以下將依據九年一貫數學部編教科書的章節內容，以 MAXIMA 軟體

解答國中三年級上學期習作以供國中生參考

目 錄

國中三年級上學期(第 5 冊)

第 1 章　相似三角形

1-1　縮放

1-2　相似三角形

1-3　相似形的應用

第 1 章綜合習題

第 2 章　圓

2-1　圓

2-2　圓與角

2-3　圓與多邊形

2-4　數學證明

第 2 章綜合習題

第 3 章　二次函數

3-1　二次函數與圖形

3-2　配方法與拋物線

第 3 章綜合習題

國中三年級下學期(第 6 冊)

第 1 章　機率與統計

1-1　資料的統計與分析

1-2　資料的分佈

1-3　機率

第 1 章綜合習題

第 2 章　回顧與前瞻

2-1　數與量

2-2　代數

2-3　幾何

2-4　綜合解題

國立屏東教育大學　應用數學系　研究助理　林于智

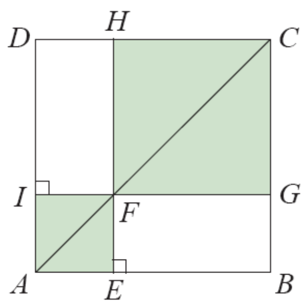
國中三年級上學期(第 5 冊)

第 1 章 相似三角形
1-1 縮放
1-2 相似三角形
1-3 相似形的應用
第 1 章綜合習題
第 2 章 圓
2-1 圓
2-2 圓與角
2-3 圓與多邊形
2-4 數學證明
第 2 章綜合習題
第 3 章 二次函數
3-1 二次函數與圖形
3-2 配方法與拋物線
第 3 章綜合習題

第 1 章 相似三角形 1-1 縮放

此題無法直接使用 Maxima 軟體

1.如右圖，有一矩形 ABCD，F 為 $\overline{AC}$ 上的一點，且 AEFI 面積：FGCH 面積：ABCD 面積=1：4：9，若 ABCD 面積為 120，求梯形 EBCF 的面積。



由於 AEFI 面積：FGCH 面積：ABCD 面積=1：4：9，
AEFI 面積：ABCD 面積=1：9 → AEFI 面積：120=1：9 → 120=9AEFI 面積，

因此，AEFI 面積=$\frac{120}{9}$，

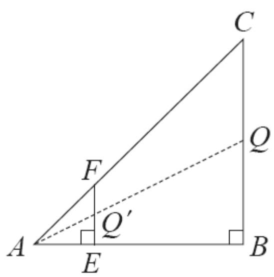
EBCF 的面積=ABCD 面積÷2-AEFI 面積÷2=120÷2-$\frac{120}{9}$÷2=$\frac{160}{3}$平方單位。

(%i1) (120/2)-((120/9)/2); ※直接輸入(120/2)-((120/9)/2) → ctrl+enter。

(%o1) $\frac{160}{3}$

此題無法直接使用 Maxima 軟體

2.如右圖，試回答下列問題：



(1)若 $\overline{AE}$=4，$\overline{EF}$=4，$\overline{BE}$=10，求 $\overline{AF}$ 、$\overline{BC}$ 、$\overline{AC}$ 。

$\overline{AE}$ ：$\overline{AB}=\overline{EF}$ ：$\overline{BC}$ → 4：14=4：$\overline{BC}$ → 56=4$\overline{BC}$，

因此，$\overline{BC}$=14，

(%i1) solve([56=4*x], [x]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([56=4*x], [x]) → ctrl+enter。

(%o1) [x=14]

$\overline{AC}=\sqrt{14^2+14^2}=\sqrt{392}$，

$\overline{AF}$ ：$\overline{AC}=\overline{AE}$ ：$\overline{AB}$ → $\overline{AF}$ ：$\sqrt{392}$=4：14 → 4$\sqrt{392}$=14$\overline{AF}$ ，

因此，$\overline{AF}$=4$\sqrt{2}$ ，

(%i3) solve([4*sqrt(392)=14*x], [x]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([4*sqrt(392)=14*x], [x]) → ctrl+enter。

(%o3) [x=4$\sqrt{2}$]

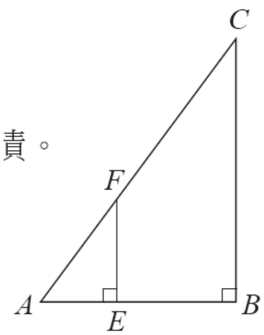
(2)若 A、Q’、Q 在同一直線上，求 $\overline{AQ'}$ ：$\overline{AQ}$ 。

$\overline{AQ'}$：$\overline{AQ}=\overline{AE}$：$\overline{AB}$=4：4+10=4：14=2：7。

此題無法直接使用 Maxima 軟體

3.如右圖，有一直角三角形 ABC，且 $\overline{EF}\perp\overline{AB}$，若 $\overline{AC}$=5，$\overline{AF}$=2。試回答下列問題：

責。



(1)求 $\overline{EF}$：$\overline{BC}$ 及 $\overline{AE}$：$\overline{AB}$。

由於 $\overline{EF}$：$\overline{BC}=\overline{AE}$：$\overline{AB}=\overline{AF}$：$\overline{AC}$，

而題意可知，$\overline{AF}$=2，$\overline{AC}$=5，

因此，$\overline{EF}$：$\overline{BC}=\overline{AE}$：$\overline{AB}=\overline{AF}$：$\overline{AC}$=2：5。

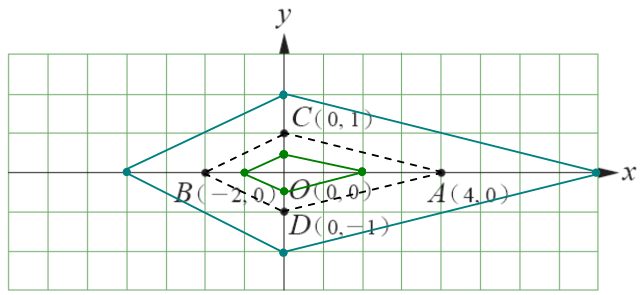
(2)求△AEF 面積：△ABC 面積。

令 $\overline{AE}$=r；$\overline{EF}$=k；$\overline{AB}$=r；$\overline{BC}$=k，

△AEF 面積：△ABC 面積=$\frac{2r\times 2k}{2}$：$\frac{5r\times 5k}{2}$=2r×2k：5r×5k=4rk：25rk=4：25。

此題無法直接使用 Maxima 軟體

4.將 A、B、C、D 各點分別由 O(0,0)點縮放 2 倍，求所對應的點 A'、B'、C'、D' 的坐標，並標示在坐標平面上。



縮小：

A’= $\sqrt{(4-0)^2+(0-0)^2}$ ÷2=2

B’= $\sqrt{(-2-0)^2+(0-0)^2}$ ÷2=1

C’= $\sqrt{(0-0)^2+(1-0)^2}$ ÷2= $\frac{1}{2}$

D’= $\sqrt{(0-0)^2+(-1-0)^2}$ ÷2= $\frac{1}{2}$

(%i1) sqrt((4-0)^2+(0-0)^2)/2; ※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 sqrt((4-0)^2+(0-0)^2)/2 → ctrl+enter。

(%o1) 2

(%i2) sqrt((-2-0)^2+(0-0)^2)/2; ※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 sqrt((-2-0)^2+(0-0)^2)/2 → ctrl+enter。

(%o2) 1

(%i3) sqrt((0-0)^2+(1-0)^2)/2; ※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 sqrt((0-0)^2+(1-0)^2)/2 → ctrl+enter。

(%o3) $\frac{1}{2}$

(%i4) sqrt((0-0)^2+(-1-0)^2)/2; ※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 sqrt((0-0)^2+(-1-0)^2)/2 → ctrl+enter。

(%o4) $\frac{1}{2}$

因此，縮小後的 A’(2,0)、B’(-1,0)、C’(0, $\frac{1}{2}$)、D’(0,- $\frac{1}{2}$)。圖中綠色部分。

放大：

A’= $\sqrt{(4-0)^2+(0-0)^2}$ ×2=8

B’= $\sqrt{(-2-0)^2+(0-0)^2}$ ×2=4

C’= $\sqrt{(0-0)^2+(1-0)^2}$ ×2=2

D’= $\sqrt{(0-0)^2+(-1-0)^2}$ ×2=2

(%i1) sqrt((4-0)^2+(0-0)^2)*2; ※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 sqrt((4-0)^2+(0-0)^2)*2 → ctrl+enter。

(%o1) 8

(%i2) sqrt((-2-0)^2+(0-0)^2)*2; ※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 sqrt((-2-0)^2+(0-0)^2)*2 → ctrl+enter。

(%o2) 4

(%i3) sqrt((0-0)^2+(1-0)^2)*2; ※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 sqrt((0-0)^2+(1-0)^2)*2 → ctrl+enter。

(%o3) 2

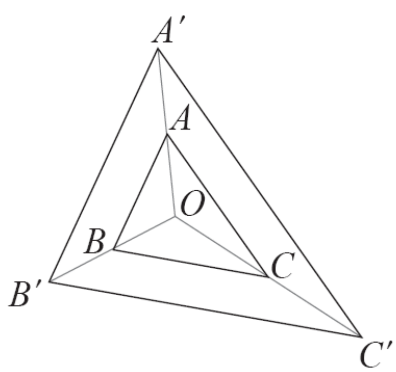
(%i4) sqrt((0-0)^2+(-1-0)^2)*2; ※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 sqrt((0-0)^2+(-1-0)^2)*2 → ctrl+enter。

(%o4) 2

因此，放大後的 A’(8,0)、B’(-4,0)、C’(0,2)、D’(0,-2)。圖中藍色部分。

此題無法直接使用 Maxima 軟體

5.如右圖，△ABC 中∠A=60°，∠B=75°，∠C=45°，△A’B’C’為由 O 將△ABC 縮放 2 倍的三角形。試說明 $\overline{A'B'} \,//\, \overline{AB}$ ，並求∠A’、∠B’、∠C’。

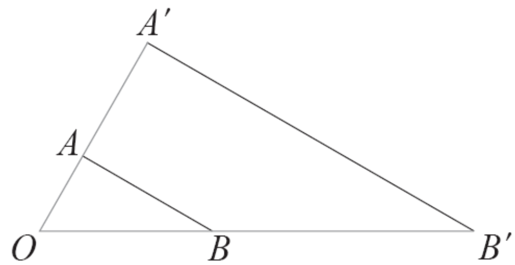


由於△ABC~△A’B’C’，
根據課本定理可知，
直線變成直線。若縮放前後的直線是相異兩直線，則此兩直線平行。
而角度保持不變。

因此，$\overline{A'B'} \,//\, \overline{AB}$ ，而∠A’=∠A=60°、∠B’=∠B=75°、∠C’=∠C=45°。

此題無法直接使用 Maxima 軟體

6.如右圖，$\overline{A'B'}$ 爲由 O 將 $\overline{AB}$ 縮放 $2\frac{1}{2}$ 倍的線段。若 $\overline{OA}$=x，$\overline{OB}$=y-3，$\overline{OA'}$=y，$\overline{OB'}$=5x，求 x、y。



$$\begin{cases} y = 2\frac{1}{2}x \\ 5x = 2\frac{1}{2}(y-3) \end{cases}$$

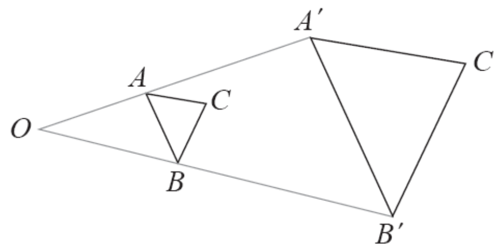
(%i1) solve([y=(2+1/2)*x,5*x=(2+2/1)*(y-3)], [x,y]);

※「solve([變數算式,變數算式], [變數,變數])」指令表示求解，輸入 solve([y=(2+1/2)*x,5*x=(2+2/1)*(y-3)], [x,y]) → ctrl+enter。

(%o1) [[x=$\frac{12}{5}$,y=6]]

此題無法直接使用 Maxima 軟體

7.如右圖，A’、B’、C’爲由 O 將 A、B、C 縮放 r 倍得到的點。若 $\overline{AB}$=10，$\overline{AC}$=8、$\overline{BC}$=12、$\overline{A'B'}$=25，求 r、$\overline{B'C'}$、$\overline{A'C'}$。



r=25÷10=$\frac{5}{2}$

(%i1) 25/10; ※直接輸入 25/10 → ctrl+enter。

(%o1) $\frac{5}{2}$

$\overline{B'C'}$=12×$\frac{5}{2}$=30

(%i2) 12*(5/2); ※直接輸入 12*(5/2) → ctrl+enter。

(%o2) 30

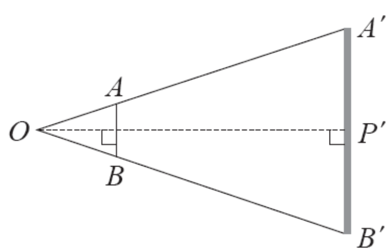
$\overline{A'C'}$=8×$\frac{5}{2}$=20 ※直接輸入 8*(5/2) → ctrl+enter。

(%i3) 8*(5/2);

(%o3) 20

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，光源 O 到銀幕的距離 $\overline{OP'}$=10，試回答下列的問題：



(1)若欲使 $\overline{AB}$ 在銀幕上影長爲 $\overline{AB}$ 的 5 倍，求 O 到 $\overline{AB}$ 的距離。

O 到 $\overline{AB}$ 的距離：O 到 $\overline{A'B'}$ 的距離=1：5，

O 到 $\overline{AB}$ 的距離：10=1：5 → 10=5 O 到 $\overline{AB}$ 的距離，

(%i1) solve([10=5*x], [x]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，

輸入 solve([10=5*x], [x]) → ctrl+enter。

(%o1) [x=2]

因此，O 到 $\overline{AB}$ 的距離=5。

(2)若欲使 $\overline{AB}$ 在銀幕上影長爲 $\overline{AB}$ 的 10 倍，求 O 到 $\overline{AB}$ 的距離。

O 到 $\overline{AB}$ 的距離：O 到 $\overline{A'B'}$ 的距離=1：10，

O 到 $\overline{AB}$ 的距離：10=1：10 → 10=10 O 到 $\overline{AB}$ 的距離，

(%i2) solve([10=10*x], [x]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，
輸入 solve([10=10*x], [x]) → ctrl+enter。

(%o2) [x=1]

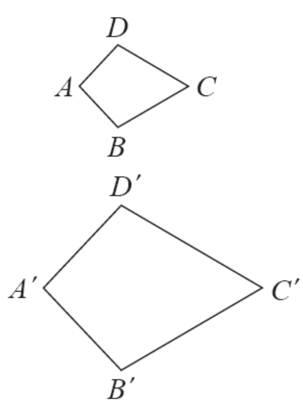
因此，O 到 $\overline{AB}$ 的距離=1。

(3)若光源和銀幕的距離 $\overline{OP'}$=10 固定，試在下表的空格填入正確的答案。並根據下表說明 $\overline{AB}$ 影長和 $\overline{AB}$ 的比值與 O 到 $\overline{AB}$ 的距離成反比。

$\frac{\overline{AB}\text{影長}}{\overline{AB}}$	1	2	3	4	5	10
O 到 $\overline{AB}$ 的距離	10	5	$\frac{10}{3}$	$\frac{5}{2}$	2	1

此題無法直接使用 Maxima 軟體

9.如右圖，四邊形 ABCD 爲一箏形，四邊形 A’B’C’D’是將 ABCD 縮放 2 倍的圖形，說明四邊形 A’B’C’D’仍是一箏形。



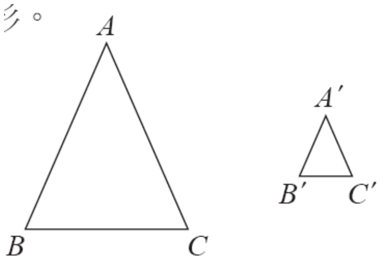
無論中心點 O 在哪裡，都有 $\overline{A'B'}=2\overline{AB}$ ，$\overline{B'C'}=2\overline{BC}$ ，$\overline{C'D'}=2\overline{CD}$ ，$\overline{A'D'}=2\overline{AD}$ ，

角度經縮放後，角的度數保持不變。

此題無法直接使用 Maxima 軟體

10.如右圖，△ABC 為一等腰三角形，而△A’B’C’是將△ABC 縮放$\frac{1}{3}$倍的圖形，說明△A’B’C’為一等腰三角形。

彡。



無論中心點 O 在哪裡，都有 $\overline{AB}=\frac{1}{3}\overline{A'B'}$ ，$\overline{BC}=\frac{1}{3}\overline{B'C'}$ ，$\overline{AC}=\frac{1}{3}\overline{A'C'}$ ，

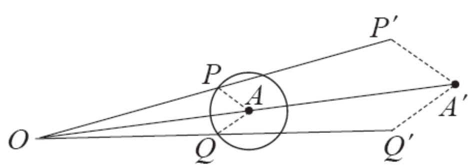
因為△ABC 為一等腰三角形，

所以，$\overline{AB}=\overline{AC}$ ，$\overline{A'B'}=\overline{A'C'}$ ，

因此，△A’B’C’也同為一等腰三角形。

此題無法直接使用 Maxima 軟體

11.如下圖，P、Q 為圓 A 上的兩點，A’、P’、Q’為由 O 將 A、P、Q 縮放兩倍的點。



(1)試說明$\overline{A'P'}=\overline{A'Q'}$ 。

由於 P、Q 為圓 A 上的兩點，

所以，同為圓 A 的半徑，因此，$\overline{AP}=\overline{AQ}$ ，

而 A’、P’、Q’為由 O 將 A、P、Q 縮放兩倍的點，

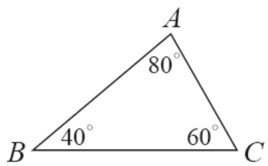
因此，$\overline{A'P'}=\overline{A'Q'}$ 。

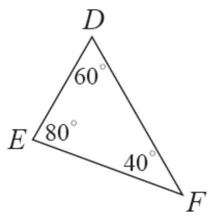
(2)若圓 A 為半徑為 5 的圓，求$\overline{A'P'}$ 。

$\overline{A'P'}=\overline{AP}\times 2=5\times 2=10$。

此題無法直接使用 Maxima 軟體

12.如右圖，已知兩三角形相似，試依據右圖的條件，求出 A、B、C 的對應點。

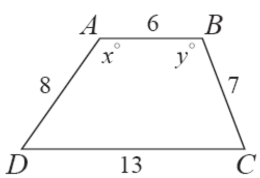


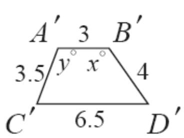


依據角度相等可知，A 的對應點為 E；B 的對應點為 F；C 的對應點為 D。

此題無法直接使用 Maxima 軟體

13.如右圖，兩梯形 ABCD 與 A’B’C’D’，依據右圖的條件，試說明此兩梯形相似，以及其頂點的對應關係。





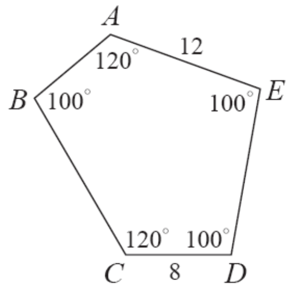
$\overline{AB}$ ： $\overline{B'A'}=\overline{BC}$ ： $\overline{A'C'}=\overline{CD}$ ： $\overline{C'D'}=\overline{AD}$ ： $\overline{B'D'}$ =2：1，

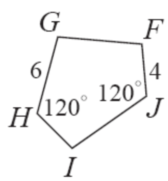
依據角度相等和邊長等比例可知，A 的對應點為 B’；B 的對應點為 A’；C 的對應點為 C’；D 的對應點為 D’。

此題無法直接使用 Maxima 軟體

14.已知右圖的兩個五邊形相似，其中 $\overline{CD}$=8，$\overline{AE}$=12，$\overline{FJ}$=4，$\overline{GH}$=6，試依據右

圖的條件，求出 A、B、C、D、E 的對應點。





由角度可知，∠A=∠H；∠C=∠J；

由邊長等比例可知，$\overline{CD}$ ： $\overline{JF}=\overline{AE}$ ： $\overline{HG}$ =2：1，

由上述可知，A 的對應點為 H；B 的對應點為 I；C 的對應點為 J；D 的對應點為 F；E 的對應點為 G。

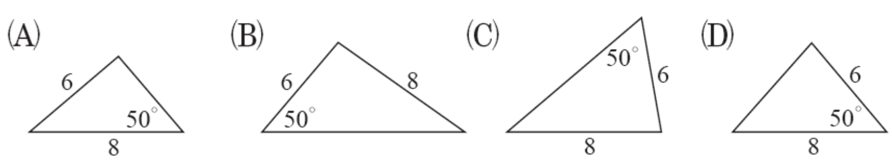
第 1 章 相似三角形 1-2 相似三角形

此題無法直接使用 Maxima 軟體

1.選擇題：

(B)(1)已知△ABC 中，∠A=55°、∠B=78°；△DEF 中，∠D=78°，若再知道下列哪一個條件，就可以知道△ABC 相似於△DEF？
(A)∠E=37° (B)∠F=47° (C)∠E=78° (D)∠F=78°

(D)(2)已知△ABC 中，$\overline{AB}$ =4、$\overline{AC}$ =3、∠BAC=50°。請問下列四個三角形中，哪一個與△ABC 相似？



(D)(3)在△ABC 與△DEF 中，已知$\overline{AB}$ ： $\overline{EF}=\overline{BC}$ ： $\overline{DE}$ ，若再知道下列哪一個條

件，就可以知道△ABC 相似於△DEF？

(A)∠A=∠E (B)∠A=∠F (C)∠B=∠D (D)∠B=∠E

(A)(4)已知△ABC 的三邊長爲 4、6、9；△DEF 的兩邊長爲 12、18。

甲：「如果△DEF 的第三邊長爲 8，則△DEF 相似於△ABC。」

乙：「如果△DEF 的第三邊長爲 15，則△DEF 相似於△ABC。」

丙：「如果△DEF 的第三邊長爲 27，則△DEF 相似於△ABC。」

下列的敘述中何者正確？

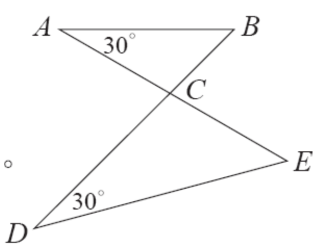
(A)只有甲是正確的。 (B)只有乙是正確的。

(C)只有丙是正確的。 (D)甲、丙均正確。

此題無法直接使用 Maxima 軟體

2.如右圖，$\overline{AE}$ 與 $\overline{BD}$ 相交於 C 點，試回答下面問題：

。



(1)說明△ABC 相似於△DEC。

★若兩三角形中兩組對應角相等，則此兩三角形相似。

由於∠A=∠D，∠C=∠C，(AA 相似性質)

因此，△ABC 相似於△DEC。

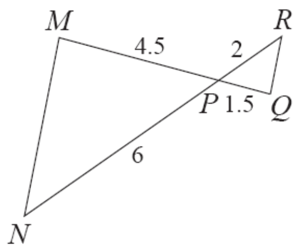
(2)若 $\overline{BC}$ ： $\overline{EC}$ =2：3，試求△ABC 面積：△DEC 面積。

★兩相似三角形面積的比爲對應邊平方的比。

△ABC 面積：△DEC 面積=2^2 ：3^2=4：9。

此題無法直接使用 Maxima 軟體

3.如右圖，$\overline{MQ}$ 與 $\overline{NR}$ 相交於 P 點，試回答下面問題：



(1)說明△PMN 相似於△PQR。

★兩三角形若有一組角相等，且夾此等角的兩組對應邊成比例，則此兩三角形相似。

由於∠P=∠P，$\overline{MP}$ ：$\overline{QP}$＝$\overline{NP}$ ：$\overline{RP}$=3：1，(SAS 全等性質)

因此，△PMN 相似於△PQR。

(2) $\overline{MN}$ 是否與 $\overline{QR}$ 平行？

是。

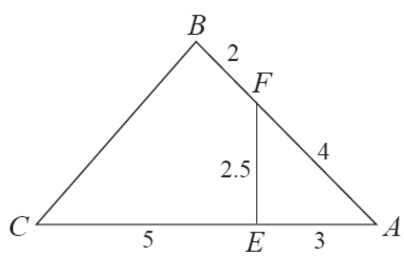
(3)求△MNP 面積：△QRP 面積。

★兩相似三角形面積的比爲對應邊平方的比。

△MNP 面積：△QRP 面積=6^2 ：2^2=36：4=9：1。

此題無法直接使用 Maxima 軟體

4.如右圖，試回答下面問題：



(1)說明△ABC 相似於△AEF。

★兩三角形若有一組角相等，且夾此等角的兩組對應邊成比例，則此兩三角形相似。

由於∠A=∠A，$\overline{AB}$ ：$\overline{AE}$＝$\overline{AC}$ ：$\overline{AF}$ =2：1，(SAS 全等性質)

