$ 的名稱爲 f3，方程式 4：$2x_1-x_2-2x_4+x_5=5$ 的名稱爲 f4

(%o1) $2\,x5-x4+x3-x2+3\,x1=5$

(%o2) $-x5-2\,x4-x3-x2+x1=2$

(%o3) $3\,x5-3\,x4+x3-2\,x2+5\,x1=10$

(%o4) $x5-2\,x4-x2+2\,x1=5$

(%i5) M:augcoefmatrix([f1,f2,f3,f4],[x1,x2,x3,x4,x5]); [f1, f2, f3, f4]代表要轉換的線性方程，[x1, x2, x3, x4, x5]代表要轉換的變數名，希望也加入擴增矩陣是使用 augcoefmatrix()函數，Maxima 指令：augcoefmatrix([方程式名稱 1，…，方程式名稱 n]，[未知數 1，…，未知數 n]) //方程組轉換後的增廣矩陣名稱定爲 M，方程式有 f1、f2、f3、f4 而未知數有 x1、x2、x3、x4、x5

(%o5) $$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & -1 & -2 & -1 & -2 \\ 5 & -2 & 1 & -3 & 3 & -10 \\ 2 & -1 & 0 & -2 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

(%i6) M:transpose(M); //將矩陣 M 進行轉置，原本的列會變成行

(%o6) $$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 & 2 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ -5 & -2 & -10 & -5 \end{bmatrix}$$

(%i7) M[6]:M[6]*(-1); //把轉置後的 M 第 6 列乘上-1，M[6]代表著矩陣 M 的第 6 列

(%o7) [5 , 2 , 10 , 5]

(%i8) M:transpose(M);　//最後再轉置回來，轉置矩陣 M，$\boxed{\text{指令：transpose(矩陣)}}$

$$(\%o8)\quad \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & -2 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 1 & -3 & 3 & 10 \\ 2 & -1 & 0 & -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

(%i9) M[1]:M[1]*(1/3)$M;　//M[1]就代表矩陣的第一列(3, -1, 1, -1, 2, 5)。接著，我們要將第一列第一個元素變成 1，於是把 M[1]乘上$\frac{1}{3}$

$$(\%o10)\quad \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 1 & -1 & -1 & -2 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 1 & -3 & 3 & 10 \\ 2 & -1 & 0 & -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

(%i11) M[2]:M[2]+M[1]*(-1)$M;　//M[2]就代表矩陣的第二列(1, -1, -1, -2, -1, 2)。接著繼續求解，我們要將 1 變成 0，就是加上-1，這樣 1-1=0，我們把 M[1]乘上-1 再加到 M[2]

$$(\%o12)\quad \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 5 & -2 & 1 & -3 & 3 & 10 \\ 2 & -1 & 0 & -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

(%i13) M[2]:M[2]*(-3/2)$M;　//M[2]就代表矩陣的第二列(0, $-\frac{2}{3}$, $-\frac{4}{3}$, $-\frac{5}{3}$, $-\frac{5}{3}$, $\frac{1}{3}$)。接著，我們要將第二列第二個元素變成 1，於是把 M[2]乘上$-\frac{3}{2}$

$$(\%o14)\quad \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 5 & -2 & 1 & -3 & 3 & 10 \\ 2 & -1 & 0 & -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

(%i15) M[3]:M[3]+M[1]*(-5)$M;　//M[3]就代表矩陣的第三列(5, -2, 1, -3, 3, 10)。接著繼續求解，我們要將 5 變成 0，就是加上-5，這樣 5-5=0，我們把 M[1]乘上-5 再加到 M[3]

$$(\%o16)\quad \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 2 & -1 & 0 & -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

(%i17) M[3]:M[3]*(-3)$M;　//M[3]就代表矩陣的第三列(0, $-\frac{1}{3}$, $-\frac{2}{3}$, $-\frac{4}{3}$, $-\frac{1}{3}$, $\frac{5}{3}$)。接著，我們要將第三列第二個元素變成 1，於是把 M[3]乘上-3

$$(\%o18)\quad \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & 0 & -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

