Maxima 在線性代數上之應用

線性變化與矩陣

國立屏東教育大學 應用數學系 研究助理 徐偉玲

weilinghsu@mail.npue.edu.tw

日期：2009/8/4

第二章 線性變換與矩陣

2.1 線性變換、零核空間及值域

2 至 6，證明 T 爲一線性變換，並求出 N(T)及 R(T)的基底，再計算 T 的核次數及秩，並驗證維度定理，最後利用本節所得定理來決定 T 是否爲一對一或映成

2. T：$R^3 \to R^2$ 定義爲 $T(a_1, a_2, a_3)=(a_1-a_2, 2a_3)$

(%i1) load("linearalgebra"); 跟上面求 trace 的方法一樣，Maxima 本身沒有提供計算 rank 和 nullity 的指令，因此我們需要讀取 linearalgebra 這個模組提供的指令來求得 rank 和 nullity //讀入 linearalgebra 模組，接著就可以使用這個模組所提令

(%i2) T:matrix([1,0],[-1,0],[0,2]); //矩陣名稱爲 T，矩陣的第一列的元素有 1, 0，第二列的元素有-1, 0，第三列的元素有 0, 2

$$(\%o2) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(%i3) rank(T); 由於已經讀取 linearalgebra 模組所提供的指令打上 rank 來計算矩陣 T 的秩

(%o3) 2

(%i4) nullity(T); 由於已經讀取 linearalgebra 模組所提供的指令打上 nullity 來計算矩陣 T 的核次數

(%o4) 0

3. T：$R^2 \to R^3$ 定義爲 $T(a_1, a_2)=(a_1+a_2, 0, 2a_1-a_2)$

(%i1) load("linearalgebra"); //讀入 linearalgebra 模組，接著就可以使用這個模組所提令

(%o1)

C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.1/share/maxima/5.18.1/share/linearalgebra/line

(%i2) T:matrix([1,0,2],[1,0,-1]);　//矩陣名稱爲 T，矩陣的第一列的元素有 1, 0, 2，第二列的元素有 1, 0, -1

$$(\%o2)\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(%i3) rank(T);　//由於已經讀取 linearalgebra 模組所提供的指令打上 rank 來計算矩陣 T 的秩

(%o3) 2

(%i4) nullity(T);　//由於已經讀取 linearalgebra 模組所提供的指令打上 nullity 來計算矩陣 T 的核次數

(%o4) 1

4. T：$M_{2\times3}$(F)→$M_{2\times2}$(F)定義爲 $T\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11}-a_{12} & a_{13}+2a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(%i1) A:matrix([2,-1,0,0,0,0],[0,2,1,0,0,0],[0,0,0,0,0,0],[0,0,0,0,0,0]); //矩陣名稱爲 A，矩陣的第一列的元素有 2, -1, 0, 0, 0, 0，第二列的元素有 0, 2, 1, 0, 0, 0，第三列的元素有 0, 0, 0, 0, 0, 0，第四列的元素有 0, 0, 0, 0, 0, 0，

$$(\%o1)\quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(%i2) rank(A);　//計算矩陣 A 的秩

(%o2) 2

(%i3) nullity(A);　//計算矩陣 A 的核次數

(%o3) 4

5. T：P_2(R)→P_3(R)定義爲 T(f (x))=x f (x)+ f'(x)

(%i1) load("linearalgebra"); //讀入 linearalgebra 模組，接著就可以使用這個模組所提令

(%o1)

C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.1/share/maxima/5.18.1/share/linearalgebra/line

(%i2) T:matrix([0,1,0,0],[1,0,1,0],[0,2,0,1]); //矩陣名稱爲 T，矩陣的第一列的元素有 0, 1, 0, 0，第二列的元素有 1, 0, 1, 0，第三列的元素有 0, 2, 0, 1

(%o2) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(%i3) rank(T); //由於已經讀取 linearalgebra 模組所提供的指令打上 rank 來計算矩陣 T 的秩