因此，△ABC 相似於△AEF。

(2)求△ABC 面積：△AEF 面積。

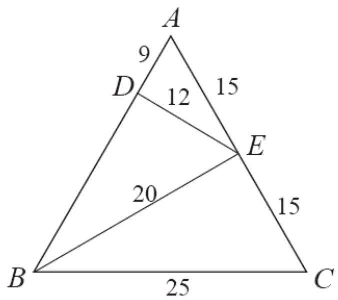
△ABC 面積：△AEF 面積=6^2 ：3^2=36：9=4：1。

(3)∠ABC 是否爲一直角？

是。

此題無法直接使用 Maxima 軟體

5.如右圖，試回答下列問題。



(1)說明△ADE 相似於△CEB。

★若兩三角形中三組對應邊成比例，則此兩三角形相似。

$\overline{AD}$ ： $\overline{CE}=\overline{DE}$ ： $\overline{EB}=\overline{AE}$ ： $\overline{CB}$=3：5，(SSS 全等性質)

因此，△ADE 相似於△CEB。

(2)求△ADE 面積：△BCE 面積。

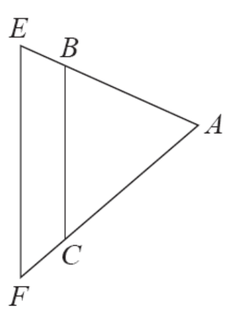
△ADE 面積：△BCE 面積=9^2 ：15^2=81：225=9：25。

(3)∠BEC 是否爲直角？

是。

此題無法直接使用 Maxima 軟體

6.如右圖 $\overline{EF}$ // $\overline{BC}$ ，試回答下列問題。



(1)試說明△ABC 相似於△AEF。

∠A=∠A，

由於， $\overline{EF}$ // $\overline{BC}$ ，而∠ABC=∠AEF，∠ACB=∠AFE，(AA 相似性質)

因此，△ABC 相似於△AEF。

(2)若$\overline{AB}$=5、$\overline{AC}$=6、$\overline{BC}$=6、$\overline{AF}$=8，求$\overline{AE}$、$\overline{EF}$。

$\overline{AC}:\overline{AF}=\overline{AB}:\overline{AE}$ → 6：8=5：$\overline{AE}$ → 40=6$\overline{AE}$，

(%i1) solve([40=6*x], [x]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([40=6*x], [x]) → ctrl+enter。

(%o1) [x=$\frac{20}{3}$]

因此，$\overline{AE}=\frac{20}{3}$，

$\overline{AC}:\overline{AF}=\overline{BC}:\overline{EF}$ → 6：8=6：$\overline{EF}$ → 48=6$\overline{EF}$，

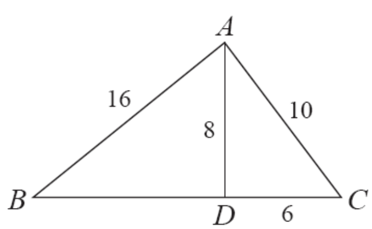
(%i2) solve([48=6*x], [x]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([48=6*x], [x]) → ctrl+enter。

(%o2) [x=8]

因此，$\overline{EF}$=8。

此題無法直接使用 Maxima 軟體

7.如圖中$\overline{AB}$=16、$\overline{AD}$=8、$\overline{AC}$=10、$\overline{CD}$=6，試問△ABD 是否與△CAD 相似？



$\overline{BD}=\sqrt{16^2-8^2}$=8$\sqrt{3}$

(%i1) sqrt(16^2-8^2); ※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 sqrt(16^2-8^2) → ctrl+enter。

(%o1) 8$\sqrt{3}$

比較邊長是否有成對比：$\frac{\overline{AB}}{\overline{CA}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}$ → $\frac{16}{6}=\frac{8\sqrt{3}}{6}$，

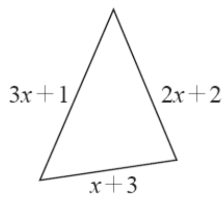
(%i2) compare(16/6,8*sqrt(3)/6); ※「compare(算式,算式)」指令表示展開算式，輸入 compare(16/6,8*sqrt(3)/6) → ctrl+enter。

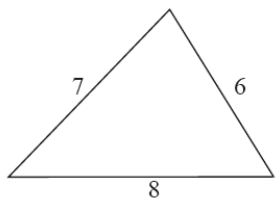
(%o2) >

經過邊長比可知，△ABD 與△CAD 不相似。

此題無法直接使用 Maxima 軟體

8.如右圖，兩個三角形相似，根據右圖的條件，求 x。





6：7=x+3：2x+2 → 7(x+3)=6(2x+2)，

(%i1) solve([7*(x+3)=6*(2*x+2)]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([7*(x+3)=6*(2*x+2)]) → ctrl+enter。

(%o1) [x=$\frac{9}{5}$]

7：8=2x+2：3x+1 → 8(2x+2)=7(3x+1)，

(%i2) solve([8*(2*x+2)=7*(3*x+1)]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([8*(2*x+2)=7*(3*x+1)]) → ctrl+enter。

(%o2) [x=$\frac{9}{5}$]

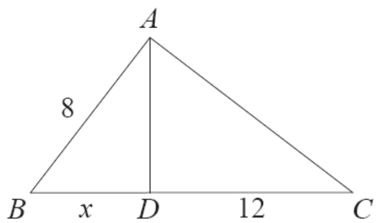
6：8= x+3：3x+1 → 8(x+3)=6(3x+1)，

(%i3) solve([8*(x+3)=6*(3*x+1)]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([8*(x+3)=6*(3*x+1)]) → ctrl+enter。

(%o3) [x=$\frac{9}{5}$]

此題無法直接使用 Maxima 軟體

9.如右圖，△ABC 和△ABD 相似，求 x。



8：12+x=x：8 → x(12+x)=8x8，

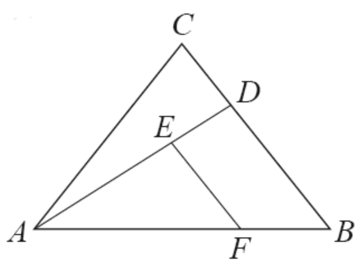
(%i1) solve([x*(12+x)=8*8]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([x*(12+x)=8*8]) → ctrl+enter。

(%o1) [x=4,x=-16]

負不符所求，因此，x=4。

此題無法直接使用 Maxima 軟體

10.如右圖，△ABC 中 $\overline{BD}$=2$\overline{CD}$，且 $\overline{AF}$ =2$\overline{FB}$，其中 $\overline{EF}$ // $\overline{BD}$，若△ABD 面積爲 36。試回答下面問題：



(1)求△AEF 的面積。

★兩相似三角形面積的比爲對應邊平方的比。

由於，$\overline{AF}$ =2$\overline{FB}$，所以，$\overline{AF}$ ：$\overline{FB}$=2：1，

而 $\overline{AF}$ ：$\overline{AB}$=2：3，根據定理可知，△AFE 面積：△ABD 面積=4：9，

△AFE 面積：36=4：9 → 36x4=9x△AFE 面積，

(%i1) solve([36*4=9*x], [x]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([36*4=9*x], [x]) → ctrl+enter。

(%o1) [x=16]

因此，△AFE 面積=16 平方單位。

(2)求△ADC 的面積。

$\overline{BD}$=2$\overline{CD}$ → $\overline{BD}$ ：$\overline{CD}$=2：1，

由於△ABD 面積與△ADC 面積同高，所以，邊長比=面積比，

△ABD 面積：△ADC 面積=2：1，

36：△ADC 面積=2：1 → 2×△ADC 面積=36×1，

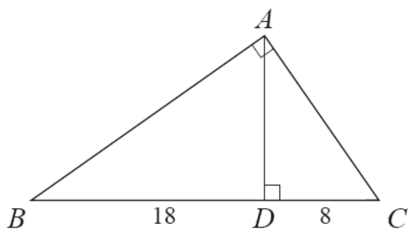
(%i2) solve([36=2*x], [x]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([36=2*x], [x]) → ctrl+enter。

(%o2) [x=18]

因此，△ADC 面積=18 平方單位。

此題無法直接使用 Maxima 軟體

11.如右圖，$\overline{AD}$ 爲直角三角形 ABC 斜邊 $\overline{BC}$ 上的高，已知 $\overline{BD}$=18、$\overline{DC}$ =8，求 $\overline{AD}$ 。



$\overline{BD}:\overline{AD}=\overline{AD}:\overline{DC}$ → $18:\overline{AD}=\overline{AD}:8$，

令 $\overline{AD}$=x → 18：x=x：8 → x^2=18×8，

(%i1) solve([x^2=18*8]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([x^2=18*8]) → ctrl+enter。

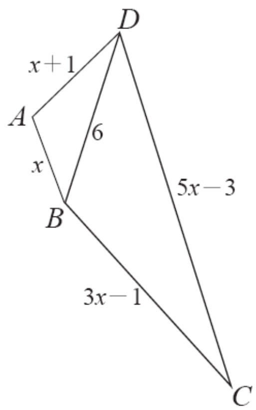
(%o1) [x=-12,x=12]

負不符所求，所以，x=12，

因此，$\overline{AD}$=12。

此題無法直接使用 Maxima 軟體

12.如右圖，已知 $\overline{AB}:\overline{BD}=\overline{BD}:\overline{DC}$ ，試回答下列問題：



(1)求 x。

$\overline{AB}:\overline{BD}=\overline{BD}:\overline{DC}$ → x：6=6：5x-3 → 6x6=x(5x-3)，

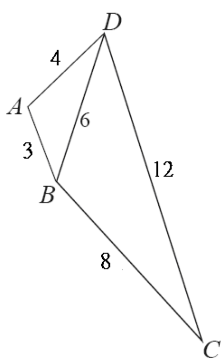
(%i1) solve([6*6=x*(5*x-3)]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([6*6=x*(5*x-3)]) → ctrl+enter。

(%o1) [x=3,x=-$\frac{12}{5}$]

負不符所求，因此，x=3。

(2)將 x 代入圖形後，說明△ABD 與△BDC 相似。

代入後如圖所示，

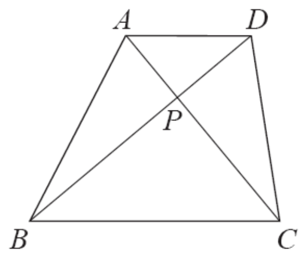


根據邊長等比可知，$\overline{AB}:\overline{BD}=\overline{AD}:\overline{BC}=\overline{BD}:\overline{DC}$ =2：1，(SSS 全等性質)

因此，△ABD 與△BDC 爲相似三角形。

此題無法直接使用 Maxima 軟體

13.如右圖，有一梯形 ABCD，其中 $\overline{AD}//\overline{BC}$。已知△BPC 的面積：△APD 的面積=9：4，求：



(1) $\overline{BP}$ ： $\overline{DP}$ 。

★兩相似三角形面積的比為對應邊平方的比。

△BPC 的面積：△APD 的面積=9：4，

因此，$\overline{BP}$ ： $\overline{DP}=\sqrt{9}$ ： $\sqrt{4}$ =3：2。

(%i1) sqrt(9); ※「sqrt(數值)」指令表示求開根號，輸入 sqrt(9) → ctrl+enter。

(%o1) 3

(%i2) sqrt(4); ※「sqrt(數值)」指令表示求開根號，輸入 sqrt(4) → ctrl+enter。

(%o2) 2

(2)若△APD 的面積為 16，求△ABP 的面積，及梯形 ABCD 的面積。

△BPC 的面積：△APD 的面積=9：4 → 9：4=x：16 → 4x=9×16，

(%i1) solve([4*x=9*16]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([4*x=9*16]) → ctrl+enter。

(%o1) [x=36]

因此，△BPC 的面積=36 平方單位，

△ABP 面積：△BPC 面積=2：3

△ABP 面積：36=2：3 → 3△ABP 面積=36×2，

(%i2) solve([3*a=36*2],[a]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([3*a=36*2],[a]) → ctrl+enter。

(%o2) [a=24]

因此，△ABP 的面積=24 平方單位，

△PDC 面積：△APD 面積=3：2

△PDC 面積：16=3：2 → 2△PDC 面積=16×3，

(%i3) solve([2*b=16*3],[b]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([2*b=16*3],[b]) → ctrl+enter。

(%o3) [b=24]

因此，△PDC 的面積=24 平方單位，

梯形 ABCD 的面積=24+24+16+36=100。

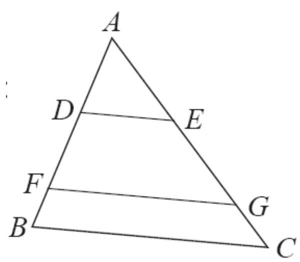
(%i4) 24+24+16+36; ※直接輸入 24+24+16+36 → ctrl+enter。

(%o4) 100

第 1 章 相似三角形 1-3 相似形的應用

此題無法直接使用 Maxima 軟體

1.如右圖，△ABC 中，$\overline{AB}$=10、$\overline{BC}$=12、$\overline{AC}$=15，且 $\overline{DE}$ // $\overline{FG}$ // $\overline{BC}$。已知 $\overline{AE}$：$\overline{EG}$：$\overline{GC}$=2：2：1，求：



(1) $\overline{AD}$

$\overline{AE}$：$\overline{EG}$：$\overline{GC}$=2：2：1=$\overline{AD}$：$\overline{DF}$：$\overline{FB}$，

2x+2x+x=15，

(%i1) solve([2*x+2*x+x=15]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([2*x+2*x+x=15]) → ctrl+enter。

(%o1) [x=3]

$\overline{AD}$=2x3=6。

(2) $\overline{FG}$

$\overline{DE}$：$\overline{BC}$=$\overline{AE}$：$\overline{AC}$ → $\overline{DE}$：12=2：5 → 12x2=5$\overline{DE}$，

(%i2) solve([12*2=5*x], [x]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([12*2=5*x], [x]) → ctrl+enter。

(%o2) [x=$\frac{24}{5}$]

$\overline{DE}$：$\overline{FG}$=$\overline{AE}$：$\overline{AG}$ → $\frac{24}{5}$：$\overline{FG}$=2：4 → 2$\overline{FG}$=$\frac{24}{5}$x4，

(%i3) solve([2*x=(24/5)*4], [x]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([2*x=(24/5)*4], [x]) →

ctrl+enter。

(%o3) $[x=\frac{48}{5}]$

因此，$\overline{FG}=\frac{48}{5}$ 。

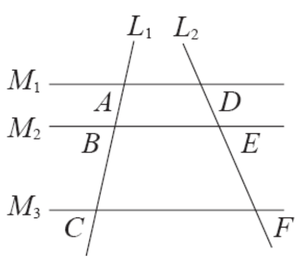
(3)△ADE 面積：△ABC 面積。

★兩相似三角形面積的比為對應邊平方的比。

△ADE 面積：△ABC 面積=6^2 ：15^2=36：225。

此題無法直接使用 Maxima 軟體

2.如右圖，三條相互平行的直線 M_1、M_2、M_3交直線 L_1於 A、B、C 三點，交直線 L_2於 D、E、F 三點。若 $\overline{AB}$=5、$\overline{BC}$=10、$\overline{AD}$=8、$\overline{DF}$=45、$\overline{CF}$=32，求 $\overline{DE}$ 、$\overline{EF}$ 、$\overline{BE}$ 。



5：$\overline{DE}$=15：45 → 15$\overline{DE}$=5×45，

(%i1) solve([15*x=5*45]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([15*x=5*45]) → ctrl+enter。

(%o1) [x=15]

因此，$\overline{DE}$=15。

$\overline{EF}$=45-15=30，

(%i2) 45-15; ※直接輸入 45-15 → ctrl+enter。

(%o2) 30

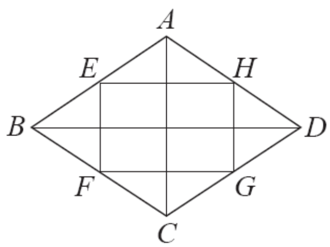
8：$\overline{BE}$=5：10 → 5$\overline{BE}$=8×10，

(%i3) solve([5*x=8*10]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([5*x=8*10]) → ctrl+enter。

(%o3) [x=16]

此題無法直接使用 Maxima 軟體

3.如右圖，E、F、G、H 分別是菱形 ABCD 各邊的中點。若已知 $\overline{AC}=8$、$\overline{BD}=12$，求：



(1) $\overline{EH}$

$\overline{EH}=\frac{\overline{BD}}{2}=\frac{12}{2}=6$。

(%i1) 12/2; ※直接輸入 12/2 → ctrl+enter。

(%o1) 6

(2) $\overline{EF}$

$\overline{EF}=\frac{\overline{EF}}{2}=\frac{8}{2}=4$。

(%i2) 8/2; ※直接輸入 8/2 → ctrl+enter。

(%o2) 4

(3)四邊形 EFGH 的面積。

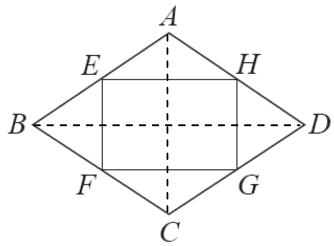
四邊形 EFGH 的面積=6x4=24 平方單位。

(%i3) 6*4; ※直接輸入 6*4 → ctrl+enter。

(%o3) 24

此題無法直接使用 Maxima 軟體

4.如右圖，E、F、G、H 分別是菱形 ABCD 各邊的中點，說明四邊形 EFGH 的面積是 ABCD 面積的 $\frac{1}{2}$ 倍。



連接$\overline{BD}$，

△AEH~△ABD，　(AA 相似)

而 E、F 分別為$\overline{AB}$ 、 $\overline{AD}$中點，

$\overline{EH}=\frac{1}{2}\overline{BD}$ ，

接著連接$\overline{AC}$ ，

△ACD~△DHG，　(AA 相似)

而 H、G 分別為$\overline{AD}$ 、 $\overline{CD}$中點，

$\overline{HG}=\frac{1}{2}\overline{AC}$ ，

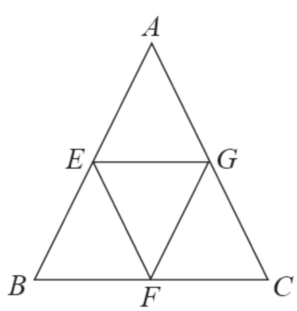
所以，菱形 ABCD 面積=($\overline{AC}\times\overline{BD}$)$\times\frac{1}{2}$ ，

四邊形 EFGH= $\overline{EH}\times\overline{HG}=\frac{1}{2}\times\overline{BD}\times\frac{1}{2}\times\overline{AC}=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BD}\times\frac{1}{2}$ ，

因此，四邊形 EFGH 的面積是 ABCD 面積的$\frac{1}{2}$倍。

此題無法直接使用 Maxima 軟體

5.如右圖，E、F、G 是△ABC 各邊的中點。若已知△ABC 的面積為 120，求：



(1)△AEG 的面積。

△AEG 的面積=$\frac{\Delta ABC\text{面積}}{4}=\frac{120}{4}$=30 平方單位。

(%i1) 120/4; ※直接輸入 120/4 → ctrl+enter。

(%o1) 30

(2)△EFG 的面積。

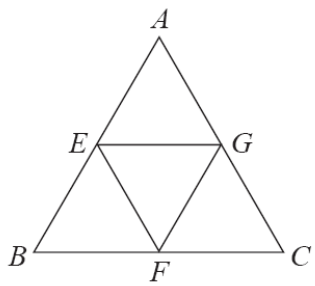
△EFG 的面積=$\frac{\Delta ABC\text{面積}}{4}=\frac{120}{4}$=30 平方單位。

(%i1) 120/4; ※直接輸入 120/4 → ctrl+enter。

(%o1) 30

此題無法直接使用 Maxima 軟體

6.如右圖，E、F、G 是正三角形 ABC 各邊中點。



(1)說明△EFG 是一正三角形。

如題所示，△ABC 屬於正三角形，而 E、F、G 是△ABC 各邊中點，

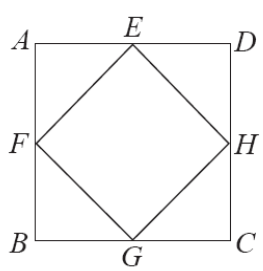
所以，△EFG 是一正三角形。

(2)求△EFG 面積：△ABC 面積。

△EFG 面積：△ABC 面積=1：4。

此題無法直接使用 Maxima 軟體

7.如右圖，E、F、G、H 是正方形 ABCD 各邊的中點。



(1)說明四邊形 EFGH 為一正方形。

根據題意所示，E、F、G、H 是正方形 ABCD 各邊的中點，

所以，ABCD 為一正方形，因此，EFGH 必也為是一正方形。

(2)若 $\overline{AB}=2$，求

① $\overline{EF}$

$\overline{EF}=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}$ 。

(%i1) sqrt(2^2+2^2);　※「sqrt(　算式　)」指令表示求開根號，輸入 sqrt(2^2+2^2 → ctrl+enter。

(%o1) $\sqrt{8}$

②正方形 EFGH 的面積：正方形 ABCD 的面積。

正方形 EFGH 的面積：正方形 ABCD 的面積= $\sqrt{8}\times\sqrt{8}$ ：(2+2)×(2+2)=8：16=1：2。

(%i2) sqrt(8)*sqrt(8);　※「sqrt(　數值　)」指令表示求開根號，輸入 sqrt(8)*sqrt(8) → ctrl+enter。

(%o2) 8

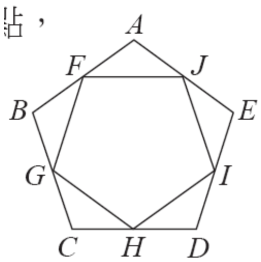
(%i3) (2+2)*(2+2);　※直接輸入(2+2)*(2+2) → ctrl+enter。

(%o3) 16

此題無法直接使用 Maxima 軟體

8.如右圖，F、G、H、I、J 是正五邊形 ABCDE 各邊的中點，試回答下列問題：

點，



(1)求∠JFG。

★正 n 邊形的每個內角為 $180^\circ-\dfrac{360^\circ}{n}$ 。

正五邊形的每個內角為 $180^\circ-\dfrac{360^\circ}{5}=108^\circ$

(%i1) 180-(360/5);　※直接輸入 180-(360/5) → ctrl+enter。

(%o1) 108

(2)說明 $\overline{FJ}=\overline{FG}$ 。

根據題意所示，F、G、H、I、J 是正五邊形 ABCDE 各邊的中點，

因此，每邊長必相等。

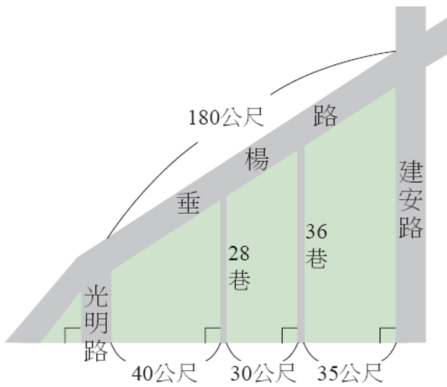
(3)說明五邊形 FGHIJ 是一正五邊形。

根據題意所示，F、G、H、I、J 是正五邊形 ABCDE 各邊的中點，

所以，ABCDE 爲一正五邊形，因此，FGHIJ 必也爲是一正五邊形。

應用問題 Maxima 軟體無法直接解

9.如右圖，從光明路到建安路，沿著垂楊路中間有兩條小巷。已知垂楊路從光明路口到建安路口共長 180 公尺，求垂楊路上，光明路口到 28 巷口、28 巷口到 36 巷口、36 巷口到建安路口的長度各約是多少公尺？（答案用四捨五入取整數值）



光明路口到 28 巷口：28 巷口到 36 巷口：36 巷口到建安路口=40：30：35=8：6：7。

令光明路口到 28 巷口爲 8x；28 巷口到 36 巷口爲 6x；36 巷口到建安路口爲 7x，

8x+6x+7x=180，

(%i1) solve([8*x+6*x+7*x=180]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([8*x+6*x+7*x=180]) → ctrl+enter。