(%i19) M[4]:M[4]+M[1]*(-2)$M;　//M[4]就代表矩陣的第四列(2, -1, 0, -2, 1, 5)。接著繼續求解，我們要將 2 變成 0，就是加上-2，這樣 2-2=0，我們把 M[1]乘上-2 再加到 M[4]

$$(\%o20)\quad \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 1 & -5 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

(%i21) M[4]:M[4]*(-3)$M;　//M[4]就代表矩陣的第四列(0, $-\frac{1}{3}$, $-\frac{2}{3}$, $-\frac{4}{3}$, $-\frac{1}{3}$, $\frac{5}{3}$)。接著，我們要將第四列第二個元素變成 1，於是把 M[4]乘上-3

$$(\%o22)\quad \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

(%i23) M[4]:M[4]+M[3]*(-1)$M;　//M[4]就代表矩陣的第四列(0, 1, 2, 4, 1, -5)。接著繼續求解，我們要將 1 變成 0，就是加上-1，這樣 1-1=0，我們把 M[3]乘上-1 再加到 M[4]

$$(\%o24)\quad \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(%i25) M[3]:M[3]+M[2]*(-1)$M;　//M[3]就代表矩陣的第三列(0, 1, 2, 4, 1, -5)。接著繼續求解，我們要將 1 變成 0，就是加上-1，這樣 1-1=0，我們把 M[2]乘上-1

再加到 M[3]

(%o26) $$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(%i27) M[3]:M[3]*(2/3)$M;　//M[3]就代表矩陣的第三列(0, 0, 0, $\frac{3}{2}$, -$\frac{3}{2}$, -$\frac{9}{2}$)。接著，我們要將第三列第四個元素變成 1，於是把 M[3]乘上$\frac{2}{3}$

(%o28) $$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(%i29) M[1]:M[1]+M[2]*(1/3)$M;　//M[1]就代表矩陣的第一列(1, -$\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, -$\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{3}$)。接著繼續求解，我們要將-$\frac{1}{3}$變成 0，就是加上$\frac{1}{3}$，這樣$\frac{1}{3}$-$\frac{1}{3}$=0，我們把 M[2]乘上$\frac{1}{3}$再加到 M[1]

(%o30) $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(%i31) M[1]:M[1]+M[3]*(3/2)$M;　//M[1]就代表矩陣的第一列(1, 0, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{2}$)。接著繼續求解，我們要將$\frac{3}{2}$變成 0，就是加上-$\frac{3}{2}$，這樣$\frac{3}{2}$-$\frac{3}{2}$=0，我們把M[3]乘上$\frac{3}{2}$再加到 M[1]

$$(\%o32)\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(%i33) M[2]:M[2]+M[3]*(-5/2)$M;　//M[2]就代表矩陣的第二列(0, 1, 2, $\frac{5}{2}$, $\frac{5}{2}$, -$\frac{1}{2}$)。接著繼續求解，我們要將$\frac{5}{2}$變成 0，就是加上-$\frac{5}{2}$，這樣$\frac{5}{2}$-$\frac{5}{2}$=0，我們把M[3]乘上-$\frac{5}{2}$再加到 M[2]，此矩陣便是我們用高斯消去法所求之矩陣結果。

$$(\%o34)\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(i) $3x_1-x_2+2x_3+4x_4+x_5=2$
$x_1-x_2+2x_3+3x_4+x_5=-1$
$2x_1-3x_2+6x_3+9x_4+4x_5=-5$
$7x_1-2x_2+4x_3+8x_4+x_5=6$

(%i1)
f1:3*x1-x2+2*x3+4*x4+x5=2;f2:x1-x2+2*x3+3*x4+x5=-1;f3:2*x1-3*x2+6*x3+9*x4+4*x5=-5;f4:7*x1-2*x2+4*x3+8*x4+x5=6;　//將方程式給定名稱，方程式 1：$3x_1-x_2+2x_3+4x_4+x_5=2$ 的名稱爲 f1，方程式 2：$x_1-x_2+2x_3+3x_4+x_5=-1$ 的名稱爲 f2，方程式 3：$2x_1-3x_2+6x_3+9x_4+4x_5=-5$ 的名稱爲 f3，方程式 4：$7x_1-2x_2+4x_3+8x_4+x_5=6$ 的名稱爲 f4