(%o3) 3

(%i4) nullity(T); //由於已經讀取 linearalgebra 模組所提供的指令打上 nullity 來計算矩陣 T 的核次數

(%o4) 1

6. T：$M_{n\times n}$→F 定義爲 T(A)=tr(A)，其中 tr(A)=$\sum_{i=1}^{n} A_{ii}$

<u>2.2 線性變換的矩陣表示</u>

2.令β及γ分別表示 R^n 及 R^m 的標準有序基底，對下列線性變換 T：$R^n \to R^m$，試求$[T]_\beta^\gamma$

(a) T：$R^2 \to R^3$ 定義爲 $T(a_1, a_2)=(2a_1-a_2, 3a_1+4a_2, a_1)$

(%i1) T(a1,a2):=coord([2*a1-a2,3*a1+4*a2,a1]);　//定義一線性變換，加上 coord 表示座標

(%o1) $T(a1, a2):=coord([2\,a1-a2, 3\,a1+4\,a2, a1])$

(%i2) T(1,0);　//a1=1，a2=0 代入 T 中求得(2, 3, 1)

(%o2) coord([2, 3, 1])

(%i3) T(0,1);　//a1=0，a2=1 代入 T 中求得(-1, 4, 0)

(%o3) coord([-1, 4, 0])

(%i4) T:matrix([2,-1],[3,4],[1,0]);　//於是$[T]_\beta^\gamma=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

(%o4) $\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

(b) T：$R^3 \to R^2$ 定義爲 $T(a_1, a_2, a_3)=(2a_1+3a_2-a_3, a_1+a_3)$

(%i1) T(a1,a2,a3):=coord([2*a1+3*a2-a3,a1+a3]);　//定義一線性變換，加上 coord 表示座標

(%o1) $T(a1, a2, a3):=coord([2\,a1+3\,a2-a3, a1+a3])$

(%i2) T(1,0,0);　//a1=1，a2=0，a3=0 代入 T 中求得(2, 1)

(%o2) coord([2, 1])

(%i3) T(0,1,0);　//a1=0，a2=1，a3=0 代入 T 中求得(3, 0)

(%o3) coord([3, 0])

(%i4) T(0,0,1);　//a1=0，a2=0，a3=1 代入 T 中求得(-1, 1)

(%o4) coord([-1,1])

(%i5) T:matrix([2,3,-1],[1,0,1]);　//於是$[T]_{\beta}^{\gamma}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(%o5) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(c) T：R^3→R 定義爲 $T(a_1, a_2, a_3)=2a_1+a_2-3a_3$

(%i1) T(a1,a2,a3):=coord(2*a1+a2-3*a3);　//定義一線性變換，加上 coord 表示座標

(%o1) T(a1,a2,a3):=coord(2 a1+a2+(-3) a3)

(%i2) T(1,0,0);　//a1=1，a2=0，a3=0 代入 T 中求得(2)

(%o2) coord(2)

(%i3) T(0,1,0);　//a1=0，a2=1，a3=0 代入 T 中求得(1)

(%o3) coord(1)

(%i4) T(0,0,1);　//a1=0，a2=0，a3=1 代入 T 中求得(-3)

(%o4) coord(-3)

(%i5) T:matrix([2,1,-3]);　//於是$[T]_{\beta}^{\gamma}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

(%o5) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

(d) T：R^3→R^3 定義爲 $T(a_1, a_2, a_3)=(2a_2+a_3, -a_1+4a_2+5a_3, a_1+a_3)$

(%i1) T(a1,a2,a3):=coord(2*a2+a3,-a1+4*a2+5*a3,a1+a3);　//定義一線性變換，加上 coord 表示座標

(%o1) $T(a1, a2, a3) := coord(2\ a2+a3, -a1+4\ a2+5\ a3, a1+a3)$

(%i2) T(1,0,0);　//a1=1，a2=0，a3=0 代入 T 中求得(0, -1, 1)

(%o2) coord(0, -1, 1)

(%i3) T(0,1,0);　//a1=0，a2=1，a3=0 代入 T 中求得(2, 4, 0)

(%o3) coord(2, 4, 0)

(%i4) T(0,0,1);　//a1=0，a2=0，a3=1 代入 T 中求得(1, 5, 1)

(%o4) coord(1, 5, 1)

(%i5) T:matrix([0,2,1],[-1,4,5],[1,0,1]);　//於是$[T]_\beta^\gamma=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ -1 & 4 & 5\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

(%o5) $\begin{bmatrix}0 & 2 & 1\\ -1 & 4 & 5\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$

(e) T：$R^n \to R^n$ 定義爲 $T(a_1, a_2, \ldots, a_n)=(a_1, a_1, \ldots, a_1)$

(f) T：$R^n \to R^n$ 定義爲 $T(a_1, a_2, \ldots, a_n)=(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1)$