(%o1) $[x=\frac{60}{7}]$

光明路口到 28 巷口=8x$\frac{60}{7}$=69 公尺。

(%i2) float(8*(60/7)); ※「float(算式)」指令表示將結果轉換爲小數，輸入 float(8*(60/7)) → ctrl+enter。

(%o2) 68.57142857142857

28 巷口到 36 巷口=6x$\frac{60}{7}$=51 公尺。

(%i3) float(6*(60/7)); ※「float(算式)」指令表示將結果轉換爲小數，輸入 float(6*(60/7)) → ctrl+enter。

(%o3) 51.42857142857143

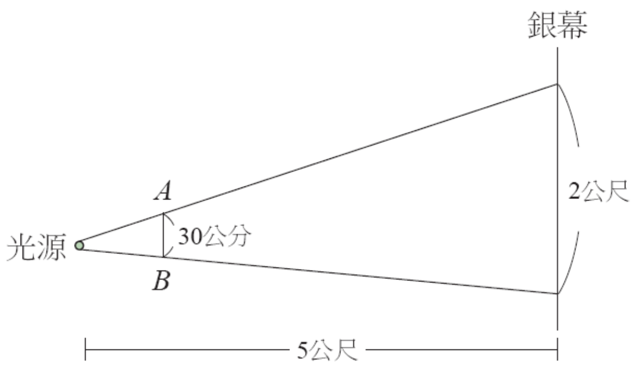
36 巷口到建安路口=7×$\frac{60}{7}$=51 公尺。

(%i4) float(7*(60/7)); ※「float(算式)」指令表示將結果轉換為小數，輸入 float(7*(60/7)) → ctrl+enter。

(%o4) 60.0

應用問題 Maxima 軟體無法直接解

10.如下圖，將長 30 公分的線段$\overline{AB}$，投到距離光源 5 公尺的銀幕上，若影像長 2 公尺，問$\overline{AB}$離光源幾公分？



2 公尺=200 公分；5 公尺=500 公分，

令$\overline{AB}$離光源為 x，

200：30=500：x → 30×500=200x，

(%i1) solve([30*500=200*x]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([30*500=200*x]) → ctrl+enter。

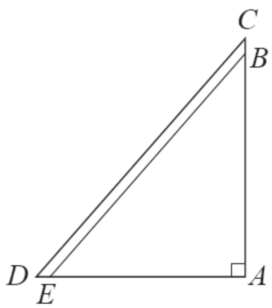
(%o1) [x=75]

因此，$\overline{AB}$離光源為 75 公分。

應用問題 Maxima 軟體無法直接解

11.如右圖，在陽光的照射下，高 50 公尺的尖塔$\overline{AB}$，其影子$\overline{AE}$長為 40 公尺。若尖塔頂端直立一枝避雷針（即$\overline{BC}$），此時避雷針的影長$\overline{DE}$為 1.2 公尺，試求避雷

針的長度 $\overline{BC}$ 。



令 $\overline{BC}$ 為 x，

40：50=1.2：x → 50x1.2=40x

(%i1) solve([50*1.2=40*x]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([50*1.2=40*x]) → ctrl+enter。

rat: replaced 60.0 by 60/1 = 60.0

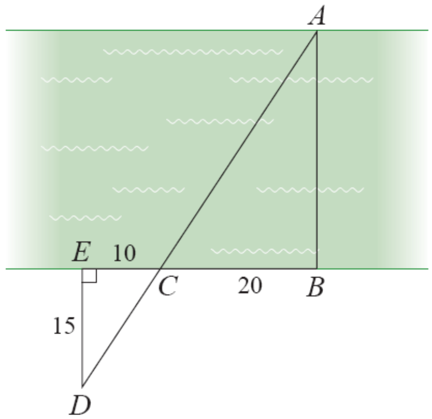
(%o1) $[x=\frac{3}{2}]$

因此，$\overline{BC}=\frac{3}{2}$ 公尺。

應用問題 Maxima 軟體無法直接解

12.如右圖，有一兩岸彼此平行的河流，小東想利用相似形的性質來測量河寬 $\overline{AB}$ ，自 B 點沿河岸走 20 公尺到達 C 點，再向前走到達 E 點，而後朝著與河岸垂直的方向到達 D 點，此時 A、C、D 三點共線，並量得 $\overline{DE}$ 長 15 公尺、$\overline{CE}$ 長 10 公尺。

試求河寬 $\overline{AB}$ 。



令 $\overline{AB}$ 為 x，

10：20=15：x → 20×15=10x，

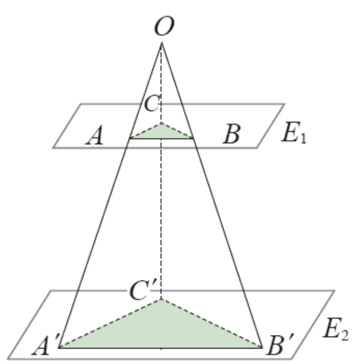
(%i1) solve([20*15=10*x]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([20*15=10*x]) → ctrl+enter。

(%o1) [x=30]

因此，$\overline{AB}$ =30 公尺。

此題無法直接使用 Maxima 軟體

13.如右圖，E_1、E_2 爲兩個水平面，現一光源 O 從高處將 E_1 上的△ABC 投影到 E_2 上的△A'B'C'。若 $\overline{OA}$=10、$\overline{AA'}$=20，試回答下面問題。



(1)若 $\overline{AC}$=6，求 $\overline{A'C'}$。

$\overline{OA}$ ： $\overline{OA'}$ = $\overline{AC}$ ： $\overline{A'C'}$ → 10：30=6： $\overline{A'C'}$ → 30x6=10 $\overline{A'C'}$，

(%i1) solve([30*6=10*x], [x]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([30*6=10*x], [x]) → ctrl+enter。

(%o1) [x=18]

因此，$\overline{A'C'}$=18。

(2)若 $\overline{OC}$=12，求 $\overline{OC'}$。

$\overline{OA}:\overline{OA'}=\overline{OC}:\overline{OC'}$ → 10：30=12：$\overline{OC'}$ → 30x12=10$\overline{OC'}$，

(%i2) solve([30*12=10*x], [x]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([30*12=10*x], [x]) → ctrl+enter。

(%o2) [x=36]

因此，$\overline{OC'}$=36。

(3)若 $\overline{BC}$=7，求 $\overline{B'C'}$。

$\overline{OA}:\overline{OA'}=\overline{BC}:\overline{B'C'}$ → 10：30=7：$\overline{B'C'}$ → 30x7=10$\overline{B'C'}$，

(%i3) solve([30*7=10*x], [x]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([30*7=10*x], [x]) → ctrl+enter。

(%o3) [x=21]

因此，$\overline{B'C'}$=21。

(4)若 $\overline{OB'}$=30，求 $\overline{OB}$。

$\overline{OA}:\overline{OA'}=\overline{OB}:\overline{OB'}$ → 10：30=$\overline{OB}$：30 → 30x$\overline{OB}$=10x30，

(%i4) solve([30*x=10*30], [x]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([30*x=10*30], [x]) → ctrl+enter。

(%o4) [x=10]

因此，$\overline{OB}$=10。

(5)若 $\overline{A'B'}$=24，求 $\overline{AB}$。

$\overline{OA}$ ： $\overline{OA'}=\overline{AB}$ ： $\overline{A'B'}$ → 10：30= $\overline{AB}$ ：24 → 30× $\overline{AB}$ =10×24，

(%i5) solve([30*x=10*24], [x]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([30*x=10*24], [x]) → ctrl+enter。

(%o5) [x=8]

因此， $\overline{AB}$ =8。

(6)說明△ABC~△A'B'C'。

根據題意可知 $\overline{OA}$ ： $\overline{AA'}$ =10：30=1：3，

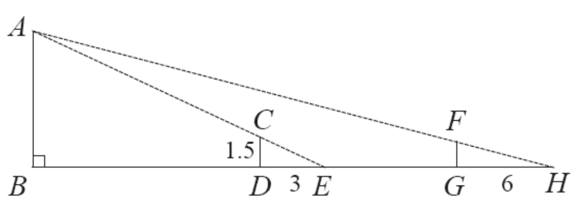
而剛剛的解題過程可知，

$\overline{AC}$ ： $\overline{A'C'}=\overline{OC}$ ： $\overline{OC'}=\overline{BC}$ ： $\overline{B'C'}=\overline{OB}$ ： $\overline{OB'}=\overline{AB}$ ： $\overline{A'B'}$ =1：3。

根據邊長等比例可知，△ABC~△A'B'C'(SSS 全等性質)。

應用問題 Maxima 軟體無法直接解

14.右圖為一示意圖。小東想知道燈塔的高度 $\overline{AB}$ 。他選定恰當的時間，在 D 點垂直豎立標竿 $\overline{CD}$，竿影 $\overline{DE}$ 為 3 公尺，而且 B、D、E 在同一直線上。同時，沿著 $\overrightarrow{DE}$ 方向上，小慧在 G 點也豎立同高的標竿 $\overline{FG}$ ，其影長 $\overline{GH}$ 為 6 公尺。若已知 $\overline{DG}$ 為 17 公尺，求 $\overline{AB}$ 。



△CDE~△ABE，

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{EB}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} \rightarrow \frac{3}{3+x}=\frac{1.5}{\overline{AB}} \rightarrow 3\overline{AB}=1.5(3+x) \rightarrow \overline{AB}=\frac{1.5(3+x)}{3}=\frac{3+x}{2}，$$

由於 $\overline{FG}=\overline{CD}$ =1.5，

又因△HGF~△HBA，

$\dfrac{\overline{HG}}{\overline{HB}}=\dfrac{\overline{FG}}{\overline{AB}} \rightarrow \dfrac{6}{6+17+x}=\dfrac{1.5}{\frac{3+x}{2}}$，

(%i1) solve([6/(6+17+x)=1.5/((3+x)/2)], [x]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([6/(6+17+x)=1.5/((3+x)/2)], [x]) → ctrl+enter。

rat: replaced -3.0 by -3/1 = -3.0 ※(註)rat：指令表示將小數化成分數。

(%o1) [x=17]

因此，$\overline{AB}=\dfrac{3+17}{2}$=10。

(%i2) (3+17)/2; ※直接輸入(3+17)/2 → ctrl+enter。

(%o2) 10

第 1 章 相似三角形 第 1 章綜合習題

$\boxed{\text{此題無法直接使用 Maxima 軟體}}$

1.選擇題：

(A)(1)下列敘述何者正確？

(A)若兩三角形全等，則此兩三角形必相似。

(B)若兩三角形相似，則此兩三角形必全等。

(C)若兩三角形相似，則對應邊必相等。

(D)以上敘述皆不正確。

(C)(2)下列敘述何者不正確？

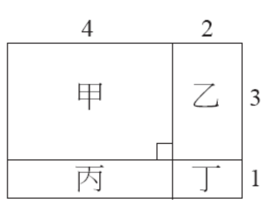
(A)任意兩正三角形必相似。

(B)任意兩正方形必相似。

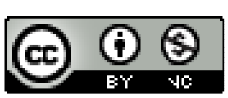
(C)任意兩矩形必相似。

(D)任意兩正五邊形必相似。

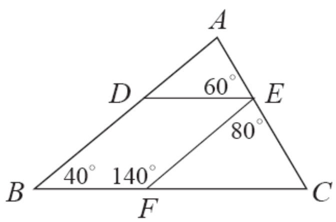
(B)(3)將右圖的矩形分割成甲、乙、丙、丁四個小矩形，哪一個與原矩形相似？



(A)甲。 (B)乙。 (C)丙。 (D)丁。



(A)(4)如右圖，已知∠B=40°、∠AED=60°、∠CEF=80°、∠BFE=140°，若$\overline{AD}$：$\overline{DB}$=2：3，則$\overline{DE}$：$\overline{FC}$等於下列哪一個比？



(A)2：3。 (B)2：4。 (C)2：5。 (D)2：6。

此題無法直接使用 Maxima 軟體

2.填充題：

(1)若相似的兩個三角形中，△ABC 的三邊長分別爲 4、5、6，而△DEF 的周長爲 10，則△DEF 是由△ABC 縮放_$\frac{2}{3}$_倍後的圖形，同時△DEF 最大邊的長爲_4_。

15x=10，

(%i1) solve([15*x=10], [x]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([15*x=10], [x]) → ctrl+enter。

(%o1) $[x=\frac{2}{3}]$

因此，$x=\frac{2}{3}$，

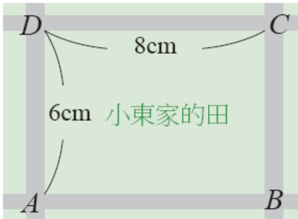
$6\times\frac{2}{3}=4$。

(%i2) 6*(2/3); ※直接輸入 6*(2/3) → ctrl+enter。

(%o2) 4

(2)若圖形甲縮放 3 倍後的圖形是乙，乙縮放 2 倍的圖形是丙，則丙是甲縮放_6_倍後的圖形；若圖形丙的面積是 64 平方公分，則甲的面積是_$\frac{16}{9}$_平方公分。

(3)小東家有一塊矩形田地，右圖爲其比例尺$\frac{1}{1000}$的地圖，則小東由 A 走直線到 C 的實際面積爲_480_平方公尺。



比例尺：$\frac{1}{1000}$

地圖面積=6x8=48 平方公分，

(%i1) 6*8; ※直接輸入 6*8 → ctrl+enter。

(%o1) 48

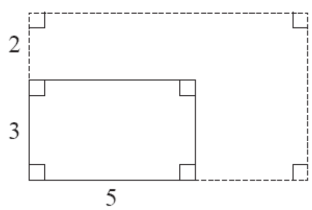
1：1000=48：x → 1000x48=x，

(%i2) solve([1000*48=x], [x]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([1000*48=x], [x]) → ctrl+enter。

(%o2) [x=48000]

因此，實際面積=48000 平方公分=480 平方公尺。

(4)如右圖，一矩形的長爲 5、寬爲 3，如果將長增加_$\frac{10}{3}$_、寬增加 2 之後，所得的新矩形會與原長方形相似。



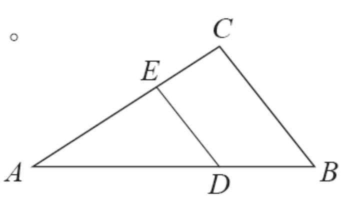
3：5=(3+2)：(5+x) → 5(3+2)=3(5+x)，

(%i1) solve([5*(3+2)=3*(5+x)], [x]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([5*(3+2)=3*(5+x)], [x]) → ctrl+enter。

(%o1) [x=$\frac{10}{3}$]

(5)如右圖，已知△ABC 中，E 在 $\overline{AC}$ 上且 $\overline{DE}$ // $\overline{BC}$ 。若 $\overline{AD}$ ： $\overline{DB}$=2：1，△ABC 的面積爲 36，則△ADE 的面積爲_4 平方單位_。

。



★兩相似三角形面積的比為對應邊平方的比。

$\overline{AD}$ ： $\overline{DB}$=2：1，$\overline{AD}$ ： $\overline{AB}$=2：3，

根據定理可知，令△ADE 的面積為 x，2：3=x： $\sqrt{36}$ → 3x=2× $\sqrt{36}$ ，

(%i1) solve([3*x=2*sqrt(36)], [x]);

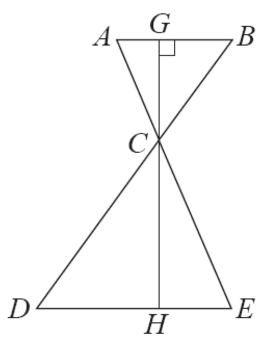
※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([3*x=2*sqrt(36)], [x]) → ctrl+enter。

(%o1) [x=4]

因此，△ADE 的面積=4 平方單位。

(6)如右圖，$\overline{AB} // \overline{DE}$ 且 $\overline{AE}$ 、 $\overline{BD}$ 、 $\overline{GH}$ 交於 C，$\overline{GH} \perp \overline{AB}$ 。若 $\overline{AB}$ =3、 $\overline{DE}$ =5、

$\overline{GH}$ =10，則



①△ABC 的面積為_$\frac{45}{8}$_，

②△CDE 的面積為_$\frac{125}{8}$_。

★兩相似三角形面積的比為對應邊平方的比。

$\overline{AB}$ ： $\overline{DE}$ =3：5

根據定理可知，令△ABC 的面積：△CDE 的面積=3^2 ：5^2=9：25，

令△ABC 高為 x；△CDE 高為 y，

9：25=3x×$\frac{1}{2}$ ：5y×$\frac{1}{2}$ → 25(3x×$\frac{1}{2}$)=9(5y×$\frac{1}{2}$)，

$$\begin{cases} 25(3x\times\frac{1}{2}) = 9(5y\times\frac{1}{2}) \\ x+y=10 \end{cases}$$

(%i1) solve([25*((3*x)/(1/2))=9*((5*y)/(1/2)),x+y=10], [x,y]);

※「solve([變數算式,變數算式], [變數,變數])」指令表示求解，輸入 solve([25*((3*x)/(1/2))=9*((5*y)/(1/2)),x+y=10], [x,y]) → ctrl+enter。

(%o1) $[[x=\frac{15}{4},y=\frac{25}{4}]]$

△ABC 的面積=$3\times\frac{15}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{45}{8}$，

(%i2) 3*(15/4)*(1/2);　※直接輸入 3*(15/4)*(1/2) → ctrl+enter。

(%o2) $\frac{45}{8}$

△CDE 的面積=$5\times\frac{25}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{125}{8}$。

(%i3) 5*(25/4)*(1/2);　※直接輸入 5*(25/4)*(1/2) → ctrl+enter。

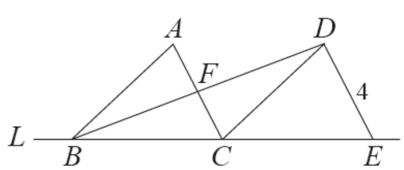
(%o3) $\frac{125}{8}$

(7)若△ABC 中，D 為 $\overline{AB}$ 中點，$\overline{DE}$ // $\overline{BC}$ 且交 $\overline{AC}$ 於 E。若 $\overline{AC}$ =8，則 $\overline{EC}$ =_4_。

(%i1) 8/2;　※直接輸入 8/2 → ctrl+enter。

(%o1) 4

(8)如右圖，△ABC≅△DCE，A、B、C 分別對應於 D、C、E；且 B、C、E 均在直線 L 上，F 為 $\overline{BD}$ 與 $\overline{AC}$ 的交點。若 $\overline{DE}$ =4，則 $\overline{CF}$ =__。



由於∠ACB=∠DEC，

而∠CDE=180°-∠DCE-∠DEC，

∠DCA=180°-∠ACB-∠DCE=180°-∠DEC-∠DCE，

且∠BAC=∠CDE，

所以，∠BAC=∠ACD，

又∠AFB=∠DFC，(對頂角相等)

因此，△AFB~△CFD，(AA 相似性質)

且 $\overline{AB}=\overline{CD}$ ， $\frac{\overline{AF}}{\overline{FC}}=\frac{1}{1}$ ，

因此，$\overline{CF}$ =4×$\frac{1}{2}$=2。

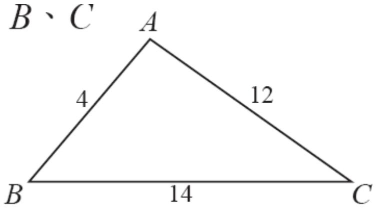
(%i1) 4*(1/2); ※直接輸入 4*(1/2) → ctrl+enter。

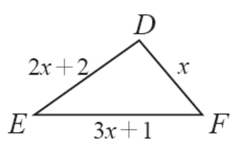
(%o1) 2

此題無法直接使用 Maxima 軟體

3.如右圖，已知△ABC 和△DEF 相似，求 x 以及 A、B、C 的對應點。

B、C





$\overline{AB}$ ： $\overline{DF}=\overline{AC}$ ： $\overline{DE}=\overline{BC}$ ： $\overline{FE}$ ；

$\overline{AB}$ ： $\overline{DF}=\overline{AC}$ ： $\overline{DE}$ → 4：x=12：2x+2 → 12x=4(2x+2)，

(%i1) solve([12*x=4*(2*x+2)], [x]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([12*x=4*(2*x+2)], [x]) → ctrl+enter。

(%o1) [x=2]

$\overline{AB}$ ： $\overline{DF}=\overline{BC}$ ： $\overline{FE}$ → 4：x=14：3x+1 → 14x=4(3x+1)，

(%i2) solve([14*x=4*(3*x+1)], [x]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([14*x=4*(3*x+1)], [x]) → ctrl+enter。

(%o2) [x=2]

$\overline{AC}$ ： $\overline{DE}=\overline{BC}$ ： $\overline{FE}$ → 12：2x+2=14：3x+1 → 14(2x+2)=12(3x+1)，

(%i3) solve([14*(2*x+2)=12*(3*x+1)], [x]);

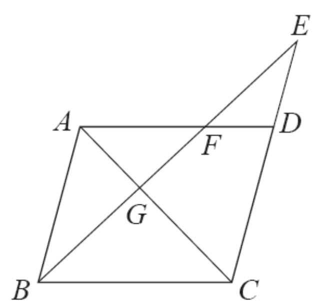
※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([14*(2*x+2)=12*(3*x+1)], [x]) → ctrl+enter。

(%o3) [x=2]

A 對應點為 D、B 對應點為 F、C 對應點為 E。

此題無法直接使用 Maxima 軟體

4.如右圖，已知 ABCD 為平行四邊形，F 為 $\overline{AD}$ 上一點，$\overline{BF}$ 與 $\overline{CD}$ 交於 E 點，且 $\overline{GF}$ =4、$\overline{BG}$ =6，求：



(1) $\overline{AG}$ ： $\overline{GC}$ 。

由題所示，ABCD 為平行四邊形，

$\overline{AF}$ // $\overline{BC}$ ，∠A=∠C，∠F=∠B，

所以，△AFG~△CBG，$\overline{AG}$ ： $\overline{GC}=\overline{FG}$ ： $\overline{GB}$ =4：6=2：3。

(2) $\overline{BG}$ ： $\overline{GE}$ 。

由於 $\overline{AB}$ // $\overline{CE}$ ，所以，△ABG~△CEG，

因此，$\overline{BG}$ ： $\overline{GE}=\overline{AG}$ ： $\overline{GC}$ =2：3。

(3) $\overline{EF}$ 。

$\overline{BG}$ ： $\overline{GE}$=2：3=6：x → 3×6=2x，

(%i1) solve([3*6=2*x], [x]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([3*6=2*x], [x]) → ctrl+enter。

(%o1) [x=9]

所以，$\overline{GE}$=9，

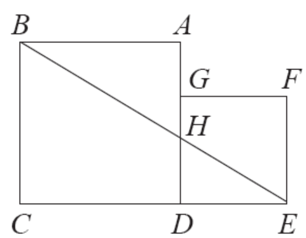
$\overline{EF}$=9-$\overline{GF}$=9-4=5。

(%i2) 9-4; ※直接輸入 9-4 → ctrl+enter。

(%o2) 5

此題無法直接使用 Maxima 軟體

5.如右圖，四邊形 ABCD 與 DEFG 均為正方形，邊長分別為 3 與 2，試求△ABH 面積。



△EHD~△EBC，

$\overline{ED}$ ： $\overline{EC}$ = $\overline{HD}$ ： $\overline{BC}$=2：5=x：3 → 5x=2×3，

(%i1) solve([5*x=2*3], [x]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([5*x=2*3], [x]) → ctrl+enter。

(%o1) [x=$\frac{6}{5}$]

所以，$\overline{HD}=\frac{6}{5}$，

$\overline{AH}=3-\frac{6}{5}=\frac{9}{5}$，

(%i2) 3-(6/5); ※直接輸入 3-(6/5) → ctrl+enter。

(%o2) $\frac{9}{5}$

$3\times\frac{9}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{27}{10}$ 平方單位。

(%i3) 3*(9/5)*(1/2); ※直接輸入 3*(9/5)*(1/2) → ctrl+enter。

(%o3) $\frac{27}{10}$

第 2 章 圓 2-1 圓

此題無法直接使用 Maxima 軟體

(B)(1)在坐標平面上，有一半徑為 3 以 A(1,2)為圓心的圓，下列哪個點會落在圓的外部？

(A)(3,3) (B)(-3,3) (C)(1,-1) (D)(0,0)

若距離大於半徑 3，則此點會落在圓的外部。

$\sqrt{(1-3)^2+(2-3)^2}$ =2.23606797749979

(%i1) float(sqrt((1-3)^2+(2-3)^2)); ※「float(算式)」指令表示將結果轉換為小數；「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 float(sqrt((1-3)^2+(2-3)^2)) → ctrl+enter。

(%o1) 2.23606797749979

$\sqrt{(1-(-3))^2+(2-3)^2}$ =4.123105625617661

(%i2) float(sqrt((1-(-3))^2+(2-3)^2)); ※「float(算式)」指令表示將結果轉換為小數；「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 float(sqrt((1-(-3))^2+(2-3)^2)) → ctrl+enter。