(%o1) $x5+4\,x4+2\,x3-x2+3\,x1=2$

(%o2) $x5+3\,x4+2\,x3-x2+x1=-1$

(%o3) $4\,x5+9\,x4+6\,x3-3\,x2+2\,x1=-5$

(%o4) $x5+8\,x4+4\,x3-2\,x2+7\,x1=6$

(%i5) M:augcoefmatrix([f1,f2,f3,f4],[x1,x2,x3,x4,x5]); [f1, f2, f3, f4]代表要轉換的線性方程，[x1, x2, x3, x4, x5]代表要轉換的變數名，希望也加入擴增矩陣是使用 augcoefmatrix()函數，Maxima 指令：augcoefmatrix([方程式名稱 1，…，方程式名稱 n]，[未知數 1，…，未知數 n]) //方程組轉換後的增廣矩陣名稱定為 M，方程式有 f1、f2、f3、f4 而未知數有 x1、x2、x3、x4、x5

(%o5) $$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 6 & 9 & 4 & 5 \\ 7 & -2 & 4 & 8 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

(%i6) M:transpose(M); //將矩陣 M 進行轉置，原本的列會變成行

(%o6) $$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 7 \\ -1 & -1 & -3 & -2 \\ 2 & 2 & 6 & 4 \\ 4 & 3 & 9 & 8 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 5 & -6 \end{bmatrix}$$

(%i7) M[6]:M[6]*(-1); //把轉置後的 M 第 6 列乘上-1，M[6]代表著矩陣 M 的第 6 列

(%o7) $[2,-1,-5,6]$

(%i8) M:transpose(M); //最後再轉置回來，轉置矩陣 M，指令：transpose(矩陣)

(%o8) $$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 6 & 9 & 4 & -5 \\ 7 & -2 & 4 & 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

(%i9) M[1]:M[1]*(1/3)$M;　//M[1]就代表矩陣的第一列(3, -1, 2, 4, 1, 2)。接著，我們要將第一列第一個元素變成 1，於是把 M[1]乘上$\frac{1}{3}$

$$(\%o10)\quad \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 6 & 9 & 4 & -5 \\ 7 & -2 & 4 & 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

(%i11) M[2]:M[2]+M[1]*(-1)$M;　//M[2]就代表矩陣的第二列(1, -1, 2, 3, 1, -1)。接著繼續求解，我們要將 1 變成 0，就是加上-1，這樣 1-1=0，我們把 M[1]乘上-1 再加到 M[2]

$$(\%o12)\quad \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \\ 2 & -3 & 6 & 9 & 4 & -5 \\ 7 & -2 & 4 & 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

(%i13) M[2]:M[2]*(-3/2)$M;　//M[2]就代表矩陣的第二列(0, -$\frac{2}{3}$,$\frac{4}{3}$,$\frac{5}{3}$,$\frac{2}{3}$,-$\frac{5}{3}$)。接著，我們要將第二列第二個元素變成 1，於是把 M[2]乘上-$\frac{3}{2}$

$$(\%o14)\quad \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{5}{2} & -1 & \frac{5}{2} \\ 2 & -3 & 6 & 9 & 4 & -5 \\ 7 & -2 & 4 & 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

(%i15) M[3]:M[3]+M[1]*(-2)$M;　//M[3]就代表矩陣的第三列(2, -3, 6, 9, 4, -5)。接著繼續求解，我們要將 2 變成 0，就是加上-2，這樣 2-2=0，我們把 M[1]乘上

-2 再加到 M[3]

(%o16)
$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{5}{2} & -1 & \frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{7}{3} & \frac{14}{3} & \frac{19}{3} & \frac{10}{3} & -\frac{19}{3} \\ 7 & -2 & 4 & 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