(g) T：$R^n \to R$ 定義爲 $T(a_1, a_2, \ldots, a_n)=a_1+a_n$

3.令 T：$R^2 \to R^3$ 定義爲 $T(a_1, a_2)=(a_1-a_2, a_1, 2a_1+a_2)$，令 β 爲 R^2 的標準有序基底且 γ={(1,1,0), (0,1,1), (2,2,3)}，試求$[T]_\beta^\gamma$，若 α={(1,2), (2,3)}，試求$[T]_\alpha^\gamma$

4.定義 T：$M_{2\times2}(R) \to P_2(R)$爲 $T\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=(a+b)+(2d)x+bx^2$，令 β={$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\}$且 $\gamma=\{1,x,x^2\}$，試求$[T]_\beta^\gamma$

5.令$\alpha=\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\}$，$\beta=\{1,x,x^2\}$及$\gamma=\{1\}$

(a)定義 T：$M_{2\times2}(F)\to M_{2\times2}(F)$爲 $T(A)=A^t$，試求$[T]_\alpha$

(b)定義 T：$P_2(R)\to M_{2\times2}(F)$爲 $T(f(x))=\begin{pmatrix}f'(0)&2f(1)\\0&f''(3)\end{pmatrix}$，試求$[T]_\beta^\alpha$

(c)定義 T：$M_{2\times2}(F)\to F$ 爲 $T(A)=tr(A)$，試求$[T]_\alpha^\gamma$

(d)定義 T：$P_2\to R$ 爲 $T(f(x))=f(2)$，試求$[T]_\beta^\alpha$

(e)若 $A=\begin{pmatrix}1&-2\\0&4\end{pmatrix}$，試求$[A]_\alpha$

(f)若 $f(x)=3-6x+x^2$，試求$[f(x)]_\beta$

2.3 線性變換的合成與矩陣乘法

2. (a)令 $A=\begin{pmatrix}1&3\\2&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&-3\\4&1&2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&1&4\\-1&-2&0\end{pmatrix}$, 及 $D=\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$，試求

A(2B+3C), (AB)D, 及 A(BD)

(%i1) A:matrix([1,3],[2,-1]); //矩陣名稱取名爲 A，矩陣第一列的元素有 1, 3，第二列的元素有 2, -1

(%o1) $\begin{bmatrix}1&3\\2&-1\end{bmatrix}$

(%i2) B:matrix([1,0,-3],[4,1,2]); //矩陣名稱定爲 B，矩陣第一列的元素有 1, 0, -3，第二列的元素有 4, 1, 2

(%o2) $\begin{bmatrix}1&0&-3\\4&1&2\end{bmatrix}$

(%i3) C:matrix([1,1,4],[-1,-2,0]); //矩陣名稱定爲 C，矩陣第一列的元素有 1, 1, 4，第二列的元素有-1, -2, 0

$$(\%o3)\quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

(%i4) D:matrix([2],[-2],[3]); //矩陣名稱定爲 D，矩陣第一列的元素有 2，第二列的元素有-2，第三列的元素有 3

$$(\%o4)\quad \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(%i5) A.(2*B+3*C); //計算 A(2B+3C) 矩陣相乘矩陣需用「.」而矩陣的純量乘法則是用「*」

$$(\%o5)\quad \begin{bmatrix} 20 & -9 & 18 \\ 5 & 10 & 8 \end{bmatrix}$$

(%i6) (A.B).D; //計算(矩陣 A 乘矩陣 B)乘矩陣 D

$$(\%o6)\quad \begin{bmatrix} 29 \\ -26 \end{bmatrix}$$

(%i7) A.(B.D); //計算矩陣 A 乘(矩陣 B 乘矩陣 D)

$$(\%o7)\quad \begin{bmatrix} 29 \\ -26 \end{bmatrix}$$

(b)令 $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \\ 5 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, 及 C=(4,0,3)，試求 A^t, A^tB, BC^t, CB 及 CA

(%i1) A:matrix([2,5],[-3,1],[4,2]); //矩陣名稱定爲 A，矩陣第一列的元素有 2, 5，第二列的元素有-3, 1，第三列的元素有 4, 2

(%o1) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

(%i2) B:matrix([3,-2,0],[1,-1,4],[5,5,3]); //矩陣名稱定爲 B，矩陣第一列的元素有 3, -2, 0，第二列的元素有 1, -1, 4，第三列的元素有 5, 5, 3

(%o2) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \\ 5 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

(%i3) C:matrix([4,0,3]); //矩陣名稱定爲 C，矩陣第一列的元素有 4, 0, 3

(%o3) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(%i4) transpose(A); //求矩陣 A 的轉置，轉置的指令爲 transpose(矩陣)