(%o2) 4.123105625617661

$\sqrt{(1-1)^2+(2-(-1))^2}$ =3.0

(%i3) float(sqrt((1-1)^2+(2-(-1))^2)); ※「float(算式)」指令表示將結果轉換為小數；「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 float(sqrt((1-1)^2+(2-(-1))^2)) → ctrl+enter。

(%o3) 3.0

$\sqrt{(1-0)^2+(2-0)^2}$ =2.23606797749979

(%i4) float(sqrt((1-0)^2+(2-0)^2)); ※「float(算式)」指令表示將結果轉換為小數；「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 float(sqrt((1-0)^2+(2-0)^2)) → ctrl+enter。

(%o4) 2.23606797749979

(C)(2)有一圓以 O(0,0)為圓心，半徑為 8，若將此圓以 O 為中心縮放 $\frac{1}{2}$ 倍後，下列哪一點在新的圓上？

(A)(-1,3) (B)(0,0) (C)(2,-2$\sqrt{3}$) (D)(2$\sqrt{2}$,0)。

(%i1) 8*(1/2); ※直接輸入 8*(1/2) → ctrl+enter。

(%o1) 4

圓以 O 為中心縮放 $\frac{1}{2}$ 倍後半徑為 4，若距離等於半徑 4，則此點會落在圓上。

$\sqrt{(0-(-1))^2+(0-3)^2}$ =3.16227766016838

(%i2) float(sqrt((0-(-1))^2+(0-3)^2)); ※「float(算式)」指令表示將結果轉換為小數；「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 float(sqrt((0-(-1))^2+(0-3)^2)) → ctrl+enter。

(%o2) 3.16227766016838

$\sqrt{(0-0)^2+(0-0)^2}$ =0.0

(%i3) float(sqrt((0-0)^2+(0-0)^2)); ※「float(算式)」指令表示將結果轉換為小數；「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 float(sqrt((0-0)^2+(0-0)^2)) → ctrl+enter。

(%o3) 0.0

$\sqrt{(0-2)^2+(0-(-2\sqrt{3}))^2}$ =4.0

(%i4) float(sqrt((0-2)^2+(0-(-2*sqrt(3)))^2)); ※「float(算式)」指令表示將結果轉換為小數；「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 float(sqrt((0-2)^2+(0-(-2*sqrt(3)))^2)) → ctrl+enter。

(%o4) 4.0

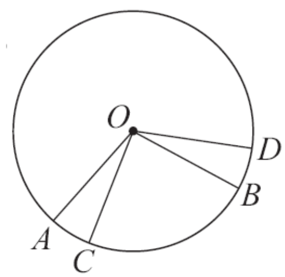
$\sqrt{(0-2\sqrt{2})^2+(0-0)^2}$ =2.828427124746191

(%i5) float(sqrt((0-2*sqrt(2))^2+(0-0)^2));

※「float(算式)」指令表示將結果轉換為小數;「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 float(sqrt((0-2*sqrt(2))^2+(0-0)^2)) → ctrl+enter。

(%o5) 2.828427124746191

(D)(3)如右圖，圓 O 上的兩劣弧 $\overset{\frown}{AB}$ 、 $\overset{\frown}{CD}$ 。若 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$ ，則下面哪一個敘述是錯的？



(A) $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$ (B) $\overline{AB}=\overline{CD}$

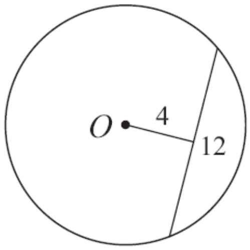
(C)O 到 $\overline{AB}$ 弦的弦心距等於 O 到 $\overline{CD}$ 弦的弦心距

(D)O 到 $\overline{AC}$ 弦的弦心距等於 O 到 $\overline{AB}$ 弦的弦心距。

(C)(4)下面哪一個敘述是錯的？
(A)若兩圓的兩外公切線相交，則此兩圓的半徑不相等。
(B)若兩圓有兩條內公切線，則此兩圓是外離的。
(C)若兩圓有內公切線段，則此線段長有可能會等於連心線段。
(D)若兩圓內切時，其公切線就是外公切線。

此題無法直接使用 Maxima 軟體

2.如右圖，圓 O 上有一長為 12 的弦，若弦心距為 4，求圓 O 半徑。



根據畢氏定理可知，

$\sqrt{4^2+(12\div 2)^2}=2\sqrt{13}$ 。

(%i1) sqrt(4^2+(12/2)^2); ※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 sqrt(4^2+(12/2)^2) → ctrl+enter。

(%o1) $2\sqrt{13}$

此題無法直接使用 Maxima 軟體

3.直角坐標平面上的三點 A(2,2)、B(2,4)、C(6,4)。若圓 O 是過 A、B、C 三點的圓，則

(1)求圓心 O 的坐標。

即為 $\overline{AC}$ 中點，

圓心 O 的坐標=($\frac{6+2}{2}$,$\frac{4+2}{2}$)=(4,3)。

(%i1) (6+2)/2; ※直接輸入(6+2)/2 → ctrl+enter。

(%o1) 4

(%i2) (4+2)/2; ※直接輸入(4+2)/2 → ctrl+enter。

(%o2) 3

(2)D(3,5)是否和 A、B、C 共圓？

半徑=直徑÷2=$\sqrt{(2-6)^2+(2-4)^2}$ ÷2=$\sqrt{5}$ ，

(%i3) sqrt((2-6)^2+(2-4)^2)/2; ※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 sqrt((2-6)^2+(2-4)^2)/2 → ctrl+enter。

(%o3) $\sqrt{5}$

求圓心(4,3)至 D(3,5)半徑是否為 $\sqrt{5}$ ，

$\sqrt{(4-3)^2+(3-5)^2}=\sqrt{5}$ ，

(%i4) sqrt((4-3)^2+(3-5)^2);

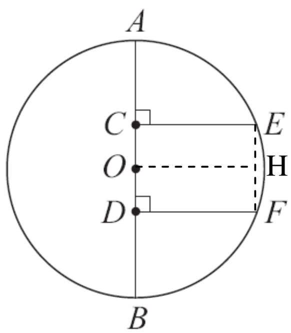
(%o4) $\sqrt{5}$
因此，D(3,5)是和 A、B、C 共圓。

此題無法直接使用 Maxima 軟體

4.試利用線對稱，說明圓上一弦的中垂線，平分該弦所對之圓心角。
圓上任一弦之中垂線，即把該弧平分，使它成為線對稱圖形，
而弧邊對的圓心角也隨之相等。

此題無法直接使用 Maxima 軟體

5.如右圖，$\overline{AB}$ 為圓的直徑，C、D 三等分 $\overline{AB}$，並且 $\overline{CE}$、$\overline{DF}$ 均垂直於 $\overline{AB}$。



試用線對稱說明四邊形 CDFE 為一矩形。

由 $\overline{AB}$ 為圓的直徑可知，C、D 三等分 $\overline{AB}$，則 $\overline{AC}=\overline{DB}$，

而圓心 O 為 $\overline{CD}$ 之中點，所以平分 $\overline{CD}$，因此，$\overline{CO}=\overline{OD}$。

在 $\overline{EF}$ 取中點 H，連接 $\overline{OH}$，

由 $\overline{CE}$、$\overline{DF}$ 均垂直於 $\overline{AB}$，

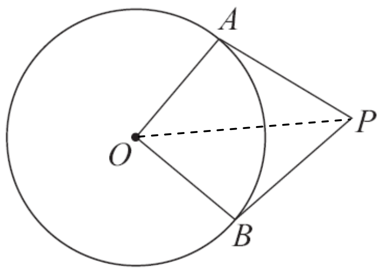
則以 $\overline{OH}$ 為對稱軸 F 重疊於 E，而 D 重疊於 C，

所以，$\angle E=\angle F=90^{\circ}$，
因此，四邊形 CDEF 為一矩形。

此題無法直接使用 Maxima 軟體

6.如右圖，$\overline{PA}$、$\overline{PB}$ 與半徑為 6 的圓 O 切於 A、B 兩點。若箏形 OBPA 的面積為

48，求



(1) $\overline{AP}$。

先將箏形 OBPA 面積分一半爲二個三角形 → 48÷2=24，

(%i1) 48/2;　※直接輸入 48/2 → ctrl+enter。

(%o1) 24

$\overline{AP}\times 6\times\frac{1}{2}=24$

(%i2) solve(x*6*(1/2)=24);　※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve(x*6*(1/2)=24) → ctrl+enter。

(%o2) [x=8]

因此，$\overline{AP}=8$。

(2) $\overline{OP}$。

根據畢氏定理可知，

$\overline{OP}=\sqrt{6^2+8^2}=10$。

(%i3) sqrt(6^2+8^2);　※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 sqrt(6^2+8^2) → ctrl+enter。

(%o3) 10

(3) $\overline{AB}$。

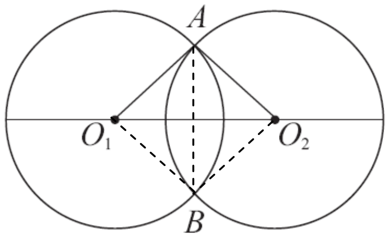
$\overline{AB}=\frac{OBPA面積}{\overline{OP}}\times 2=\frac{48}{10}\times 2=\frac{48}{5}$

(%i4) (48/10)*2;　※直接輸入(48/10)*2 → ctrl+enter。

(%o4) $\frac{48}{5}$

此題無法直接使用 Maxima 軟體

7.如右圖，等半徑 6 之兩圓 O_1、O_2 交於 A、B 兩點，若$\angle O_1 A O_2=90^\circ$，求



(1) $\overline{O_1O_2}$ 。

由於$\angle O_1 A O_2=90^\circ$，因此，根據畢氏定理可知，

$\overline{O_1O_2}=\sqrt{6^2+6^2}=\sqrt{72}$ 。

(%i1) sqrt(6^2+6^2); ※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 sqrt(6^2+6^2) → ctrl+enter。

(%o1) $\sqrt{72}$

(2)四邊形 $O_1 B O_2 A$ 的面積。

6x6=36 平方單位。

(%i2) 6*6; ※直接輸入 6*6 → ctrl+enter。

(%o2) 36

(3) $\overline{AB}$ 。

由於$\angle AO_1B=90^\circ$，因此，根據畢氏定理可知，

$\overline{AB}=\sqrt{6^2+6^2}=\sqrt{72}$ 。

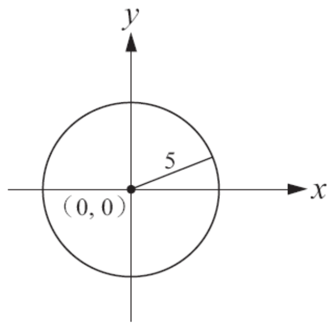
$\overline{O_1O_2}=\sqrt{6^2+6^2}=\sqrt{72}$ 。

(%i3) sqrt(6^2+6^2); ※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 sqrt(6^2+6^2) → ctrl+enter。

(%o3) $\sqrt{72}$

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，坐標平面上有一以(0,0)爲圓心，半徑爲 5 的圓。另有一圓，其半徑爲 2，圓心爲(a,0)。已知此兩圓相切，求 a。



★內切：r_2-r_1。

(1)當(a,0)在 y 軸的右側時，a=5-2=3，因此，在 Y 軸右側時的圓心為(3,0)。

(%i1) 5-2; ※直接輸入 5-2 → ctrl+enter。

(%o1) 3

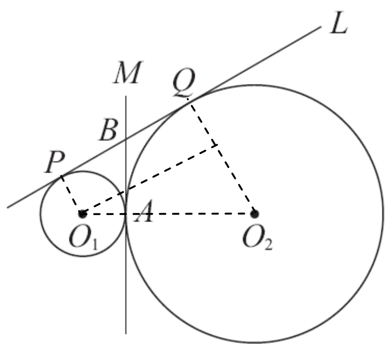
(2)當(a,0)在 y 軸的左側時，a=2-5=-3，因此，在 Y 軸右側時的圓心為(-3,0)。

(%i2) 2-5; ※直接輸入 2-5 → ctrl+enter。

(%o2) -3

此題無法直接使用 Maxima 軟體

9.如右圖，圓 O_1和圓 O_2外切於 A，內公切線 M 交外公切線 L 於 B，若已知圓 O_1半徑為 1，圓 O_2的半徑為 3。



(1)求$\overline{PQ}$。

因為$\overline{O_1P} \perp \overline{O_1Q}$，$\overline{O_2Q} \perp \overline{O_1Q}$，由 O_1作一條平行$\overline{PQ}$線段，

利用畢氏定理求出平行於$\overline{PQ}$的線段，

$\overline{PQ}=\sqrt{(3+1)^2-(3-1)^2}$ =2$\sqrt{3}$。

(%i1) sqrt((3+1)^2-(3-1)^2); ※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入

sqrt((3+1)^2-(3-1)^2) → ctrl+enter。

(%o1) $2\sqrt{3}$

(2)說明 $\overline{BP}=\overline{BA}=\overline{BQ}$ 。

由於 B 點爲圓 O_1 外一點，且 L 切於 P 點，M 切於 A 點，
根據原理可知，圓外一點作二切線切於兩點，則此點至兩切點等距，

也就是 $\overline{BP}=\overline{BA}$ ，$\overline{BQ}=\overline{BA}$ 如上得證，因此，$\overline{BP}=\overline{BA}=\overline{BQ}$ 。

(3)求 $\overline{BP}$ 。

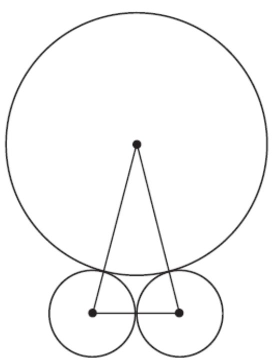
$\overline{BP}=\overline{BQ}=\dfrac{\overline{PQ}}{2}=\dfrac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$ 。

(%i2) (2*sqrt(3))/2;　※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入(2*sqrt(3))/2 → ctrl+enter。

(%o2) $\sqrt{3}$

此題無法直接使用 Maxima 軟體

10.如右圖，三圓兩兩相切，若已知三連心線段構成一等腰三角形，且腰長爲 6，底邊長爲 3，求這三圓的半徑。



由於此三角形爲等腰三角形，所以，下兩圓相等，因此半徑=3÷2=$\dfrac{3}{2}$ ，

(%i1) 3/2;　※直接輸入 3/2 → ctrl+enter。

(%o1) $\dfrac{3}{2}$

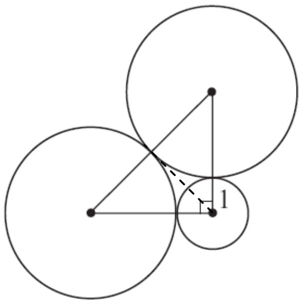
上圓半徑=6-$\dfrac{3}{2}=\dfrac{9}{2}$ 。

(%i2) 6-3/2;　※直接輸入 6-3/2 → ctrl+enter。

(%o2) $\frac{9}{2}$

此題無法直接使用 Maxima 軟體

11.如右圖，有三圓兩兩相切，若已知三連心線段構成一等腰直角三角形，且直角所在的圓半徑爲 1，求其他兩圓的半徑。



令全大圓半徑爲 x，

$$\begin{cases}\sqrt{(x+1)^2+(x+1)^2}=2x\\ \sqrt{x^2+x^2}=x+1\end{cases}$$

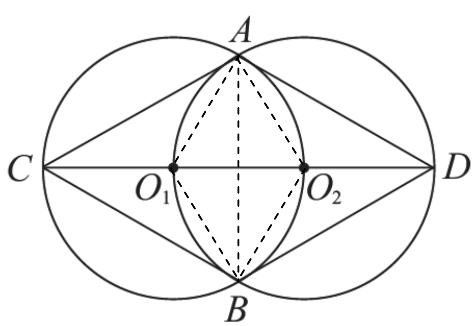
(%i1) solve([((x+1)^2+(x+1)^2)=(2*x)^2,(x^2+x^2)=(x+1)^2], [x]);

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([((x+1)^2+(x+1)^2)=(2*x)^2,(x^2+x^2)=(x+1)^2], [x]) → ctrl+enter。

(%o1) [[x=$\sqrt{2}$+1],[x=1-$\sqrt{2}$]]

此題無法直接使用 Maxima 軟體

12.如右圖，兩圓 O_1、O_2 交於 A、B 兩點，若 O_1 在圓 O_2 上，O_2 在圓 O_1 上，且 $\overleftrightarrow{O_1O_2}$ 另交圓 O_1 於 C，交圓 O_2 於 D。



(1)說明四邊形 ACBD 爲菱形。

由於 O_1 在圓 O_2 上，O_2 在圓 O_1 上，

所以，兩圓是相同，半徑也相同，因此，$\overline{CO_1}=\overline{O_1O_2}=\overline{O_2D}$，而 $\overline{O_1A}=\overline{O_1B}=\overline{O_2A}=\overline{O_2B}$，

由此可知各邊長都相等，而兩邊所夾的角度也相同，(SAS 全等性質)

$\overline{AC}=\overline{CB}=\overline{BD}=\overline{DA}$，因此，四邊形 ACBD 為菱形。

(2)若圓 O_1 及圓 O_2 的半徑為 2，求 ACBD 的面積。
對角線相乘÷2，

A 至 $\overline{O_1O_2}$ 中點=$\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$，

(%i1) sqrt(2^2-1^2); ※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 sqrt(2^2-1^2) → ctrl+enter。

(%o1) $\sqrt{3}$

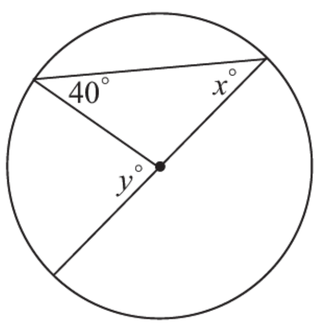
ACBD 的面積=(2+2+2)×($\sqrt{3}+\sqrt{3}$)÷2=6$\sqrt{3}$ 平方單位。

(%i2) (2+2+2)*(sqrt(3)+sqrt(3))/2; ※「sqrt(數值)」指令表示求開根號，輸入 (2+2+2)*(sqrt(3)+sqrt(3))/2 → ctrl+enter。

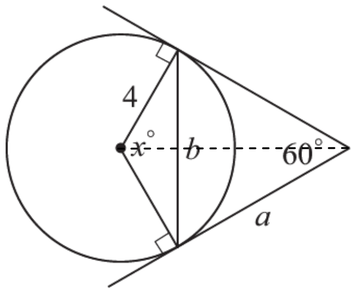
(%o2) 6$\sqrt{3}$

此題無法直接使用 Maxima 軟體

13.依據下圖中的條件，求出未知數的值：
(1)求 x、y。



邊長相等，屬於等腰三角形，
所以，x=40°，
y=40°+40°=80°。(二角之和等於另一角之外角)
(%i1) 40+40; ※直接輸入 40+40 → ctrl+enter。
(%o1) 80
(2)求 a、b、x。



$x=360^\circ-60^\circ-90^\circ-90^\circ=120^\circ$，

(%i1) 360-60-90-90; ※直接輸入 360-60-90-90 → ctrl+enter。

(%o1) 120

★30-60-90 → 1：$\sqrt{3}$：2

$\sqrt{3}$：2=x：4 → 2x=4$\sqrt{3}$，

(%i2) solve([2*x=4*sqrt(3)], [x]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([2*x=4*sqrt(3)], [x]) → ctrl+enter。

(%o2) [x=2$\sqrt{3}$]

因此，b=2$\sqrt{3}$x2=4$\sqrt{3}$，

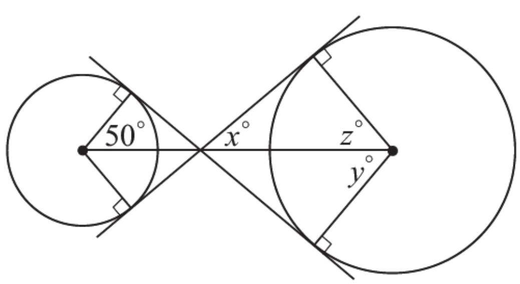
(%i3) 2*sqrt(3)*2; ※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 2*sqrt(3)*2 → ctrl+enter。

(%o3) 4$\sqrt{3}$

由於它是屬於正三角形，因此，三個角相等，所以，三邊相等。

a=4$\sqrt{3}$。

(3)求 x、y、z。



此兩箏形爲相似圖。

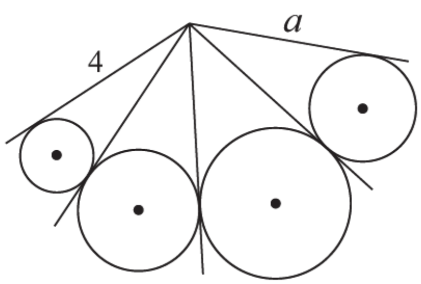
$z=y=50^\circ$，

x=(360-90-90-50-50)÷2=40°。

(%i1) (360-90-90-50-50)/2; ※直接輸入(360-90-90-50-50)/2 → ctrl+enter。

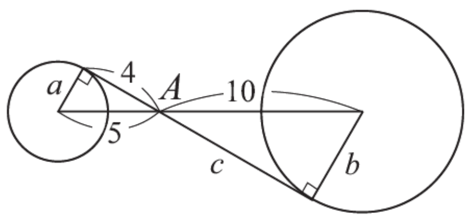
(%o1) 40

(4)求 a。



圓外一點到圓兩切線是等長，因此，a=4。

(5)求 a、b、c。



兩三角形爲相似三角形。

a=$\sqrt{5^2-4^2}$=3，

(%i1) sqrt(5^2-4^2); ※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 sqrt(5^2-4^2) → ctrl+enter。

(%o1) 3

c=4×2=8，

(%i2) 4*2; ※直接輸入 4*2 → ctrl+enter。

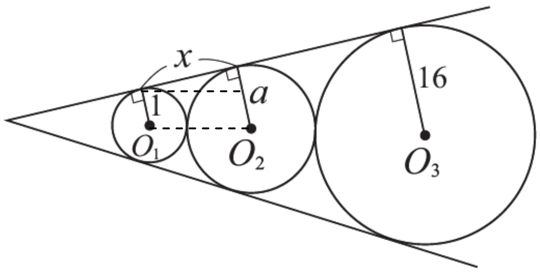
(%o2) 8

a=3×2=6。

(%i3) 3*2; ※直接輸入 3*2 → ctrl+enter。

(%o3) 6

(6)求 a、x。



★$\frac{r_2}{r_1}=\frac{r_3}{r_2}$。

$\frac{a}{1}=\frac{16}{a}$，

(%i1) solve([(a/1)=(16/a)], [a]);

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([(a/1)=(16/a)], [a]) → ctrl+enter。

(%o1) [a=-4,a=4]

負不符所求，因此，a=4。

x=$\sqrt{(1+4)^2-(4-1)^2}$ =4。

(%i2) sqrt((1+4)^2-(4-1)^2);

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 sqrt((1+4)^2-(4-1)^2) → ctrl+enter。

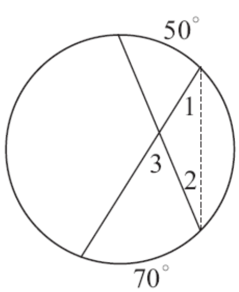
(%o2) 4

第 2 章 圓 2-2 圓與角

此題無法直接使用 Maxima 軟體

1.根據圖中的數據，求∠1、∠2、∠3。

(1)



★圓周角等於其所對弧度的一半。

★三角形兩內角之和等於另一角之外角。

∠1=70°÷2=35°，

(%i1) 70/2; ※直接輸入 70/2 → ctrl+enter。

(%o1) 35

∠2=50°÷2=25°，

(%i2) 50/2; ※直接輸入 50/2 → ctrl+enter。

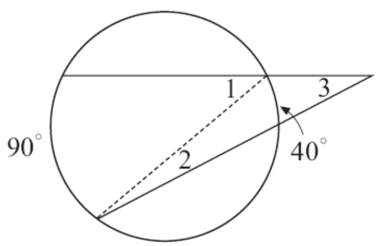
(%o2) 25

∠3=∠1+∠2=35°+25°=60°。

(%i3) 35+25; ※直接輸入 35+25 → ctrl+enter。

(%o3) 60

(2)