(%i17) M[3]:M[3]*(-3/7)$M;　//M[3]就代表矩陣的第三列(0, $-\frac{7}{3}, \frac{14}{3}, \frac{19}{3}, \frac{10}{3}, -\frac{19}{3}$)。接著，我們要將第三列第二個元素變成 1，於是把 M[3]乘上$-\frac{3}{7}$

(%o18)
$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{5}{2} & -1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{19}{7} & -\frac{10}{7} & \frac{19}{7} \\ 7 & -2 & 4 & 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

(%i19) M[4]:M[4]+M[1]*(-7)$M;　//M[4]就代表矩陣的第四列(7, -2, 4, 8, 1, 6)。接著繼續求解，我們要將 7 變成 0，就是加上-7，這樣 7-7=0，我們把 M[1]乘上-7 再加到 M[4]

(%o20)
$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{5}{2} & -1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{19}{7} & -\frac{10}{7} & \frac{19}{7} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

(%i21) M[3]:M[3]+M[2]*(-1)$M;　//M[3]就代表矩陣的第三列(0, 1, -2, $-\frac{19}{7}$,$-\frac{10}{7}$,$\frac{19}{7}$)。接著繼續求解，我們要將 1 變成 0，就是加上-1，這樣 1-1=0，我們把 M[2]乘上-1 再加到 M[3]

$$(\%o22)\quad \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{5}{2} & -1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{14} & -\frac{3}{7} & \frac{3}{14} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

(%i23) M[3]:M[3]*(-14/3)$M;　//M[3]就代表矩陣的第三列(0, 0, 0, $-\frac{3}{14}$, $-\frac{3}{7}$,$\frac{3}{14}$)。接著，我們要將第三列第四個元素變成 1，於是把 M[3]乘上$-\frac{14}{3}$

$$(\%o24)\quad \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{5}{2} & -1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

(%i25) M[4]:M[4]+M[2]*(-1/3)$M;　//M[4]就代表矩陣的第四列(0, $\frac{1}{3}$,$-\frac{2}{3}$,$-\frac{4}{3}$,$-\frac{4}{3}$,$\frac{4}{3}$)。接著繼續求解，我們要將$\frac{1}{3}$變成 0，就是加上$-\frac{1}{3}$，這樣$\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=0$，

我們把 M[2]乘上-$\frac{1}{3}$再加到 M[4]

(%o26) $$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{5}{2} & -1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(%i27) M[4]:M[4]+M[3]*(1/2)$M;　//M[4]就代表矩陣的第四列(0, 0, 0, -$\frac{1}{2}$, -1, $\frac{1}{2}$)。接著繼續求解，我們要將-$\frac{1}{2}$變成 0，就是加上$\frac{1}{2}$，這樣$\frac{1}{2}$-$\frac{1}{2}$=0，我們把 M[3]乘上$\frac{1}{2}$再加到 M[4]

(%o28) $$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{5}{2} & -1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(%i29) M[1]:M[1]+M[2]*(1/3)$M;　//M[1]就代表矩陣的第一列(1, $\frac{1}{3}$,$\frac{2}{3}$,$\frac{4}{3}$,$\frac{1}{3}$,$\frac{2}{3}$)。接著繼續求解，我們要將-$\frac{1}{3}$變成 0，就是加上$\frac{1}{3}$，這樣$\frac{1}{3}$-$\frac{1}{3}$=0，我們把 M[2]乘上$\frac{1}{3}$再加到 M[1]