(%o4) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(%i5) transpose(A).B; //計算 $A^t B$

(%o5) $\begin{bmatrix} 23 & 19 & 0 \\ 26 & -1 & 10 \end{bmatrix}$

(%i6) B.transpose(C); //計算 BC^t

(%o6) $\begin{bmatrix} 12 \\ 16 \\ 29 \end{bmatrix}$

(%i7) C.B; //計算矩陣 C 和矩陣 B 的相乘

(%o7) $\begin{bmatrix} 27 & 7 & 9 \end{bmatrix}$

(%i8) C.A;　//計算矩陣 C 和矩陣 A 的相乘

(%o8) $\begin{bmatrix} 20 & 26 \end{bmatrix}$

2.4 可逆性與同構變換

2.5 座標變換矩陣

2.給定下列各對 R^2 的有序基底 β 及 β'，試求變換 β' 坐標至 β 坐標的坐標變換矩陣

(a) $\beta=\{e_1, e_2\}$ 及 $\beta'=\{(a_1, a_2), (b_1, b_2)\}$

(b $\beta=\{(-1,3), (2,-1)\}$ 及 $\beta'=\{(0,10), (5,0)\}$

(c) $\beta=\{(2,5), (-1,-3)\}$ 及 $\beta'=\{e_1,e_2\}$

(d) $\beta=\{(-4,3), (2,-1)\}$ 及 $\beta'=\{(2,-1), (-4,1)\}$

3.給定下列 $P_2(R)$的各對有序基底 β 及 β'，試求變換 β' 坐標至 β 坐標的坐標變換矩陣

(a) $\beta=\{x^2, x, 1\}$ 及 $\beta'=\{a_2x^2+a_1x+a_0, b_2x^2+b_1x+b_0, c_2x^2+c_1x+c_0\}$

(b) $\beta=\{1, x, x^2\}$ 及 $\beta'=\{a_2x^2+a_1x+a_0, b_2x^2+b_1x+b_0, c_2x^2+c_1x+c_0\}$

(c) $\beta=\{2x^2-x, 3x^2+1, x^2\}$ 及 $\beta'=\{1, x, x^2\}$

(d) $\beta=\{x^2-x+1, x+1, x^2+1\}$ 及 $\beta'=\{x^2+x+4, 4x^2-3x+2, 2x^2+3\}$

(e) $\beta=\{x^2-x, x^2+1, x-1\}$ 及 $\beta'=\{5x^2-2x-3, -2x^2+5x+5, 2x^2-x-3\}$

(f) $\beta=\{2x^2-x+1, x^2+3x-2, -x^2+2x+1\}$ 及 $\beta'=\{9x-9, x^2+21x-2, 3x^2+5x+2\}$

4.令 T 爲 R^2 上的線性算子且被定義爲 $T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a+b \\ a-3b \end{pmatrix}$，$\beta$ 表 R^2 的標準有序基底，且令 $\beta'=\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$，利用定理 2.23 及下列事實 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$，求$[T]_{\beta'}$

5.令 T 爲 $P_1(R)$上的線性算子且定義爲 T(p(x))=p’(x)，表示 p(x)的導數，令 $\beta=\{1, x\}$ 且 $\beta'=\{1+x, 1-x\}$，利用定理 2.23 下列事實 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$，求$[T]_{\beta'}$

6.對下列每一個矩陣 A 及有序基底 β，求$[L_A]_\beta$，同時，求一可逆矩陣 Q 使

$[L_A]_\beta = Q^{-1}AQ$

(a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$及$\beta=\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$

(b) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$及$\beta=\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$

(c) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$及$\beta=\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$

(d) $A=\begin{pmatrix} 13 & 1 & 4 \\ 1 & 13 & 4 \\ 4 & 4 & 10 \end{pmatrix}$及$\beta=\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$

2.6 對偶空間

3.底下給定向量空間 V 及基底β，試求 V^*的對偶基底β^*

(a) $V=R^3$，$\beta=\{(1,0,1), (1,2,1), (0,0,1)\}$

(b) $V=P_2(R)$，$\beta=\{1,x,x^2\}$

2.7 常係數齊次線性微分方程式

3.求下列微分方程式解空間的基底

(a) $y''+2y'+y=0$

(b) $y'''=y'$

(c) $y^{(4)}-2y^{(2)}+y=0$

(d) $y''+2y'+y=0$

(e) $y^{(3)}-y^{(2)}+3y^{(1)}+5=0$