★圓周角等於其所對弧度的一半。

★三角形兩內角之和等於另一角之外角。

∠1=90°÷2=45°，

(%i1) 90/2; ※直接輸入 90/2 → ctrl+enter。

(%o1) 45

∠1=40°÷2=20°，

(%i2) 40/2; ※直接輸入 40/2 → ctrl+enter。

(%o2) 20

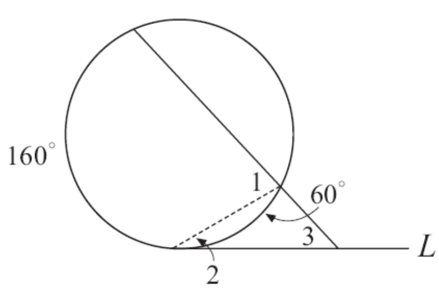
∠1=∠2+∠3 → 45°=20°+∠3，

(%i3) solve([45=20+x], [x]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，
輸入 solve([45=20+x], [x]) → ctrl+enter。

(%o3) [x=25]

因此，∠3=25°。

(3)如右圖，直線 L 是圓的切線。



★圓周角等於其所對弧度的一半。

$\angle 1=160^\circ \div 2=80^\circ$，

(%i1) 160/2; ※直接輸入 160/2 → ctrl+enter。

(%o1) 80

$\angle 2=60^\circ \div 2=30^\circ$，

(%i2) 60/2; ※直接輸入 60/2 → ctrl+enter。

(%o2) 30

$\angle 3+\angle 2=\angle 1 \rightarrow \angle 3+30^\circ=80^\circ \rightarrow \angle 3=80^\circ-30^\circ=50^\circ$。

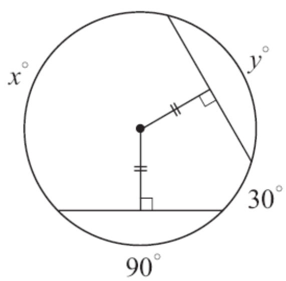
(%i3) 80-50; ※直接輸入 80-50 → ctrl+enter。

(%o3) 30

此題無法直接使用 Maxima 軟體

2.根據圖中的數據，求出未知數的值。

(1)求 x、y。



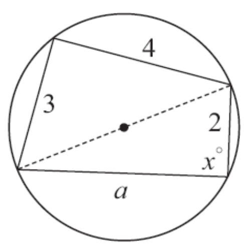
y=90°，

$x=360^\circ-90^\circ-30^\circ-90^\circ=150^\circ$。

(%i1) 360-90-30-90; ※直接輸入 360-90-30-90 → ctrl+enter。

(%o1) 150

(2)若一對角線通過圓心，求 x、a。



x=90°，

直徑=$\sqrt{4^2+3^2}$=5，

(%i1) sqrt(4^2+3^2); ※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 sqrt(4^2+3^2) →

ctrl+enter。

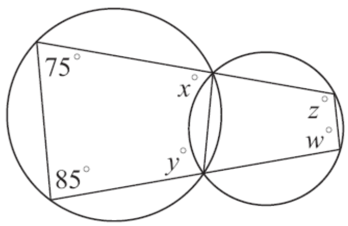
(%o1) 5

a=$\sqrt{5^2-2^2}=\sqrt{21}$ 。

(%i2) sqrt(5^2-2^2);

(%o2) $\sqrt{21}$

(3)求 x、y、z、w。



★圓周角等於其所對弧度的一半。

x=(360°-85°×2)÷2=95°，

(%i1) (360-85*2)/2; ※直接輸入(360-85*2)/2 → ctrl+enter。

(%o1) 95

y=(360°-75°×2)÷2=95°，

(%i2) (360-75*2)/2; ※直接輸入(360-75*2)/2 → ctrl+enter。

(%o2) 105

x 的補角=180°-95°=85°，

(%i3) 180-95; ※直接輸入 180-95 → ctrl+enter。

(%o3) 85

w=(360°-85°×2)÷2=95°，

(%i4) (360-85*2)/2; ※直接輸入(360-85*2)/2 → ctrl+enter。

(%o4) 95

y 的補角=180°-105°=75°，

(%i5) 180-105; ※直接輸入 180-105 → ctrl+enter。

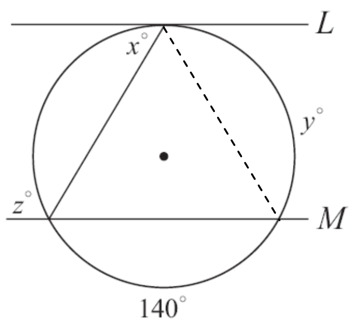
(%o5) 75

z= y=(360°-75°×2)÷2=95°。

(%i6) (360-75*2)/2; ※直接輸入(360-75*2)/2 → ctrl+enter。

(%o6) 105

(4)L 和圓相切且 L//M，求 x、y、z。



三角形角度分別為 70° - 55° - 55°，

y=55°×2=110°，

(%i1) 55*2; ※直接輸入 55*2 → ctrl+enter。

(%o1) 110

z=180°-55°=125°，

(%i2) 180-55; ※直接輸入 180-55 → ctrl+enter。

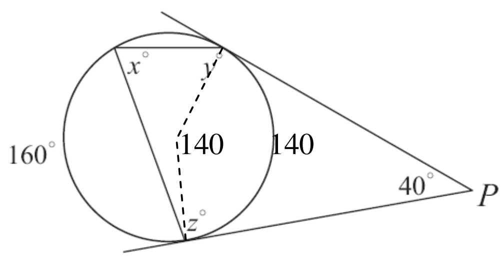
(%o2) 125

x=110°÷2=55

(%i3) 110/2; ※直接輸入 110/2 → ctrl+enter。

(%o3) 55

(5) ∠P 的兩邊和圓切於兩點，求 x、y、z。



x=$\frac{1}{2}$(360-90-90-40)=70，

(%i1) (1/2)*(360-90-90-40); ※直接輸入(1/2)*(360-90-90-40) → ctrl+enter。

(%o1) 70

y=$\frac{1}{2}$(160+140)=150

(%i2) (1/2)*(160+140); ※直接輸入(1/2)*(160+140) → ctrl+enter。

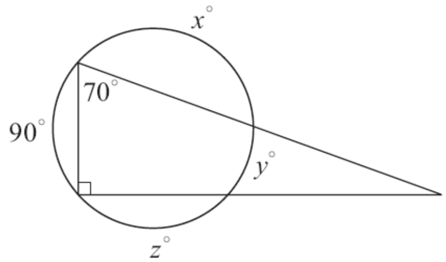
(%o2) 150

z=$\frac{1}{2}$(360-160)=100。

(%i3) (1/2)*(360-160); ※直接輸入(1/2)*(360-160) → ctrl+enter。

(%o3) 100

(6)求 x、y、z。



★圓周角等於其所對弧度的一半。

$$\begin{cases} 70 = \dfrac{1}{2}(z+y) \\ 90 = \dfrac{1}{2}(x+y) \\ 360 = 90 + x + y + z \end{cases}$$

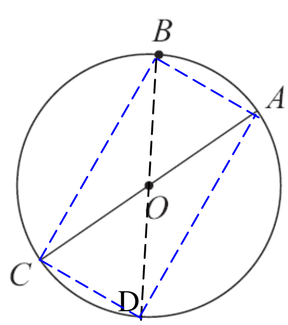
(%i1) solve([70=(1/2)*(z+y),90=(1/2)*(x+y),360=90+x+y+z], [x,y,z]);

※「solve([變數算式,變數算式,變數算式], [變數,變數,變數])」指令表示求解，輸入 solve([70=(1/2)*(z+y),90=(1/2)*(x+y),360=90+x+y+z], [x,y,z]) → ctrl+enter。

(%o1) [[x=130,y=50,z=90]]

此題無法直接使用 Maxima 軟體

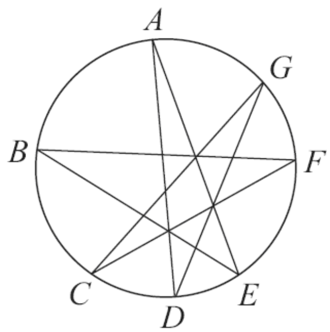
3.如右圖，在圓 O 上有三點 A、B、C，其中 $\overline{AC}$ 是直徑。在圓 O 上找一點 D，使得這四點構成一矩形。



D 點爲由 B 點經圓心 O。

此題無法直接使用 Maxima 軟體

4.如右圖，求∠A+∠B+∠C+∠D+∠E+∠F+∠G。



★圓周角等於其所對弧度的一半。

根據定理可知，

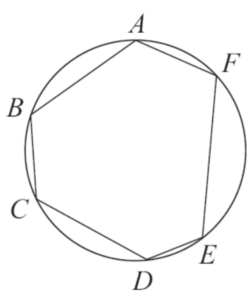
$\angle A=\frac{\overset{\frown}{DE}}{2}$；$\angle B=\frac{\overset{\frown}{EF}}{2}$；$\angle C=\frac{\overset{\frown}{FG}}{2}$；$\angle D=\frac{\overset{\frown}{GA}}{2}$；$\angle E=\frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$；$\angle F=\frac{\overset{\frown}{BC}}{2}$；$\angle G=\frac{\overset{\frown}{CD}}{2}$。

由上述可知，相當於整個圓的一半，

因此，$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F+\angle G=180^\circ$。

此題無法直接使用 Maxima 軟體

5.如右圖，圓上六點 A、B、C、D、E、F 構成一六邊形，說明$\angle A+\angle C+\angle E=360^\circ$。



★圓周角等於其所對弧度的一半。

$\angle A=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BCDEF}=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{DE}+\overset{\frown}{EF})$

$\angle C=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BAFED}=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BA}+\overset{\frown}{AF}+\overset{\frown}{FE}+\overset{\frown}{ED})$

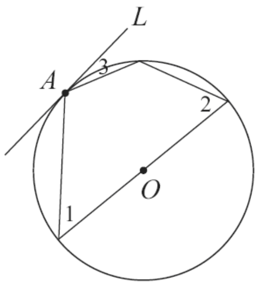
$\angle E=\frac{1}{2}\overset{\frown}{DCBAF}=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{DC}+\overset{\frown}{CB}+\overset{\frown}{BA}+\overset{\frown}{AF})$

$\angle A+\angle C+\angle E=\frac{1}{2}(2\times(\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{DE}+\overset{\frown}{EF}+\overset{\frown}{BA}+\overset{\frown}{AF}))$

因此，$\angle A+\angle C+\angle E=360^\circ$。

此題無法直接使用 Maxima 軟體

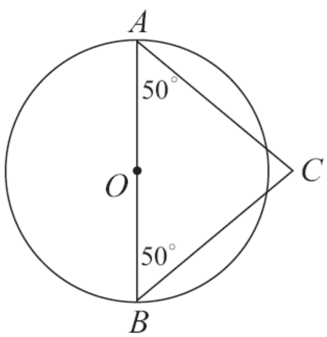
6.如右圖，L 切圓 O 於 A 點，說明∠1+∠2=90°+∠3。



∠3=∠1+∠2 重疊的弧，而∠1+∠2 扣掉重疊部分為半圓，半圓的角=90°，
因此，∠1+∠2=90°+∠3。

此題無法直接使用 Maxima 軟體

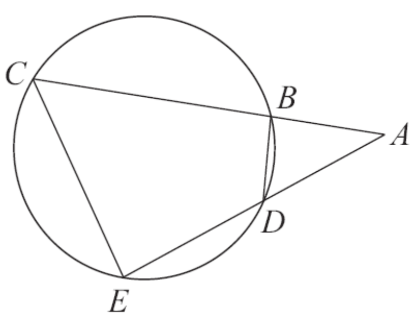
7.如右圖，$\overline{AB}$ 為圓 O 的直徑，自 A、B 各作和 $\overline{AB}$ 夾角 50°的直線相交於 C。試說明 C 在圓 O 的外部。



★圓周角等於其所對弧度的一半。
∠A 和∠B 所對的弧為 100°，
因此，100°+100°>180°，所以，C 在圓 O 的外部。

此題無法直接使用 Maxima 軟體

8.如右圖，由圓外一點 A 作兩直線交圓於 B、C、D、E 四點，說明△ABD~△AEC。

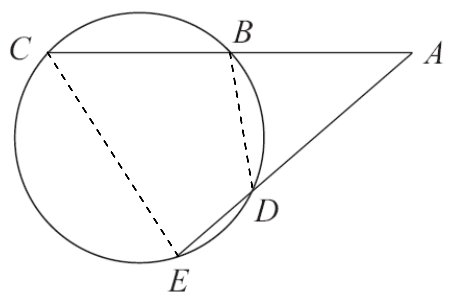


△ABD=∠A+∠B+∠D=180°，△AEC=∠A+∠E+∠C，
因此，∠B+∠D=∠E+∠C，
∠E+∠CBD=180°，∠ABD+∠CBD =180°，
由此可知，∠E=∠B，∠A=∠A，∠D=∠C。

此題無法直接使用 Maxima 軟體

9.如右圖，由圓外一點 A 作兩直線交圓於 B、C、D、E 四點。若 $\overline{AB}$ =6，$\overline{AC}$ =12，

$\overline{AD}$ =8，求 $\overline{AE}$ 。(提示：利用 8.是)



根據上一題可知，△ABD~△AEC。

因此，$\overline{AB}$ ：$\overline{AE}$ = $\overline{AD}$ ：$\overline{AC}$ → 6：$\overline{AE}$ =8：12 → 8 $\overline{AE}$ =6×12，

(%i1) solve([8*x=6*12], [x]);　※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，
輸入 solve([8*x=6*12], [x]) → ctrl+enter。

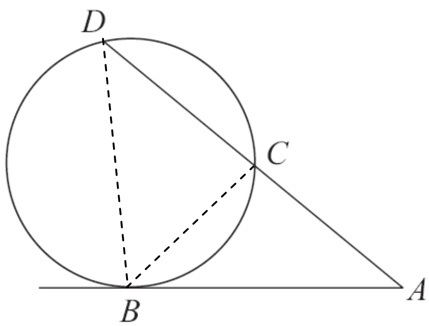
(%o1) [x=9]

因此，$\overline{AE}$ =9。

此題無法直接使用 Maxima 軟體

10.如右圖，由圓外一點 A 作 $\overleftrightarrow{AD}$ 交圓於 C、D，$\overleftrightarrow{AB}$ 切圓於 B。若 $\overline{AC}$ =4、$\overline{AD}$ =8。

求 $\overline{AB}$ 。



$\angle$CBA=$\angle$ADB，　(因為$\angle$CBA=$\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$；$\angle$ADB=$\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$)

而$\angle$A=$\angle$A，

$\triangle$ADB~$\triangle$ABC，

令$\overline{AB}$=x，

$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ → $\frac{8}{x}=\frac{x}{4}$ → x×x=8×4，

(%i1) solve([x*x=8*4], [x]);　※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([x*x=8*4], [x]) → ctrl+enter。

(%o1) [x=-4$\sqrt{2}$,x=4$\sqrt{2}$]

負不符所求，

因此，x=4$\sqrt{2}$。

第 2 章 圓 2-3 圓與多邊形

此題無法直接使用 Maxima 軟體

1.下列敘述，正確的打「○」，錯誤的打「X」。

(X)(1)圓的內接矩形必為正方形。

(○)(2)圓的外切矩形必為正方形。

(○)(3)圓的內接箏形其中必有一條對角線是直徑。

(○)(4)圓內接正方形的對稱軸是一定是直徑。

(X)(5)圓內接多邊形的對稱軸一定是圓的對稱軸。

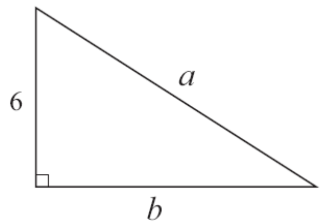
(X)(6)圓外切多邊形的對稱軸一定是圓的對稱軸。

(○)(7)四邊形的外心一定在四邊形內部。

此題無法直接使用 Maxima 軟體

2.已知下列多邊形內接於一半徑為 5 的圓，依圖中的提示，求出未知數。

(1)求 a 和 b。



★直角三角形的外心就是斜邊的中點。

a=5+5=10，

(%i1) 5+5; ※直接輸入 5+5 → ctrl+enter。

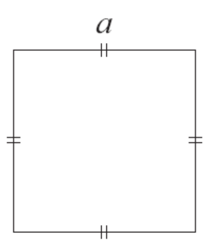
(%o1) 10

b= $\sqrt{10^2-6^2}$ =8。

(%i2) sqrt(10^2-6^2); ※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 sqrt(10^2-6^2) → ctrl+enter。

(%o2) 8

(2)求 a。



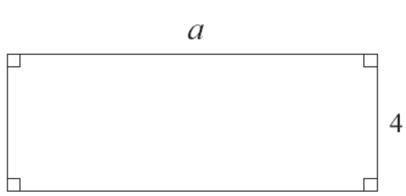
$\sqrt{a^2+a^2}$ =10，

(%i1) solve([a^2+a^2=10], [a]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([a^2+a^2=10], [a]) → ctrl+enter。

(%o1) [a=-$\sqrt{5}$,a=$\sqrt{5}$]

負不符所求，所以，a=$\sqrt{5}$。

(3)求 a。



$\sqrt{5^2-(4\div 2)^2}=\sqrt{21}$ ，

(%i1) sqrt(5^2-(4/2)^2); ※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 sqrt(5^2-(4/2)^2) → ctrl+enter。

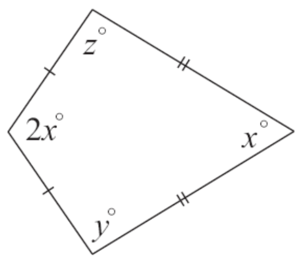
(%o1) sqrt(21)

a= $\sqrt{21}\times 2=2\sqrt{21}$ 。

(%i2) sqrt(21)*2; ※直接輸入 sqrt(21)*2 → ctrl+enter。

(%o2) 2*sqrt(21)

(4)求 x、y、z。



★圓周角等於其所對弧度的一半。

z=y=180°÷2=90°，

(%i1) 180/2; ※直接輸入 180/2 → ctrl+enter。

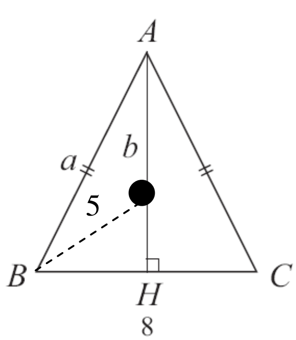
(%o1) 90

2x+90+90+x=360，

(%i2) solve([2*x+90+90+x=360], [x]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([2*x+90+90+x=360], [x]) → ctrl+enter。

(%o2) [x=60]

(5)求 a 和 b。



圓心至 H 距離= $\sqrt{5^2-(8\div 2)^2}=3$ ，

(%i1) sqrt(5^2-(8/2)^2); ※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 sqrt(5^2-(8/2)^2) → ctrl+enter。

(%o1) 3

b=5+3=8，

(%i2) 5+3; ※直接輸入 5+3 → ctrl+enter。

(%o2) 8

a=$\sqrt{8^2+(8\div 2)^2}$ =4$\sqrt{5}$ 。

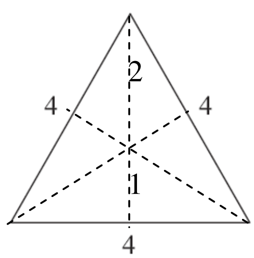
(%i3) sqrt(8^2+(8/2)^2); ※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 sqrt(8^2+(8/2)^2) → ctrl+enter。

(%o3) 4$\sqrt{5}$

此題無法直接使用 Maxima 軟體

3.已知下列多邊形有外心，求外心到各頂點的距離。

(1)



★外心、重心、垂心都是同一點，比值為 2：1。(如圖黑色部分)

由於是正三角形，因此，外心到各頂點的距離是相等。

$\sqrt{4^2-(4\div 2)^2}$ =2$\sqrt{3}$ ，

(%i1) sqrt(4^2-(4/2)^2); ※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 sqrt(4^2-(4/2)^2) → ctrl+enter。

(%o1) 2$\sqrt{3}$

2x+x=2$\sqrt{3}$ ，

(%i2) solve([2*x+x=2*sqrt(3)], [x]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([2*x+x=2*sqrt(3)], [x]) → ctrl+enter。

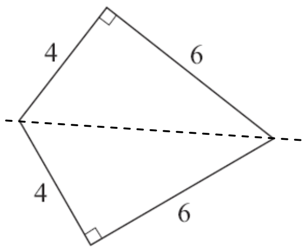
(%o2) [x=$\frac{2}{\sqrt{3}}$]

因此，外心到各頂點的距離=$2\times\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{4}{\sqrt{3}}$ 。

(%i3) 2*(2/sqrt(3)); ※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 2*(2/sqrt(3)) → ctrl+enter。

(%o3) $\frac{4}{\sqrt{3}}$

(2)



箏形外心到各頂點的距離是相等=圓的半徑。

圓直徑=$\sqrt{6^2+4^2}$ =$2\sqrt{13}$ 。

(%i1) sqrt(6^2+4^2); ※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 sqrt(6^2+4^2) → ctrl+enter。

(%o1) $2\sqrt{13}$

圓的半徑=外心到各頂點的距離=$2\sqrt{13}\div 2=\sqrt{13}$ 。

(%i2) (2*sqrt(13))/2; ※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入(2*sqrt(13))/2 → ctrl+enter。

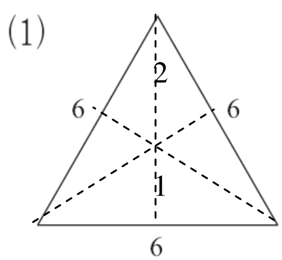
(%o2) $\sqrt{13}$

此題無法直接使用 Maxima 軟體

4.已知下列多邊形有內心，求內心到各邊的距離。

★內心到各邊的距離=圓半徑。

(1)



★正多邊形皆有內心和外心，且內心和外心爲同一點。比值爲 2：1。(如圖黑色部分)

$\sqrt{6^2-(6\div 2)^2}=\sqrt{20}$ ，

(%i1) sqrt(6^2-(6/2)^2); ※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 sqrt(6^2-(6/2)^2) → ctrl+enter。

(%o1) $\sqrt{20}$

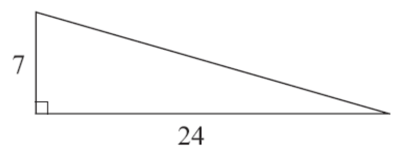
2x+x=$\sqrt{20}$ ，

(%i2) solve([2*x+x=sqrt(20)], [x]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([2*x+x=sqrt(20)], [x]) → ctrl+enter。

(%o2) [x=$\frac{2\sqrt{5}}{3}$]

因此，外心到各邊的距離=$\frac{2\sqrt{5}}{3}$ 。

(2)



★△ABC 面積=$\frac{1}{2}\times(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC})\times d$。(d 爲內心到△ABC 三邊的距離)

斜邊=$\sqrt{7^2+24^2}$=25，

(%i1) sqrt(7^2+24^2); ※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 sqrt(7^2+24^2) → ctrl+enter。

(%o1) 25

△面積=24×7÷2=84，

(%i2) 24*7/2; ※直接輸入 24*7/2 → ctrl+enter。

(%o2) 84

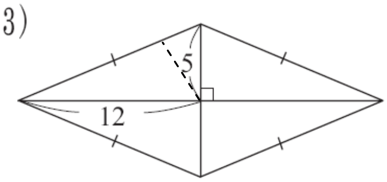
根據定理可知，

84=$\frac{1}{2}$(7+24+25)×d，

(%i3) solve([84=(1/2)*(7+24+25)*d], [d]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([84=(1/2)*(7+24+25)*d], [d]) → ctrl+enter。

(%o3) [d=3]

(3)



斜邊= $\sqrt{12^2+5^2}$ =13，

(%i1) sqrt(12^2+5^2); ※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 sqrt(12^2+5^2) → ctrl+enter。

(%o1) 13

利用面積相等求高，

$5\times12\times\frac{1}{2}=30$

(%i1) 5*12*(1/2); ※直接輸入 5*12*(1/2) → ctrl+enter。

(%o1) 30

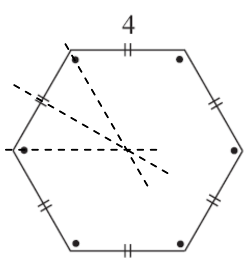
$30=13\times h\times\frac{1}{2}$ ，

(%i2) solve([30=13*h*(1/2)], [h]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([30=13*h*(1/2)], [h]) → ctrl+enter。

(%o2) [h= $\frac{60}{13}$]

因此，內心到各邊的距離為 $\frac{60}{13}$ 。

(4)



★30°-60°-90° → 1： $\sqrt{3}$ ：2。

圓半徑=內心到各邊的距離。

邊長為 4，

$\sqrt{3}$ ：2=x：4 → 2x= $\sqrt{3}\times4$，

(%i1) solve([2*x=sqrt(3)*4], [x]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([2*x=sqrt(3)*4], [x]) → ctrl+enter。