(%o30) $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{5}{2} & -1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(%i31) M[1]:M[1]+M[3]*(-1/2)$M;　//M[1]就代表矩陣的第一列(1, 0, 0, $\frac{1}{2}$, 0, $\frac{3}{2}$)。接著繼續求解，我們要將$\frac{1}{2}$變成 0，就是加上-$\frac{1}{2}$ ，這樣$\frac{1}{2}$-$\frac{1}{2}$=0，我們把 M[3]乘上-$\frac{1}{2}$再加到 M[1]

$$(\%o32)\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{5}{2} & -1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(%i33) M[2]:M[2]+M[3]*(5/2)$M;　//M[2]就代表矩陣的第二列(0, 1, -2, -$\frac{5}{2}$, -1, $\frac{5}{2}$)。接著繼續求解，我們要將-$\frac{5}{2}$變成 0，就是加上$\frac{5}{2}$ ，這樣$\frac{5}{2}$-$\frac{5}{2}$=0，我們把 M[3]乘上$\frac{5}{2}$再加到 M[2]，此矩陣就是我們用高斯消去法所要求的矩陣。

$$(\%o34)\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(j) $2x_1+3x_3-4x_5=5$
$3x_1-4x_2+8x_3+3x_4=8$
$x_1-x_2+2x_3+x_4-x_5=2$
$-2x_1+5x_2-9x_3-3x_4-5x_5=-8$

(%i1)
f1:2*x1+3*x3-4*x5=5;f2:3*x1-4*x2+8*x3+3*x4=8;f3:x1-x2+2*x3+x4-x5=2;f4:-2*x1+5*x2-9*x3-3*x4-5*x5=-8;　//將方程式給定名稱，方程式 1：$2x_1+3x_3-4x_5=5$ 的名稱爲 f1，方程式 2：$3x_1-4x_2+8x_3+3x_4=8$ 的名稱爲 f2，方程式 3：$x_1-x_2+2x_3+x_4-x_5=2$ 的名稱爲 f3，方程式 4：$-2x_1+5x_2-9x_3-3x_4-5x_5=-8$ 的名稱爲 f4

(%o1) $-4\,x5+3\,x3+2\,x1=5$

(%o2) $3\,x4+8\,x3-4\,x2+3\,x1=8$

(%o3) $-x5+x4+2\,x3-x2+x1=2$

(%o4) $-5\,x5-3\,x4-9\,x3+5\,x2-2\,x1=-8$

(%i5) M:augcoefmatrix([f1,f2,f3,f4],[x1,x2,x3,x4,x5]); [f1,f2,f3,f4]代表要轉換的線性方程，[x1,x2,x3,x4,x5]代表要轉換的變數名，希望也加入擴增矩陣是使用augcoefmatrix()函數，Maxima 指令：augcoefmatrix([方程式名稱 1，…，方程式名稱 n]，[未知數 1，…，未知數 n]) //方程組轉換後的增廣矩陣名稱定為 M，方程式有 f1、f2、f3、f4 而未知數有 x1、x2、x3、x4、x5

(%o5) $$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 & -4 & -5 \\ 3 & -4 & 8 & 3 & 0 & -8 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -1 & -2 \\ -2 & 5 & -9 & -3 & -5 & 8 \end{bmatrix}$$

(%i6) M:transpose(M); //將矩陣 M 進行轉置，原本的列會變成行

(%o6) $$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & -1 & 5 \\ 3 & 8 & 2 & -9 \\ 0 & 3 & 1 & -3 \\ -4 & 0 & -1 & -5 \\ -5 & -8 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

(%i7) M[6]:M[6]*(-1); //把轉置後的 M 第 6 列乘上-1，M[6]代表著矩陣 M 的第 6 列

(%o7) $[5, 8, 2, -8]$

(%i8) M:transpose(M); //最後再轉置回來，轉置矩陣 M，指令：transpose(矩陣)

(%o8) $$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 & -4 & 5 \\ 3 & -4 & 8 & 3 & 0 & 8 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 5 & -9 & -3 & -5 & -8 \end{bmatrix}$$

(%i9) M[1]:M[1]*(1/2)$M;　//M[1]就代表矩陣的第一列(2, 0, 3, 0, -4, 5)。接著，我們要將第一列第一個元素變成 1，於是把 M[1]乘上$\frac{1}{2}$

$$(\%o10)\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & -2 & \frac{5}{2} \\ 3 & -4 & 8 & 3 & 0 & 8 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 5 & -9 & -3 & -5 & -8 \end{bmatrix}$$