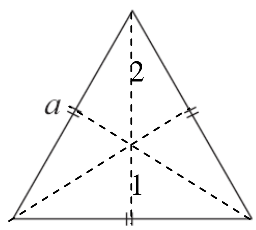
(%o1) [x=2*sqrt(3)]

因此，圓半徑=內心到各邊的距離=2$\sqrt{3}$。

此題無法直接使用 Maxima 軟體

5.已知下列多邊形外切於一半徑爲 6 的圓，依圖中的提示或數據，求出未知數。

(1)求 a。



★內心到各邊的距離=圓半徑。

★正多邊形皆有內心和外心，且內心和外心爲同一點。比值爲 2：1。(如圖黑色部分)

由圖可知，比值爲 1：2 → 6：12，

$\sqrt{12^2-6^2}=\sqrt{108}$，

(%i1) sqrt(12^2-6^2); ※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 sqrt(12^2-6^2) → ctrl+enter。

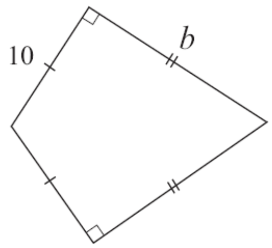
(%o1) $\sqrt{108}$

a=2×$\sqrt{108}$=2$\sqrt{108}$。

(%i2) 2*sqrt(108); ※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 2*sqrt(108) → ctrl+enter。

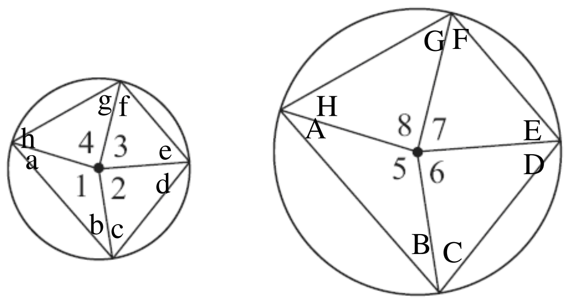
(%o2) 2$\sqrt{108}$

(2)求 b。



此題無法直接使用 Maxima 軟體

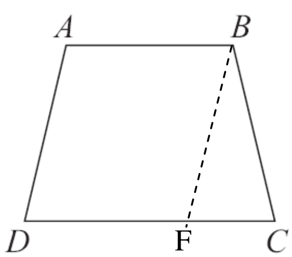
6.如右圖，兩圓中各有一內接四邊形，若已知各圓心角∠1=∠5，∠2=∠6，∠3=∠7，∠4=∠8，說明兩四邊形相似。



如題所示，∠1=∠5、∠2=∠6、∠3=∠7、∠4=∠8，
圓心至圓上距離是相等=圓半徑，會形成等腰三角形，
由圖可知，b+c=B+C，d+e=D+E，f+g=F+G，h+a=H+a，
由此可知，四個角相等，因此，兩四邊形相似。

此題無法直接使用 Maxima 軟體

7.如右圖，四邊形 ABCD 為一等腰梯形，說明 A、B、C、D 四點共圓。



設 ABCD 為等腰梯形，且 $\overline{AD}=\overline{BC}$ ，$\overline{AB}$ 平行 $\overline{CD}$ ，$\overline{AB}<\overline{CD}$ ，

過 B 點作平行 $\overline{AD}$ 之直線並交直線 $\overline{CD}$ 於 F，

已知 $\overline{AB}$ 平行 $\overline{DF}$ 且 $\overline{BF}$ 平行於 $\overline{AD}$ ，因此 ABFD 是個平行四邊形，

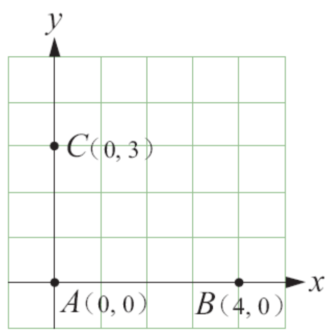
而 $\overline{BF}=\overline{AD}$ ，且∠DAB=∠BFD，

由等腰條件 $\overline{AD}=\overline{BC}$ 及 $\overline{BF}=\overline{AD}$ 得知 $\overline{BF}=\overline{BC}$ ，

即△FBC 是等腰三角形，
所以∠BCD=∠CFB，
由於 D、F、C 三點共線，所以∠CFB 與∠BFD 互補，
利用∠DAB=∠BFD 及∠BCD=∠CFB，
由此推出∠BCD 與∠DAB 互補，
此 A、B、C、D 四點共圓。

此題無法直接使用 Maxima 軟體

8.如下圖，坐標平面上有三點 A、B、C。



(1)找一點 O，使得 O 到 A、B、C 距離相等，求 O 的坐標。
令 O(x,y)，

$$\begin{cases}\overline{OA}=\overline{OB}\\ \overline{OA}=\overline{OC}\end{cases} \rightarrow \begin{cases}\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x-4)^2+(y-0)^2}\\ \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x-0)^2+(y-3)^2}\end{cases},$$

(%i1) solve([(x-0)^2+(y-0)^2=(x-4)^2+(y-0)^2,(x-0)^2+(y-0)^2=(x-0)^2+(y-3)^2],[x,y]);

※「solve([變數算式,變數算式], [變數,變數])」指令表示求解，輸入 solve([(x-0)^2+(y-0)^2=(x-4)^2+(y-0)^2,(x-0)^2+(y-0)^2=(x-0)^2+(y-3)^2], [x,y]) → ctrl+enter。

(%o1) [[x=2,y= $\frac{3}{2}$]]

因此，O(2, $\frac{3}{2}$)。

(2)找一點 I，使得 I 到 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BC}$ 三邊等距離，求 I 的坐標。

先求出 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BC}$ 之中點，

$\overline{AB}$ 中點=($\frac{4-0}{2}$, $\frac{0-0}{2}$)=(2,0)，

$\overline{AC}$ 中點=($\frac{0-0}{2}$, $\frac{3-0}{2}$)=(0, $\frac{3}{2}$)，

$\overline{BC}$ 中點=($\frac{4-0}{2}$, $\frac{|0-3|}{2}$)=(2, $\frac{3}{2}$)，

$$\begin{cases} \overline{I\overline{AB}中點} = \overline{I\overline{AC}中點} \\ \overline{I\overline{AB}中點} = \overline{I\overline{BC}中點} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sqrt{(x-2)^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x-0)^2+(y-(3/2))^2} \\ \sqrt{(x-2)^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x-2)^2+(y-(3/2))^2} \end{cases},$$

(%i3) (%i1)
solve([(x-2)^2+(y-0)^2=(x-0)^2+(y-(3/2))^2,(x-2)^2+(y-0)^2=(x-2)^2+(y-(3/2))^2],[x,y]);

※「solve([變數算式,變數算式], [變數,變數])」指令表示求解，輸入 solve([(x-2)^2+(y-0)^2=(x-0)^2+(y-(3/2))^2,(x-2)^2+(y-0)^2=(x-2)^2+(y-(3/2))^2],[x,y]) → ctrl+enter。

(%o1) [[x=1,y= $\frac{3}{4}$]]

因此，I(1, $\frac{3}{4}$)。

第 2 章 圓 2-4 數學證明

證明題

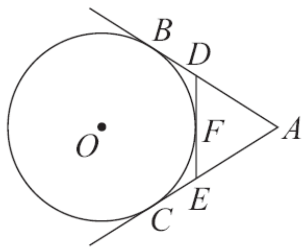
1.若 n 是自然數，證明 n(n+1)一定是偶數。(提示：分成 n 是奇數、偶數兩種可能來討論)

令 n 為奇數：奇數×(奇數+1) → 奇數×偶數 → 偶數。
令 n 為偶數：偶數×(偶數+1) → 偶數×奇數 → 偶數。

證明題

2.如右圖，A 為圓 O 外一點，$\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 各切圓 O 於 B、C 兩點，$\overline{DE}$ 切圓 O 於 F，

證明 $\overline{AB}+\overline{AC}=\overline{AD}+\overline{AE}+\overline{DE}$ 。



★圓外一點至圓 2 切點距離相等。

所以，$\overline{DB}=\overline{DF}$ ，$\overline{EF}=\overline{CE}$ ，

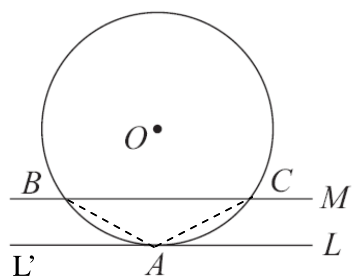
而 $\overline{AB}=\overline{AD}+\overline{DB}$ $\rightarrow$ $\overline{AB}=\overline{AD}+\overline{DF}$ ，

$\overline{AC}=\overline{AE}+\overline{CE}$ $\rightarrow$ $\overline{AC}=\overline{AE}+\overline{EF}$ ，

因此，$\overline{AB}+\overline{AC}=\overline{AD}+\overline{DF}+\overline{AE}+\overline{EF}=\overline{AD}+\overline{AE}+(\overline{DF}+\overline{EF})=\overline{AD}+\overline{AE}+\overline{DE}$ 。

證明題

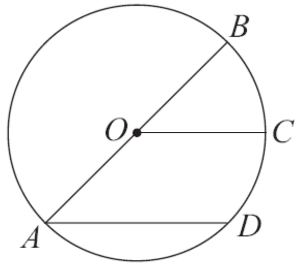
3.如右圖，L 切圓於 A，M//L，證明△ABC 為等腰三角形。



如題所示，M//L，而 A 點切於圓，
∠CAL=∠BAL'，　(弦切角相等)
而∠BAL'=∠ABC，∠CAL'=∠ACB，　(內錯角相等)
因此，△ABC 為等腰三角形。

證明題

4.如右圖，若 $\overline{OC}\,//\,\overline{AD}$ ，利用圓的性質證明 $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}$ 。

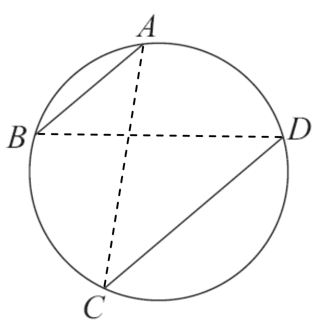


$\overset{\frown}{BC}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BD} \rightarrow \overset{\frown}{BC}=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CD}) \rightarrow \overset{\frown}{BC}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}+\frac{1}{2}\overset{\frown}{CD} \rightarrow \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}+\frac{1}{2}\overset{\frown}{CD}$，

因此，$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}$。

證明題

5.如右圖，已知$\overline{AB}//\overline{CD}$，證明$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BC}$。



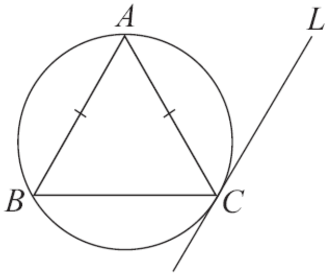
由題所示，$\overline{AB}//\overline{CD}$，

∠A=∠C，∠B=∠D，　(內錯角相等)
∠B=∠C，∠A=∠D，　(對應相同弧)

所以，∠A=∠B=∠C=∠D，因此，$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BC}$。

證明題

6.如右圖，已知$\overline{AB}=\overline{AC}$，L 切圓於 C，且 L//$\overline{AB}$，證明△ABC 爲正三角形。



由題所示，$\overline{AB}=\overline{AC}$ → ∠B=∠C，

由於 L// $\overline{AB}$ ，

∠A=∠ACL，　(內錯角相等)
∠B=∠ACL，　(弦切角相等)
所以，∠A=∠B=∠C，
因此，△ABC 爲正三角形。

證明題

7.證明矩形對角線的交點是此矩形的外心。
矩形對角線交點位於長方形正中心，且此交點到四點等距。

此題無法直接使用 Maxima 軟體

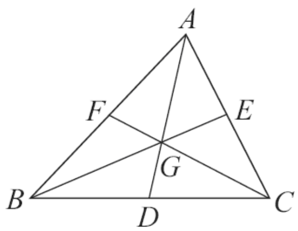
8.下列敘述都是錯誤的，試給出反例。
(1)若一正整數的各位數字總和爲 7 的倍數，則該數能被 7 整除。
1454÷7=207…5，不能整除，
此題應爲各位數字總和爲 3 的倍數，則該數能被 3 整除。
(2)如果 ab>ac，且 a≠0，則 b>c。
若 a=-1，b=-3，c=-2，則 ab>ac，則 b<c。
(3)若 x：y=4：3，則(x+1)：(y+1)=(4+1)：(3+1)=5：4。
x：y=4：3，
假設 x=3，y=3，則原式成立，
假設 x=8，y=6，則原式不成立。
(4)若兩多邊形各對應角皆相等，則此兩多邊形相似。
對應角相等，但對應邊不成比例，因此非相似。
(5)若兩多邊形各對應邊皆相等，則此兩多邊形全等。
對應角也要相等，才會全等。

(6)若 a、b 是兩數，則$|a+b|\geq|a|$或$|a+b|\geq|b|$。

假設 a=5，b=-3，則$|5+(-3)|<|5|$而$|5+(-3)|<|-3|$，所以原則不成立。

此題無法直接使用 Maxima 軟體

9.如右圖，G 爲△ABC 的重心，若已知$\overline{AD}+\overline{BE}+\overline{CF}=20$，求$\overline{GD}+\overline{GE}+\overline{GF}$ 。



由於$\overline{AD}+\overline{BE}+\overline{CF}=20$，

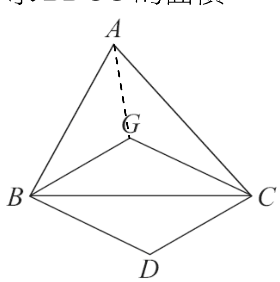
$\overline{GD}+\overline{GE}+\overline{GF}=\frac{1}{3}\overline{AD}+\frac{1}{3}\overline{BE}+\frac{1}{3}\overline{CF}=\frac{1}{3}(\overline{AD}+\overline{BE}+\overline{CF})=\frac{1}{3}\times 20=\frac{20}{3}$ 。

(%i1) (1/3)*20; ※直接輸入(1/3)*20 → ctrl+enter。

(%o1) $\frac{20}{3}$

此題無法直接使用 Maxima 軟體

10.如右圖，G 爲△ABC 的重心，且 BDCG 爲平行四邊形。若△ABC 的面積爲 12，求 BDCG 的面積。



△ABC 以三頂點與重心連接切割出三個三角形，三個三角形面積相等，

所以，$\triangle BGC=12\times\frac{1}{3}=4$，

(%i1) 12*(1/3); ※直接輸入 12*(1/3) → ctrl+enter。

(%o1) 4

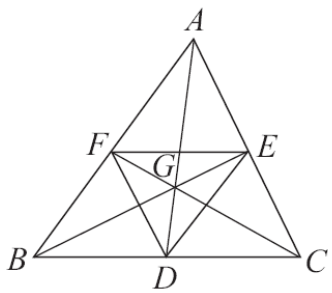
因此，BDCG=4×2=8 平方單位。

(%i2) 4*2; ※直接輸入 4*2 → ctrl+enter。

(%o2) 8

此題無法直接使用 Maxima 軟體

11.如右圖，G 為△ABC 的重心，D、E、F 分別為 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$ 、 $\overline{AB}$ 的中點。



(1)說明 G 也是△DEF 的重心。

四邊形 EFBD 中，因 $\overline{EF} // \overline{BC}$ ， $\overline{EF} = \frac{1}{2}\overline{BC} = \overline{BD}$ ，

（因△兩邊中點的連線會平行第 3 邊且為第 3 邊的一半長）

同理 $\overline{BF} // \overline{DE}$ ， $\overline{BF} = \overline{DE}$ ，因此，BDEF 是平行四邊形，

$\overline{DF}$ ， $\overline{BE}$ ，兩對角線會互相平分，

$\overline{EB}$ 平分 $\overline{DF}$ ，同理 $\overline{FC}$ 平分 $\overline{DE}$ ，而 $\overline{AD}$ 平分 $\overline{EF}$ ，

因此，G 為△ABC 的重心。

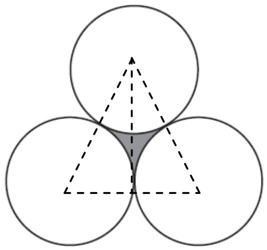
(2)求 $\dfrac{\triangle GEF\text{的面積}}{\triangle ABC\text{的面積}}$ 。

$\dfrac{1}{12}$ 。

第 2 章 圓 第 2 章綜合習題

此題無法直接使用 Maxima 軟體

1.如右圖，等半徑三圓兩兩相切，且半徑為 4，求灰黑色區域的面積。



高=$\sqrt{8^2-4^2}$=4$\sqrt{3}$，

(%i1) sqrt(8^2-4^2); ※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 sqrt(8^2-4^2) → ctrl+enter。

(%o1) 4$\sqrt{3}$

三角形面積=8×4$\sqrt{3}$×$\frac{1}{2}$=16$\sqrt{3}$，

(%i2) 8*(4*sqrt(3))*(1/2);

(%o2) 16$\sqrt{3}$

三角形內白色部分面積=4×4×π×$\frac{60}{360}$×3=8π。

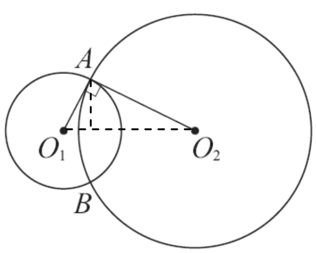
(%i3) 4*4*%pi*(60/360)*3;※直接輸入 4*4*%pi*(60/360)*3 → ctrl+enter。(%pi=π)

(%o3) 8π

灰黑色區域的面積=16$\sqrt{3}$-8π 平方單位。

此題無法直接使用 Maxima 軟體

2.如右圖，兩圓 O_1、O_2 交於 A、B 兩點，圓 O_1 半徑為 1，圓 O_2 半徑為$\sqrt{3}$，若∠O_1AO_2=90°，求



(1) $\overline{O_1O_2}$。

$\overline{O_1O_2}=\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}$=2。

(%i1) sqrt(1^2+sqrt(3)^2); ※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 sqrt(1^2+sqrt(3)^2) → ctrl+enter。

(%o1) 2

(2)公弦 $\overline{AB}$ 。

利用面積相等求公弦 $\overline{AB}$ 線段。

$\sqrt{3}\times 1\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

(%i1) sqrt(3)*1*(1/2); ※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 sqrt(3)*1*(1/2) → ctrl+enter。

(%o1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$2\times$高$\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

(%i2) solve([2*x*(1/2)=sqrt(3)/2], [x]);

(%o2) $[x=\frac{\sqrt{3}}{2}]$

所以，高$=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

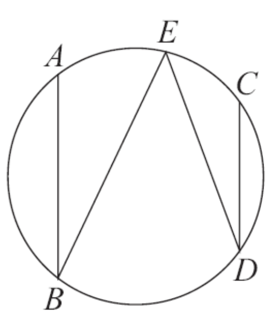
因此，$\overline{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2=\sqrt{3}$ 。

(%i3) (sqrt(3)/2)*2; ※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入(sqrt(3)/2)*2 → ctrl+enter。

(%o3) $\sqrt{3}$

此題無法直接使用 Maxima 軟體

3.如右圖，$\overline{AB}\,//\,\overline{CD}$ ，說明∠BED=∠ABE+∠CDE。

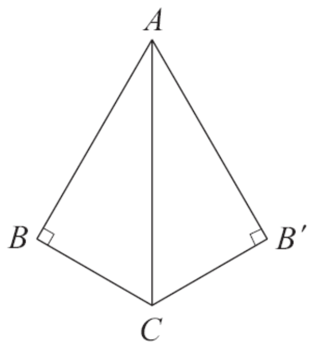


由於$\overline{AB} // \overline{CD}$，所以$\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{AC}$，

因此，$\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{AC}$ → ∠BED=∠ABE+∠CDE。

此題無法直接使用 Maxima 軟體

4.有一直角三角形△ABC，$\overline{AC}$ 爲斜邊。現將△ABC 如下圖作線對稱後，得四邊形 ABCB’。說明此四點 ABCB’共圓，並求此圓圓心的位置。

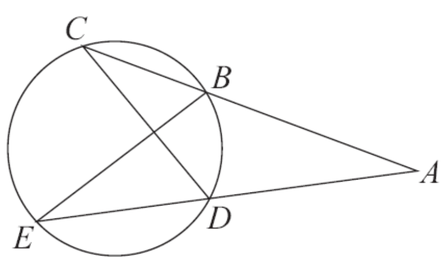


一個直角三角形會形成一個半圓，
因爲皆爲直角三角形，所以 ABCB’共圓，

因此，圓心在$\overline{AC}$ 中點。

證明題

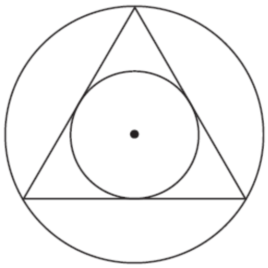
5.如右圖，由圓外一點 A，任做兩線交圓於 B、C、D、E 四點，證明△ABE~△ADC。



∠A=∠A，
∠C=∠E， (對應相同弧)
而另一角∠B=∠D，三個角相等，
因此，△ABE~△ADC。

此題無法直接使用 Maxima 軟體

6.右圖是一個邊長為 10 的正三角形，求其外接圓面積和內切圓面積的比值。



外接圓半徑=$\frac{2}{3}\times$三角形的高=$\frac{2}{3}\times 10\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{10\sqrt{3}}{3}$，

(%i1) (2/3)*10*(sqrt(3)/2); ※「sqrt(數值)」指令表示求開根號，輸入 (2/3)*10*(sqrt(3)/2) → ctrl+enter。

(%o1) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$

外接圓面積=$\pi\times(\frac{10\sqrt{3}}{3})^2=\frac{100\pi}{3}$平方單位，

(%i2) %pi*((10*sqrt(3))/3)^2; ※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 %pi*((10*sqrt(3))/3)^2 → ctrl+enter。(%pi= π)

(%o2) $\frac{100\pi}{3}$

內切圓半徑=$\frac{1}{3}\times$三角形的高=$\frac{1}{3}\times 10\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{3}$，

(%i3) (1/3)*10*(sqrt(3)/2); ※「sqrt(數值)」指令表示求開根號，輸入 (1/3)*10*(sqrt(3)/2) → ctrl+enter。

(%o3) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

內切圓面積=$\pi\times(\frac{5\sqrt{3}}{3})^2=\frac{25\pi}{3}$平方單位。

(%i4) %pi*((5*sqrt(3))/3)^2; ※「sqrt(數值)」指令表示求開根號，輸入 %pi*((5*sqrt(3))/3)^2 → ctrl+enter。

(%o4) $\frac{25\pi}{3}$

此題無法直接使用 Maxima 軟體

7.下列敘述都是錯的，試給出反例。

(1) $\overline{AB}$ 為圓上一弦，C 在圓上，D 在圓內，則∠ADB>∠ACB。

$\angle ADB=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{CE})$，$\angle ACB=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$，

因此，$\angle ADB<\angle ACB$。

(2)△ABC 的外接圓和內切圓的圓心必為同一點。

△ABC 必需為正三角形外接和內切圓的圓心必為同一點。

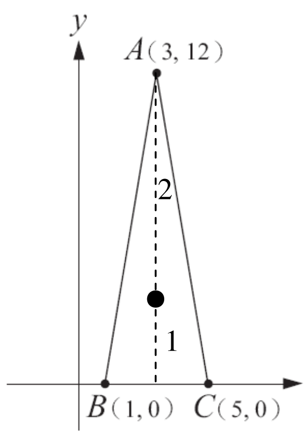
(3)△ABC 的內心一定會落在$\overline{AH}$上，其中 H 是 A 在$\overline{BC}$的垂足。

內心為由角平分線交點，非三角形的高相交交點，

所以，內心不一定落在$\overline{AH}$上。

此題無法直接使用 Maxima 軟體

8.如右圖，求△ABC 的重心坐標。



重心 x 坐標=$\overline{BC}$之中點=$\frac{1+5}{2}$=3，

(%i1) (1+5)/2;　※直接輸入(1+5)/2 → ctrl+enter。

(%o1) 3

$\frac{y}{12}=\frac{1}{3}$ → 3y=12×1，

(%i1) solve([3*y=12*1], [y]);　※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([3*y=12*1], [y]) → ctrl+enter。

(%o1) [y=4]