(%i11) M[2]:M[2]+M[1]*(-3)$M;　//M[2]就代表矩陣的第二列(3, -4, 8, 3, 0, 8)。接著繼續求解，我們要將 3 變成 0，就是加上-2，這樣 3-3=0，我們把 M[1]乘上-3 再加到 M[2]

$$(\%o12)\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & -2 & \frac{5}{2} \\ 0 & -4 & \frac{7}{2} & 3 & 6 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 5 & -9 & -3 & -5 & -8 \end{bmatrix}$$

(%i13) M[2]:M[2]*(-1/4)$M;　//M[2]就代表矩陣的第二列(0, -4, $\frac{7}{2}$,3, 6, $\frac{1}{2}$)。接著，我們要將第二列第二個元素變成 1，於是把 M[2]乘上-$\frac{1}{4}$

$$(\%o14)\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & -2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{8} & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{8} \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 5 & -9 & -3 & -5 & -8 \end{bmatrix}$$

(%i15) M[3]:M[3]+M[1]*(-1)$M;　//M[3]就代表矩陣的第三列(1, -1, 2, 1, -1, 2)。接著繼續求解，我們要將 1 變成 0，就是加上-1，這樣 1-1=0，我們把 M[1]乘上

-1 再加到 M[3]

$$(\%o16)\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & -2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{8} & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{8} \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & 5 & -9 & -3 & -5 & -8 \end{bmatrix}$$

(%i17) M[3]:M[3]+M[2]*1$M;　//M[3]就代表矩陣的第三列(0, -1, $\frac{1}{2}$, 1, 1,-$\frac{1}{2}$)。接著繼續求解，我們要將-1 變成 0，就是加上 1，這樣 1-1=0，我們把 M[2]乘上 1 再加到 M[3]

$$(\%o18)\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & -2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{8} & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{8} \\ -2 & 5 & -9 & -3 & -5 & -8 \end{bmatrix}$$

(%i19) M[3]:M[3]*(-8/3)$M;　//M[3]就代表矩陣的第三列(0, 0, -$\frac{3}{8}$,$\frac{1}{4}$,$-\frac{1}{2}$,$-\frac{5}{8}$)。接著，我們要將第三列第三個元素變成 1，於是把 M[3]乘上-$\frac{8}{3}$

$$(\%o20)\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & -2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{8} & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ -2 & 5 & -9 & -3 & -5 & -8 \end{bmatrix}$$

(%i21) M[4]:M[4]+M[1]*2$M;　//M[4]就代表矩陣的第四列(-2, 5, -9, -3, -5, -8)。接著繼續求解，我們要將-2 變成 0，就是加上 2，這樣 2-2=0，我們把 M[1]乘上

2 再加到 M[4]

(%o22) $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & -2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{8} & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 5 & -6 & -3 & -9 & -3 \end{bmatrix}$$

(%i23) M[4]:M[4]+M[2]*(-5)$M;　//M[4]就代表矩陣的第四列(0, 5, -6, -3, -9, -3)。接著繼續求解，我們要將 5 變成 0，就是加上-5，這樣 5-5=0，我們把 M[2]乘上-5 再加到 M[4]

(%o24) $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & -2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{8} & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{13}{8} & \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} & -\frac{19}{8} \end{bmatrix}$$

(%i25) M[4]:M[4]+M[3]*(13/8)$M;　//M[4]就代表矩陣的第四列(0, 0, $-\frac{13}{8},\frac{3}{4},-\frac{3}{2},-\frac{19}{8}$)。接著繼續求解，我們要-$\frac{13}{8}$變成 0，就是加上$\frac{13}{8}$，這樣$\frac{13}{8}$-$\frac{13}{8}$=0，我們把 M[3]乘上$\frac{13}{8}$再加到 M[4]

(%o26) $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & -2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{8} & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

(%i27) M[4]:M[4]*(-3)$M;　//M[4]就代表矩陣的第四列(0, 0, 0, -$\frac{1}{3}$,$\frac{2}{3}$,$\frac{1}{3}$)。接著，我們要將第四列第四個元素變成 1，於是把 M[4]乘上-3

$$\text{(\%o28)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & -2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{8} & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