因此，重心坐標為(3,4)。

此題無法直接使用 Maxima 軟體

1.選擇題

(C)(1)下列哪個函數是 x 的一次函數？

(A)y=1 (B)$y=-x^2$ (C)$y=(x+1)^2-(x-1)^2$ (D)$y=(2x+1)^2-2x^2$

(D)(2)下列哪個函數是 x 的二次函數？

(A)y=1-2x (B)$y=x^2-(x+1)^2$ (C)$y=x^3+1$ (D)$y=1-(x+1)^2$

(C)(3)下列各函數圖形中，哪個有最低點？

(A)$y=2-x^2$ (B)$y=-4x^2$ (C)$y=4x^2$ (D)$y=-\frac{x^2}{4}$

(A)(4)下列各函數圖形中，哪個有最高點？

(A)y=(2-x)(2+x) (B)$y=x^2$ (C)$y=1+2x^2$ (D)y=-x

(C)(5)下列哪個函數的圖形是由 y=x 的圖形再往上移動 5 個單位所得到的圖形？

(A)y=5x (B)$y=\frac{x}{5}$ (C)y=x+5 (D)y=x-5

(B)(6)下列哪個函數圖形是由直線 y=-x 的圖形再往下移動 2 個單位所得到的圖形？

(A)y=-(x-2) (B)y=-(x+2) (C)y=-2x (D)$y=-x^2$

2.選擇題(底下的問題答案不只一個，將它們全部選出來。)

(B.E)(1)下列有關二次函數 $y=-4x^2$ 圖形的敘述何者$\boxed{\text{不正確}}$？

(A)圖形通過(-1,-4)。

(%i1) sublis([x=-1,y=-4],[y=-4*x^2]);

※「sublis([變數,變數], 變數算式)」指令表示驗證解，輸入 sublis([x=-1,y=-4],[y=-4*x^2]) → ctrl+enter。

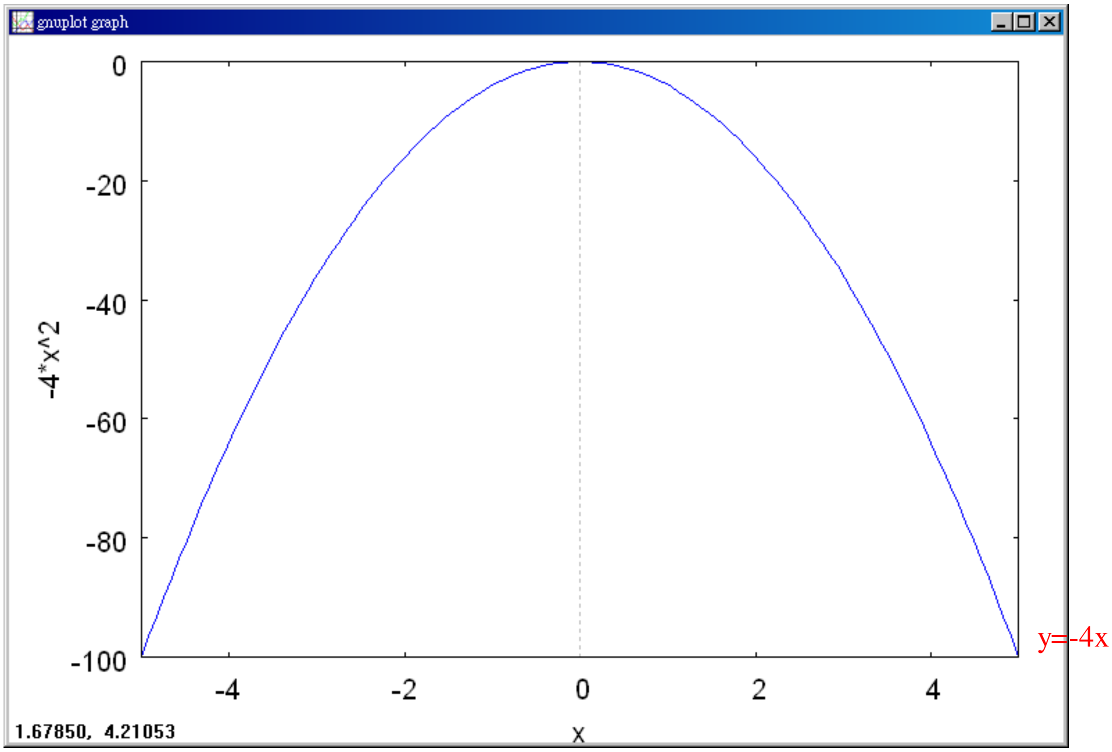
(%o1) [-4=-4]

(B)圖形的開口向上。

(%i2) plot2d([-4*x^2],[x,-5,5]);

※「plot2d([縱軸 y(函數)], [橫軸 x(x,x 值範圍最小值, x 值範圍最大值)])」指令表示畫 2d 坐標圖，輸入 plot2d([-4*x^2],[x,-5,5]) → ctrl+enter。(註：x 自行取值即可。)

(%o2)



(C)圖形通過(0,0)。

(%i3) sublis([x=0,y=0],[y=-4*x^2]); ※「sublis([變數,變數], 變數算式)」指令表示驗證解，輸入 sublis([x=0,y=0],[y=-4*x^2]) → ctrl+enter。

(%o3) [0=0]

(D)圖形不會通過第一象限。

(E)圖形的對稱軸是 y=0。

(B.C.E)(2)下列關於二次函數 $y=4x^2+1$ 圖形的敘述何者不正確？

(A)圖形的最低點是(0,1)。

(%i1) sublis([x=0,y=1],[y=4*x^2+1]); ※「sublis([變數,變數], 變數算式)」指令表示驗證解，輸入 sublis([x=0,y=1],[y=4*x^2+1]) → ctrl+enter。

(%o1) [1=1]

(B)圖形的最低點是(1,0)。

(%i2) sublis([x=1,y=0],[y=4*x^2+1]); ※「sublis([變數,變數], 變數算式)」指令表示驗證解，輸入 sublis([x=1,y=0],[y=4*x^2+1]) →

ctrl+enter。

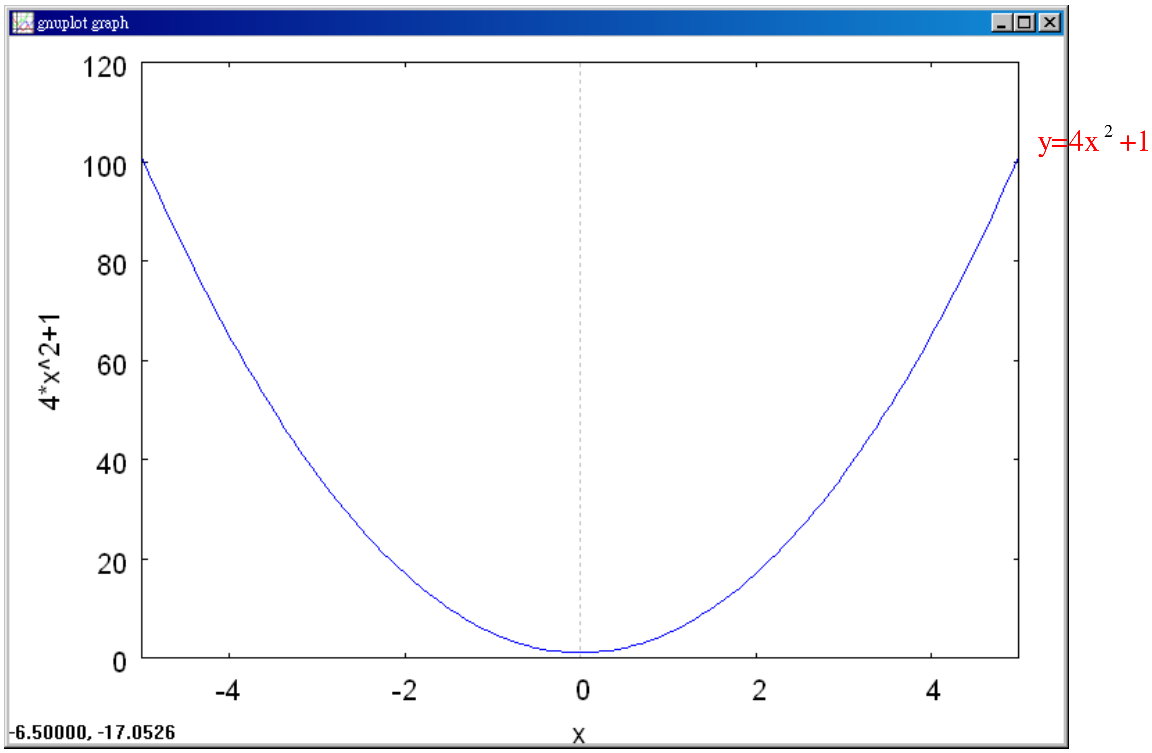
(%o2) [0=5]

(C)圖形的對稱軸是 x=1。

(D)圖形全部都落在 x 軸上方。

(%i3) plot2d([4*x^2+1],[x,-5,5]); ※「plot2d([縱軸 y(函數)], [橫軸 x(x,x 值範圍最小值, x 值範圍最大值)])」指令表示畫 2d 坐標圖，輸入 plot2d([4*x^2+1],[x,-5,5]) → ctrl+enter。(註：x 自行取值即可。)

(%o3)



(E)圖形通過(0,1)和(0,-1)兩點。

(%i4) sublis([x=0,y=1],[y=4*x^2+1]); ※「sublis([變數,變數], 變數算式)」指令表示驗證解，輸入 sublis([x=0,y=1],[y=4*x^2+1]) → ctrl+enter。

(%o4) [1=1]

(%i5) sublis([x=0,y=-1],[y=4*x^2+1]); ※「sublis([變數,變數], 變數算式)」指令表示驗證解，輸入 sublis([x=0,y=-1],[y=4*x^2+1]) → ctrl+enter。

(%o5) [-1=1]

(A.C.E)(3)下列關於二次函數 $y=-16x^2+1$ 圖形的敘述何者$\boxed{\text{正確}}$？

(A)圖形的最高點是(0,1)。

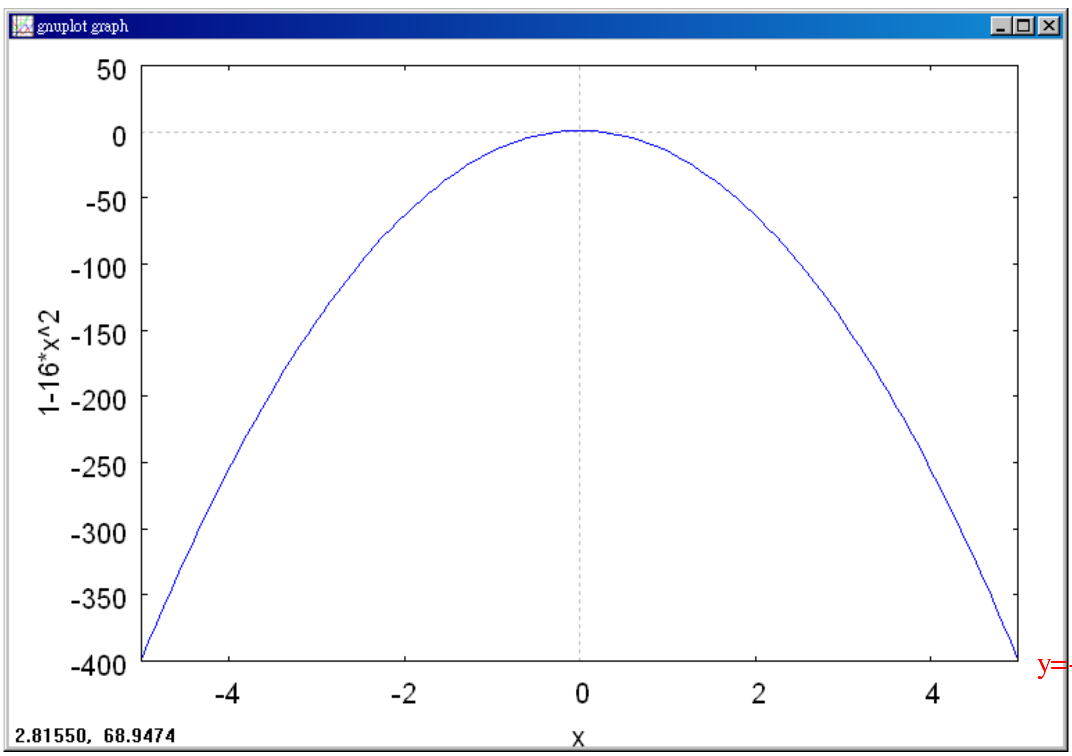
(B)圖形的最低點是(0,1)。

(%i1) sublis([x=0,y=1],[y=-16*x^2+1]);　※「sublis([變數,變數], 變數算式)」指令表示驗證解，輸入 sublis([x=0,y=1],[y=-16*x^2+1]) → ctrl+enter。

(%o1) [1=1]

(%i2) plot2d([-16*x^2+1],[x,-5,5]);　※「plot2d([縱軸 y(函數)], [橫軸 x(x,x 值範圍最小值, x 值範圍最大值)])」指令表示畫 2d 坐標圖，輸入 plot2d([-16*x^2+1],[x,-5,5]) → ctrl+enter。(註：x 自行取值即可。)

(%o2)



$y=-16x^2+1$

(C)圖形通過($\frac{1}{4}$,0)和(-$\frac{1}{4}$,0)兩點。

(%i1) sublis([x=1/4,y=0],[y=-16*x^2+1]);　※「sublis([變數,變數], 變數算式)」指令表示驗證解，輸入

sublis([x=1/4,y=0],[y=-16*x^2+1]) → ctrl+enter。

(%o1) [0=0]

(%i2) sublis([x=-1/4,y=0],[y=-16*x^2+1]); ※「sublis([變數,變數], 變數算式)」指令表示驗證解，輸入 sublis([x=-1/4,y=0],[y=-16*x^2+1]) → ctrl+enter。

(%o2) [0=0]

(D)圖形的對稱軸是 y=0。

(E)圖形的開口向下。

(A.B.D)(4)下列關於二次函數 $y=4x^2-1$ 圖形的敘述何者$\boxed{\text{正確}}$？

(A)圖形和 y 軸相交於($\frac{1}{2}$,0)和(-$\frac{1}{2}$,0)兩點。

(B)圖形的開口向上。

(C)圖形的最高點是(0,-1)。

(D)圖形的對稱軸是 x=0。

(E)圖形與 y=-2 交於兩點。

(%i1) sublis([x=1/2,y=0],[y=4*x^2-1]); ※「sublis([變數,變數], 變數算式)」指令表示驗證解，輸入 sublis([x=1/2,y=0],[y=4*x^2-1]) → ctrl+enter。

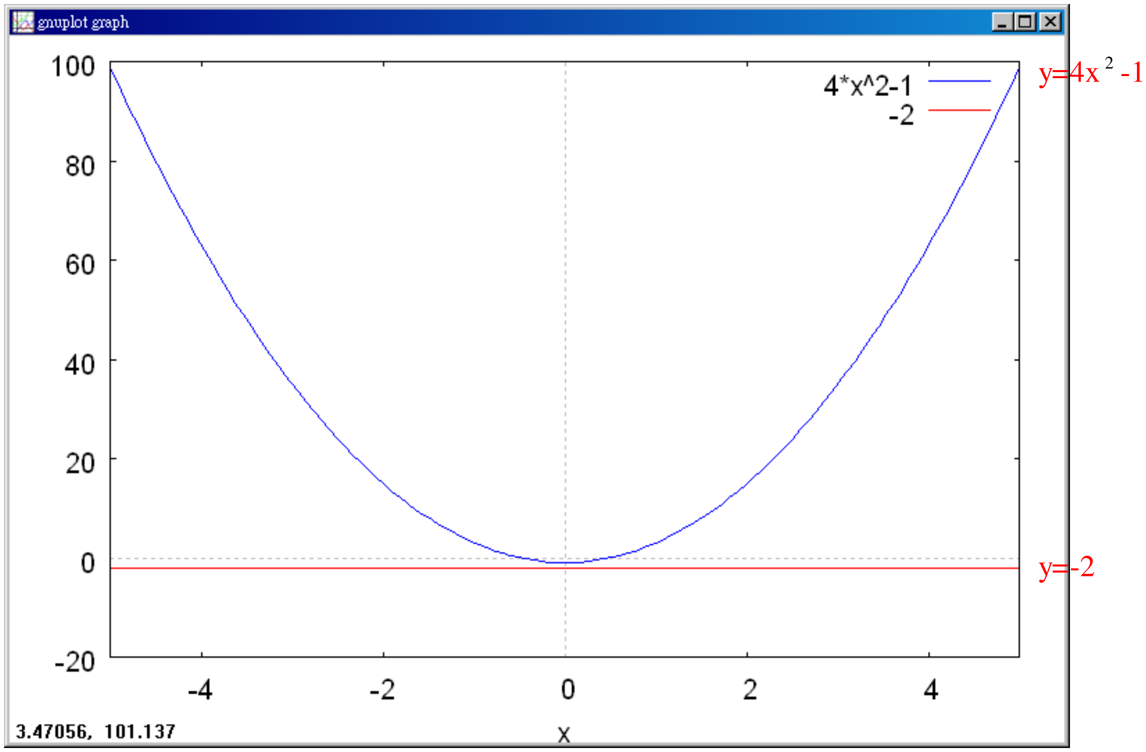
(%o1) [0=0]

(%i2) sublis([x=-1/2,y=0],[y=4*x^2-1]); ※「sublis([變數,變數], 變數算式)」指令表示驗證解，輸入 sublis([x=-1/2,y=0],[y=4*x^2-1]) → ctrl+enter。

(%o2) [0=0]

(%i3) plot2d([4*x^2-1,-2],[x,-5,5]); ※「plot2d([縱軸 y(函數)], [橫軸 x(x,x 值範圍最小值, x 值範圍最大值)])」指令表示畫 2d 坐標圖，輸入 plot2d([4*x^2-1,-2],[x,-5,5]) → ctrl+enter。(註：x 自行取值即可。)

(%o3)

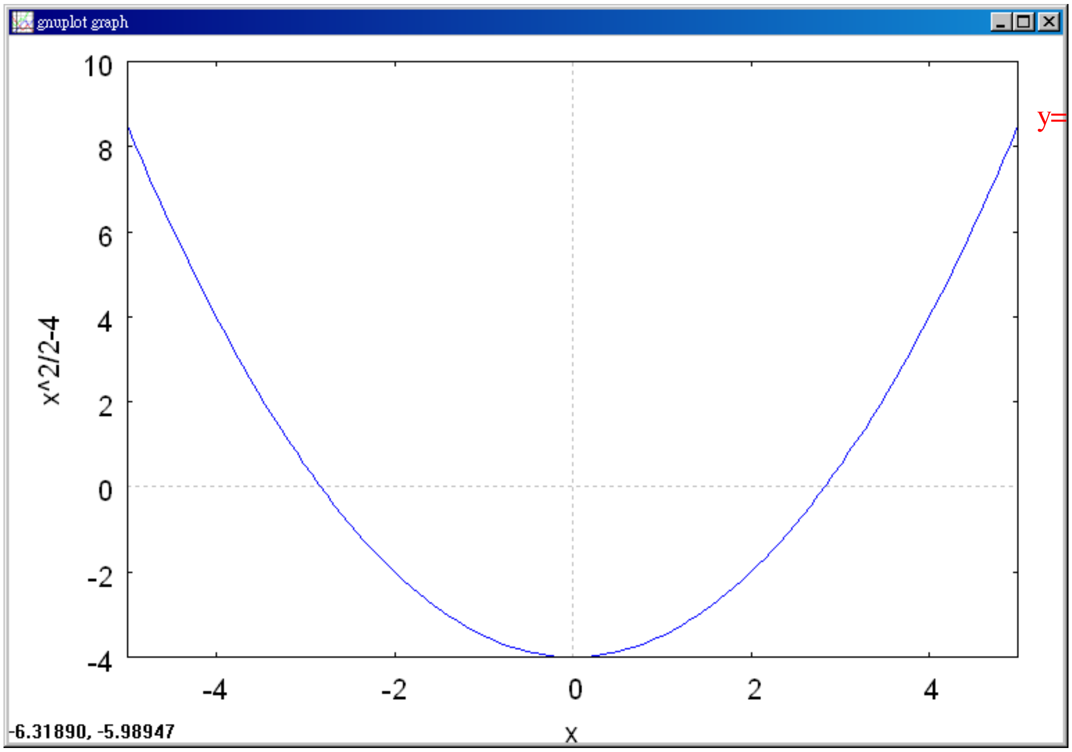


3.試描繪 y=$\frac{x^2}{2}$-4 的圖形並求其最低點及其對稱軸。

(%i1) plot2d([x^2/2-4],[x,-5,5]); ※「plot2d([縱軸 y(函數)], [橫軸 x(x,x 值範圍最小値, x 值範圍最大值)])」指令表示畫 2d 坐標圖，輸入 plot2d([x^2/2-4],[x,-5,5]) → ctrl+enter。(註：x 自行取值即可。)

(%o1)

因此，最低點為(0,-4)；對稱軸為 0。



$y=\frac{x^2}{2}-4$

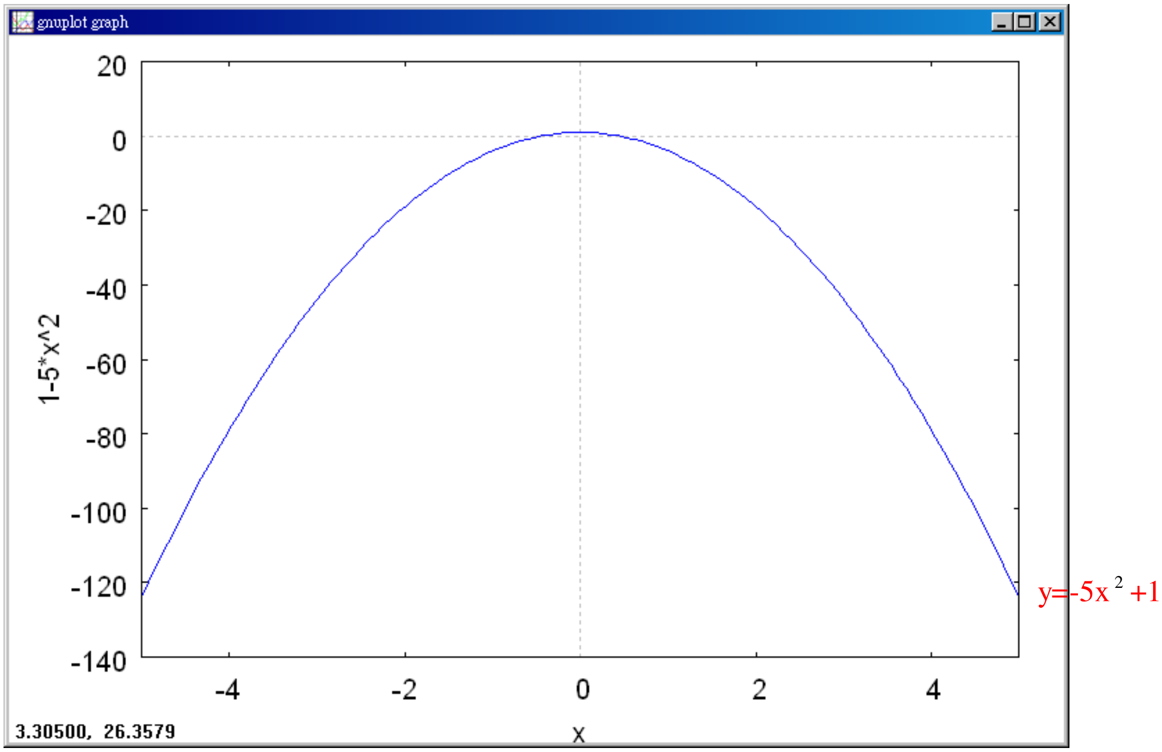
4.試描繪 $y=-5x^2+1$ 的圖形，並求其最高點及其對稱軸。

(%i1) plot2d([-5*x^2+1],[x,-5,5]);

※「plot2d([縱軸 y(函數)], [橫軸 x(x,x 值範圍最小值, x 值範圍最大值)])」指令表示畫 2d 坐標圖，輸入 plot2d([-5*x^2+1],[x,-5,5]) → ctrl+enter。(註：x 自行取值即可。)

(%o1)

因此，最高點爲(0,1)；對稱軸爲 0。



5.設(1,a)、(-1,b)、(2,c)、(-2,d)在 $y=5-x^2$ 的圖形上，求 a、b、c、d。

(%i1) solve([a=5-1^2], [a]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([a=5-1^2], [a]) → ctrl+enter。

(%o1) [a=4]

(%i2) solve([b=5-(-1)^2], [b]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([b=5-(-1)^2], [b]) → ctrl+enter。

(%o2) [b=4]