(%i29) M[1]:M[1]+M[3]*(-3/2)$M;　//M[1]就代表矩陣的第一列(1, 0, $\frac{3}{2}$, 0,-2, $\frac{5}{2}$)。接著繼續求解，我們要將$\frac{3}{2}$變成 0，就是加上-$\frac{3}{2}$ ，這樣$\frac{3}{2}$-$\frac{3}{2}$=0，我們把 M[3]乘上-$\frac{3}{2}$再加到 M[1]

$$\text{(\%o30)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{8} & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

(%i31) M[1]:M[1]+M[4]*(-1)$M;　//M[1]就代表矩陣的第一列(1, 0, 0, 1, -4, 0)。接著繼續求解，我們要將 1 變成 0，就是加上-1，這樣 1-1=0，我們把 M[4]乘上-1 再加到 M[1]

$$\text{(\%o32)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{8} & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

(%i33) M[2]:M[2]+M[3]*(7/8)$M;　//M[2]就代表矩陣的第二列(0, 1, $-\frac{7}{8}$,$-\frac{3}{4}$,$-\frac{3}{2}$,$-\frac{1}{8}$)。接著繼續求解，我們要將-$\frac{7}{8}$變成 0，就是加上$\frac{7}{8}$，這樣$\frac{7}{8}$-$\frac{7}{8}$=0，我們把 M[3]乘上$\frac{7}{8}$再加到 M[2]

$$(\%o34)\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

(%i35) M[2]:M[2]+M[4]*(4/3)$M;　//M[2]就代表矩陣的第二列(0, 1, 0, $-\frac{4}{3}$,$-\frac{1}{3}$,$\frac{4}{3}$)。接著繼續求解，我們要將-$\frac{4}{3}$變成 0，就是加上$\frac{4}{3}$，這樣$\frac{4}{3}$-$\frac{4}{3}$=0，我們把 M[4]乘上$\frac{4}{3}$再加到 M[2]

$$(\%o36)\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

(%i37) M[3]:M[3]+M[4]*(2/3)$M;　//M[3]就代表矩陣的第三列(0, 0, 1, $-\frac{2}{3}$,$\frac{4}{3}$,$\frac{5}{3}$)。接著繼續求解，我們要將-$\frac{2}{3}$變成 0，就是加上$\frac{2}{3}$，這樣$\frac{2}{3}$-$\frac{2}{3}$=0，我們把 M[4]乘上$\frac{2}{3}$再加到 M[3]，此矩陣就是我們用高斯消去法所求得之矩陣。

$$(\%o38)\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

4.給訂下列各方程組，應用 3 來判定此方程組是否有解，若有解，試求所有解，最後，求對應齊次方程組解集合的一組基底

(a) $x_1+2x_2-x_3+x_4=2$

$2x_1+x_2+x_3-x_4=3$

$x_1+2x_2-3x_3+2x_4=2$

(%i1) eq1:x1+2*x2-x3+x4=2; 解線性方程組，先建立好方程式 1，方程式 2，…，方程式 n，再用 solve([方程式 1 名稱，方程式 2 名稱，…，方程式 n 名稱]，[未知數 1，未知數 2，…，未知數 n])即可解線性方程組 //方程式 1：$x_1+2x_2-x_3+x_4=2$ 名稱定爲 eq1

(%o1) $x4-x3+2\,x2+x1=2$

(%i2) eq2:2*x1+x2+x3-x4=3; //方程式 2：$2x_1+x_2+x_3-x_4=3$ 名稱定爲 eq2

(%o2) $-x4+x3+x2+2\,x1=3$

(%i3) eq3:x1+2*x2-3*x3+2*x4=2; //方程式 3：$x_1+2x_2-3x_3+2x_4=2$ 名稱定爲 eq3

(%o3) $2\,x4-3\,x3+2\,x2+x1=2$

(%i4) solve([eq1,eq2,eq3],[x1,x2,x3,x4]); //用 slove 解線性方程組 eq1，eq2，eq3 和未知數 x1，未知數 x2，未知數 x3，求得的解中%r1 代表任意數，x4=%r1，x3=$\frac{1}{2}$%r1，x2=-$\frac{3\%r1-2}{6}$，x1=$\frac{3\%r1+8}{6}$，可知 x1、x2、x3、x4 是相互影響的。

(%o4) $[\,[\,x1=\frac{3\,\%r1+8}{6},\ x2=-\frac{3\,\%r1-2}{6},\ x3=\frac{\%r1}{2},\ x4=\%r1\,]\,]$

(b) $x_1+x_2-3x_3+x_4=-2$

$x_1+x_2+x_3-x_4=2$

$x_1+x_2-x_3=0$

(%i1) eq1:x1+x2-3*x3+x4=-2; 解線性方程組，先建立好方程式 1，方程式 2，…，方程式 n，再用 solve([方程式 1 名稱，方程式 2 名稱，…，方程式 n 名稱]，[未知數 1，未知數 2，…，未知數 n])即可解線性方程組 //方程式 1：$x_1+x_2-3x_3+x_4=-2$ 名稱定爲 eq1

(%o1) $x4-3\,x3+x2+x1=-2$

(%i2) eq2:x1+x2+x3-x4=2;　//方程式 2：$x_1+x_2+x_3-x_4=2$ 名稱定爲 eq2

(%o2) $-x4+x3+x2+x1=2$

(%i3) eq3:x1+x2-x3=0;　//方程式 3：$x_1+x_2-x_3=0$ 名稱定爲 eq3

(%o3) $-x3+x2+x1=0$

(%i4) solve([eq1,eq2,eq3],[x1,x2,x3,x4]);　//用 slove 解線性方程組 eq1，eq2，eq3 和未知數 x1，未知數 x2，未知數 x3，未知數 x4，由解知 3 條方程式爲線性相依的，求得的解中%r2、%r3 代表任意數，x4=%r2，x3=$\frac{1}{2}$%r2+1，x2=%r3，x1=$\frac{-2\%r3+\%r2+2}{2}$，可知 x1、x2、x3、x4 是相互影響的。

solve: dependent equations eliminated: (1)

(%o4) $[[x1=\frac{-2\%r3+\%r2+2}{2}, x2=\%r3, x3=\frac{\%r2+2}{2}, x4=\%r2]]$

(c) $x_1+x_2-3x_3+x_4=-1$

$x_1+x_2+x_3-x_4=2$

$x_1+x_2-x_3=0$

(%i1) eq1:x1+x2-3*x3+x4=1;　解線性方程組，先建立好方程式 1，方程式 2，…，方程式 n，再用 solve([方程式 1 名稱，方程式 2 名稱，…，方程式 n 名稱]，[未知數 1，未知數 2，…，未知數 n])即可解線性方程組　//方程式 1：$x_1+x_2-3x_3+x_4=-1$ 名稱定爲 eq1

(%o1) $x4-3x3+x2+x1=1$

(%i2) eq2:x1+x2+x3-x4=2;　//方程式 2：$x_1+x_2+x_3-x_4=2$ 名稱定爲 eq2

(%o2) $-x4+x3+x2+x1=2$

(%i3) eq3:x1+x2-x3=0;　//方程式 3：$x_1+x_2-x_3=0$ 名稱定爲 eq3

(%o3) $-x3+x2+x1=0$

(%i4) solve([eq1,eq2,eq3],[x1,x2,x3,x4]); //用 slove 解線性方程組 eq1，eq2，eq3 和未知數 x1，未知數 x2，未知數 x3，未知數 x4，由解知此題無解

(%o4) [ ]

5.令 A 的簡約列梯形式爲$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$，若 A 的第一、第二列，及第四行分別爲$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 及$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$，試求矩陣 A

6.令 A 的簡約列梯形式爲$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，若 A 的第一、第三，及第六行分別爲$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, 及$\begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$，試求矩陣 A