(%i3) solve([c=5-2^2], [c]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([c=5-2^2], [c]) → ctrl+enter。

(%o3) [c=1]

(%i4) solve([d=5-(-2)^2], [d]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([d=5-(-2)^2], [d]) → ctrl+enter。

(%o4) [d=1]

因此，a=4；b=4；c=1；d=1。

6.設(a,0)、(b,1)在 $y=-x^2+8$ 的圖形上，求 a、b。

(%i1) solve([0=-a^2+8], [a]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([0=-a^2+8], [a]) → ctrl+enter。

(%o1) [$a=-2\sqrt{2}$, $a=2\sqrt{2}$]

(%i2) solve([1=-b^2+8], [b]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求

解，輸入 solve([1=-b^2+8], [b]) → ctrl+enter。

(%o2) [b=-$\sqrt{7}$,b=$\sqrt{7}$]

7.若二次函數 y=ax ^{2} +c 的圖形通過(5,0)，且最高點為(0,4)，求 a、c。

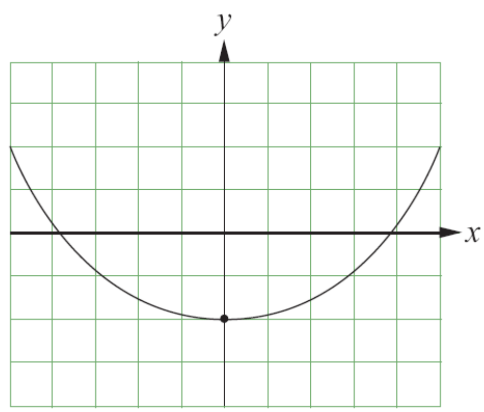
$$\begin{cases} 0 = 25a + c \\ 4 = c \end{cases}$$

(%i1) solve([0=25*a+c,4=c], [a,c]); ※「solve([變數算式,變數算式], [變數,變數])」指令表示求解，輸入 solve([0=25*a+c,4=c], [a,c]) → ctrl+enter。

(%o1) [[a=-$\frac{4}{25}$,c=4]]

此題無法直接使用 Maxima 軟體

8.右圖為 y=ax ^{2} +c 的圖形，求 a、c。



將(0,-2)代入 y=ax ^{2} +c 可知 c 值，

(%i1) [x,y]:[0,-2]; ※「[變數,變數]:[數值,數值]」指令表示設定變數的數值，輸入[x,y]:[0,-2] → ctrl+enter。

(%o1) [0,-2]

(%i2) solve([y=a*x^2+c], [c]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([y=a*x^2+c], [c]) → ctrl+enter。

(%o2) [c=-2]

再將(5,2)代入 y=ax ^{2} -2 可知 a 值，

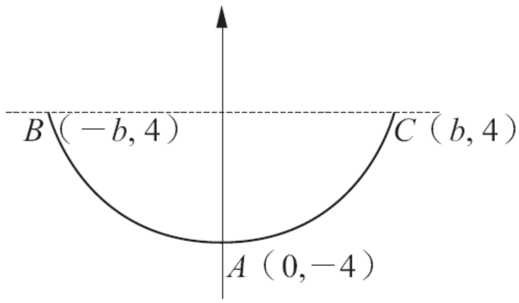
(%i3) [x,y]:[5,2]; ※「[變數,變數]:[數值,數值]」指令表示設定變數的數值，輸入[x,y]:[5,2] → ctrl+enter。

(%o3) [5,2]

(%i4) solve([y=a*x^2-2], [a]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([y=a*x^2-2], [a]) → ctrl+enter。

(%o4) [a=$\frac{4}{25}$]

9.如右圖，二次函數 y=ax^2+c 的圖形通過 B(-b,4)、C(b,4)兩點，並且其最低點為 A(0,-4)。若△ABC 的面積為 24，求 a、b、c。



令底為 x，

4x×$\frac{1}{2}$=24，

(%i1) solve([4*x*(1/2)=24], [x]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([4*x*(1/2)=24], [x]) → ctrl+enter。

(%o1) [x=12]

12÷2=6，

(%i2) 12/2; ※直接輸入 12/2 → ctrl+enter。

(%o2) 6

因此，b=6。

第 3 章 二次函數 3-2 配方法與拋物線

1.求下列各點對 x=4 的對稱點。

(1)A(5,5)

(%i1) load(implicit_plot); ※「load(implicit_plot)」指令表示先讀取此 implicit_plot(模組)。

(%o1)

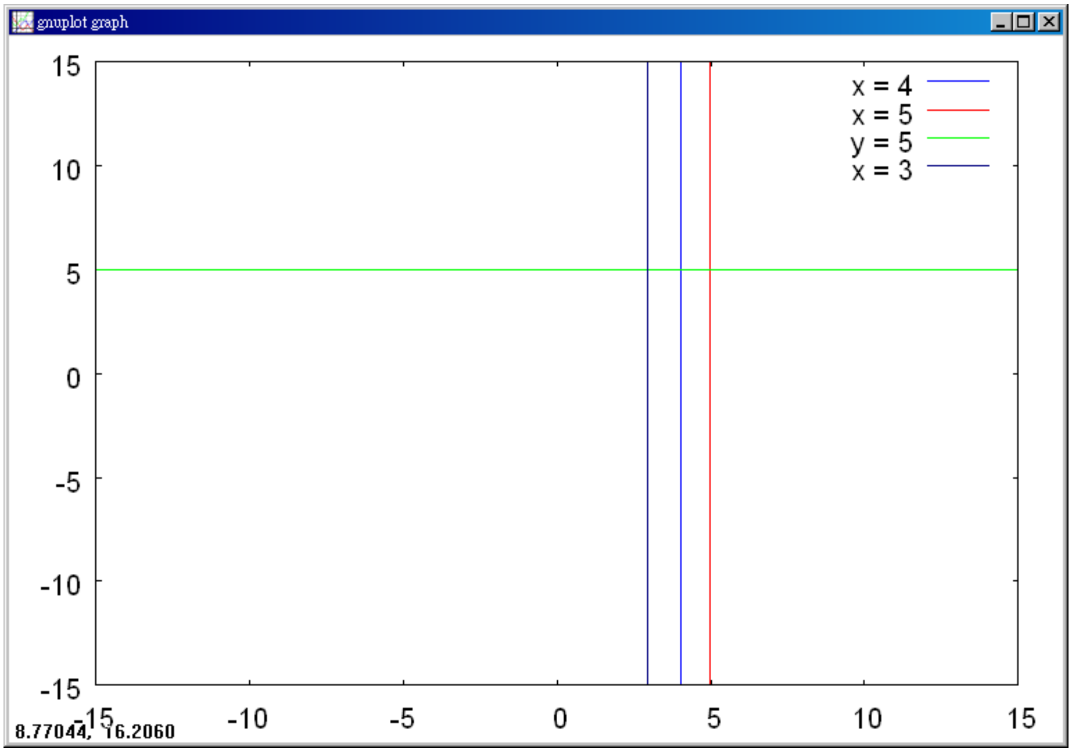
C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.1/share/maxima/5.18.1/share/contrib/implicit_plot.lisp

(%i2) implicit_plot([x=4,x=5,y=5,x=3], [x, -15, 15], [y, -15, 15]);

※「implicit_plot (橫軸 x(函數), [x, x 值範圍最小值, x 值範圍最大值], [y, y 值範圍最小值, y 值範圍最大值)]」指令表示畫 2d 坐標圖，輸入 implicit_plot([x=4,x=5,y=5,x=3], [x, -15, 15], [y, -15, 15]) → ctrl+enter。(註：x 自行取值即可。)

(%o2) done

因此，A(5,5)對 x=4 的對稱點為(3,5)。



(2)B(10,-4)

(%i1) load(implicit_plot);　※「load(implicit_plot)」指令表示先讀取此 implicit_plot(模組)。

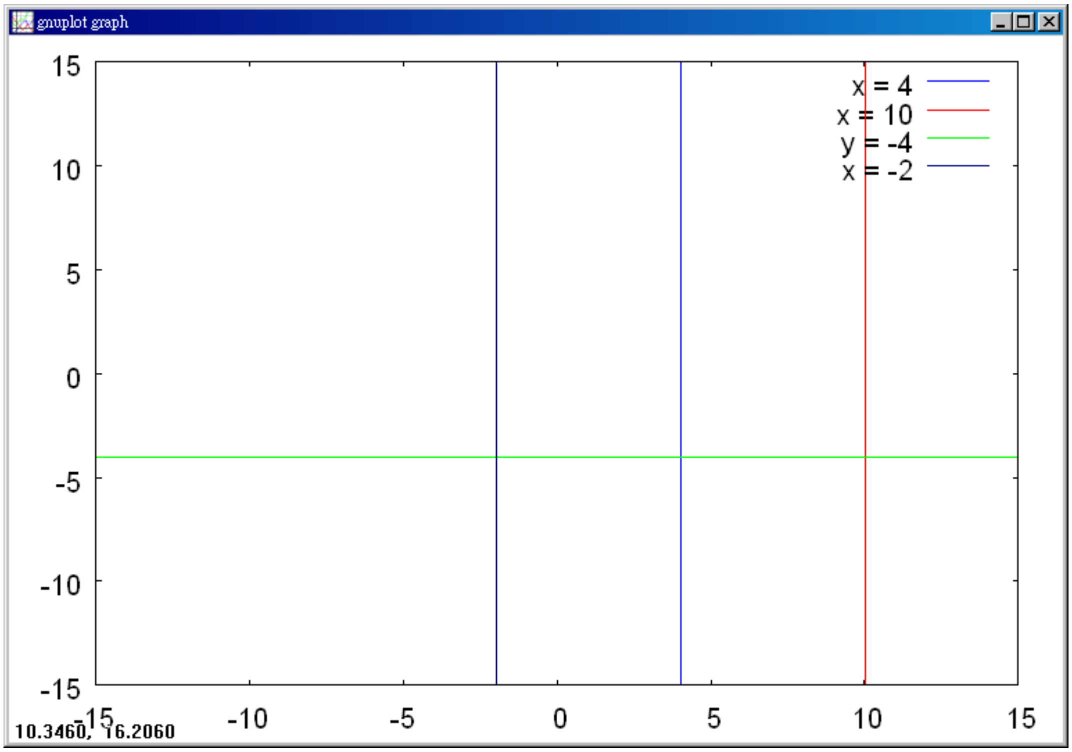
(%o1)
C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.1/share/maxima/5.18.1/share/contrib/implicit_plot.lisp

(%i2) implicit_plot([x=4,x=10,y=-4,x=-2], [x, -15, 15], [y, -15, 15]);

※「implicit_plot (橫軸 x(函數), [x, x 值範圍最小值, x 值範圍最大值], [y, y 值範圍最小值, y 值範圍最大值)]」指令表示畫 2d 坐標圖，輸入 implicit_plot([x=4,x=10,y=-4,x=-2], [x, -15, 15], [y, -15, 15]) → ctrl+enter。(註：x 自行取值即可。)

(%o2) done

因此，B(10,-4)對 x=4 的對稱點為(-2,-4)。



(3)C(0,1)

(%i1) load(implicit_plot); ※「load(implicit_plot)」指令表示先讀取此 implicit_plot(模組)。

(%o1)

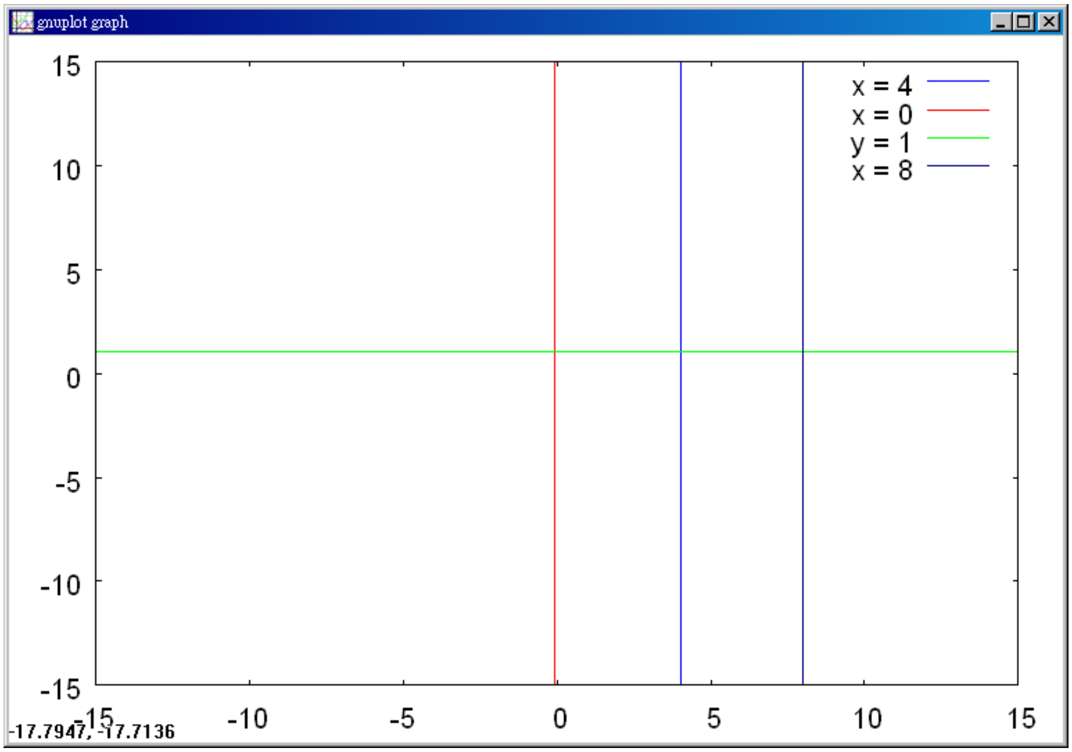
C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.1/share/maxima/5.18.1/share/contrib/implicit_plot.lisp

(%i2) implicit_plot([x=4,x=0,y=1,x=8], [x, -15, 15], [y, -15, 15]);

※「implicit_plot (橫軸 x(函數), [x, x 值範圍最小值, x 值範圍最大值], [y, y 值範圍最小值, y 值範圍最大值)]」指令表示畫 2d 坐標圖，輸入 implicit_plot([x=4,x=0,y=1,x=8], [x, -15, 15], [y, -15, 15]) → ctrl+enter。(註：x 自行取值即可。)

(%o2) done

因此，B(0,1)對 x=4 的對稱點為(8,1)。



(4)D(-1,2)

(%i1) load(implicit_plot); ※「load(implicit_plot)」指令表示先讀取此 implicit_plot(模組)。

(%o1)

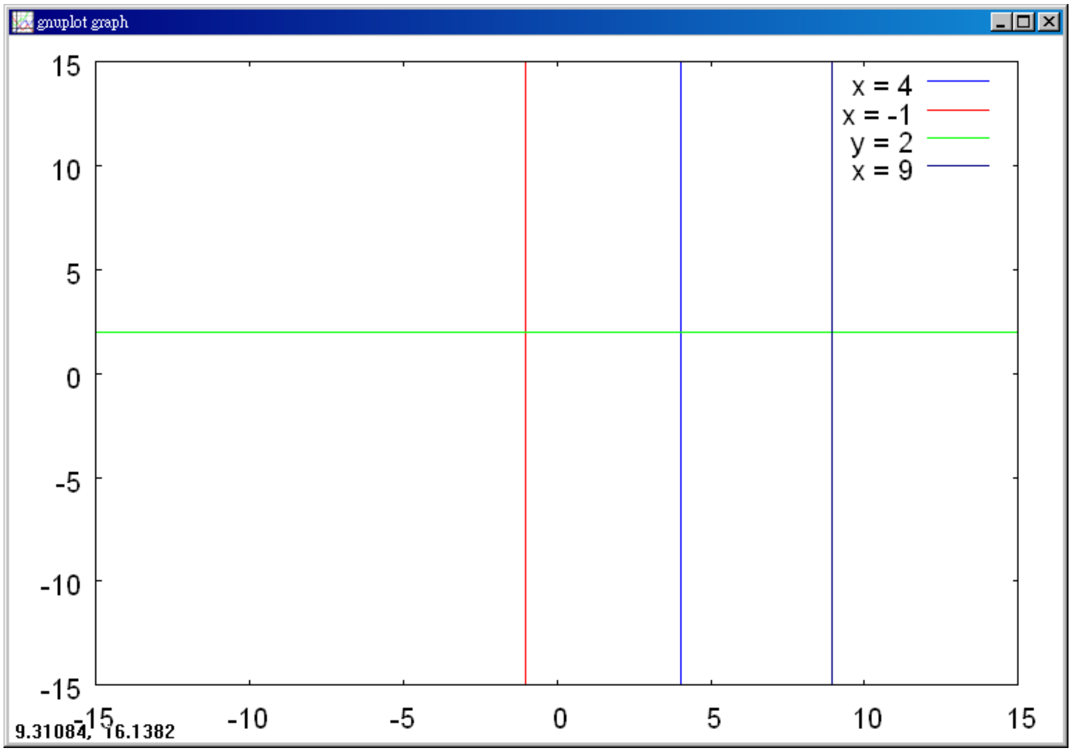
C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.1/share/maxima/5.18.1/share/contrib/implicit_plot.lisp

(%i2) implicit_plot([x=4,x=-1,y=2,x=9], [x, -15, 15], [y, -15, 15]);

※「implicit_plot (橫軸 x(函數), [x, x 值範圍最小值, x 值範圍最大值], [y, y 值範圍最小值, y 值範圍最大值)]」指令表示畫 2d 坐標圖，輸入 implicit_plot([x=4,x=-1,y=2,x=9], [x, -15, 15], [y, -15, 15]) → ctrl+enter。(註：x 自行取值即可。)

(%o2) done

因此，B(-1,2)對 x=4 的對稱點為(9,2)。



2.求下列各點對 x=-4 的對稱點。

(1)A(0,0)

(%i1) load(implicit_plot); ※「load(implicit_plot)」指令表示先讀取此 implicit_plot(模組)。

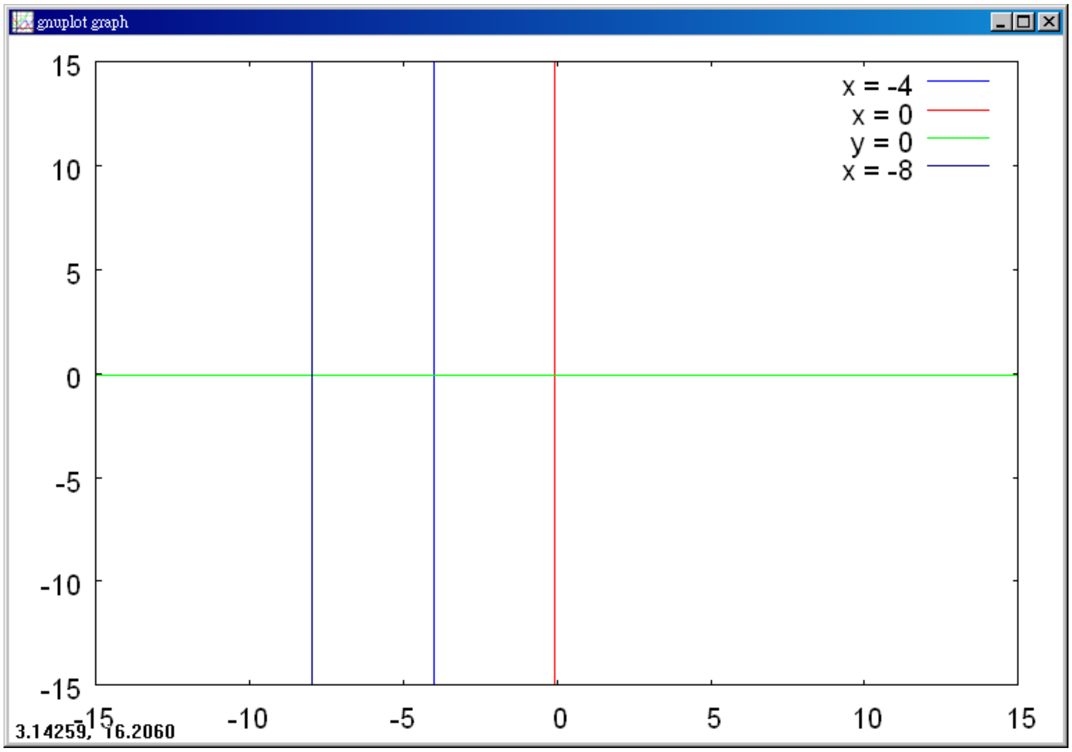
(%o1)
C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.1/share/maxima/5.18.1/share/contrib/implicit_plot.lisp

(%i2) implicit_plot([x=-4,x=0,y=0,x=-8], [x, -15, 15], [y, -15, 15]);

※「implicit_plot (橫軸 x(函數), [x, x 值範圍最小值, x 值範圍最大值], [y, y 值範圍最小值, y 值範圍最大值)]」指令表示畫 2d 坐標圖，輸入 implicit_plot([x=-4,x=0,y=0,x=-8], [x, -15, 15], [y, -15, 15]) → ctrl+enter。(註：x 自行取值即可。)

(%o2) done

因此，B(0,0)對 x=-4 的對稱點為(-8,0)。



(2)B(-1,2)

(%i1) load(implicit_plot); ※「load(implicit_plot)」指令表示先讀取此 implicit_plot(模組)。

(%o1)

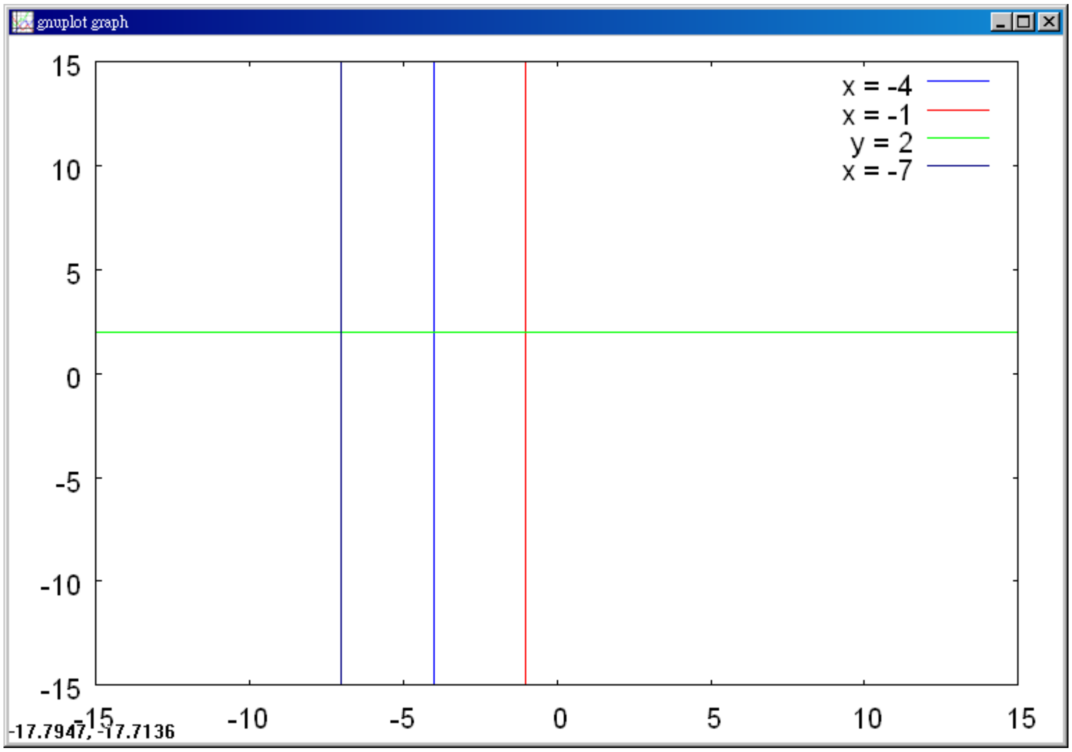
C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.1/share/maxima/5.18.1/share/contrib/implicit_plot.lisp

(%i2) implicit_plot([x=-4,x=-1,y=2,x=-7], [x, -15, 15], [y, -15, 15]);

※「implicit_plot (橫軸 x(函數), [x, x 值範圍最小值, x 值範圍最大值], [y, y 值範圍最小值, y 值範圍最大值)]」指令表示畫 2d 坐標圖，輸入 implicit_plot([x=-4,x=-1,y=2,x=-7], [x, -15, 15], [y, -15, 15]) → ctrl+enter。(註：x 自行取值即可。)

(%o2) done

因此，B(-1,2)對 x=-4 的對稱點爲(-7,2)。



(3)C(-5,-1)

(%i1) load(implicit_plot); ※「load(implicit_plot)」指令表示先讀取此 implicit_plot(模組)。

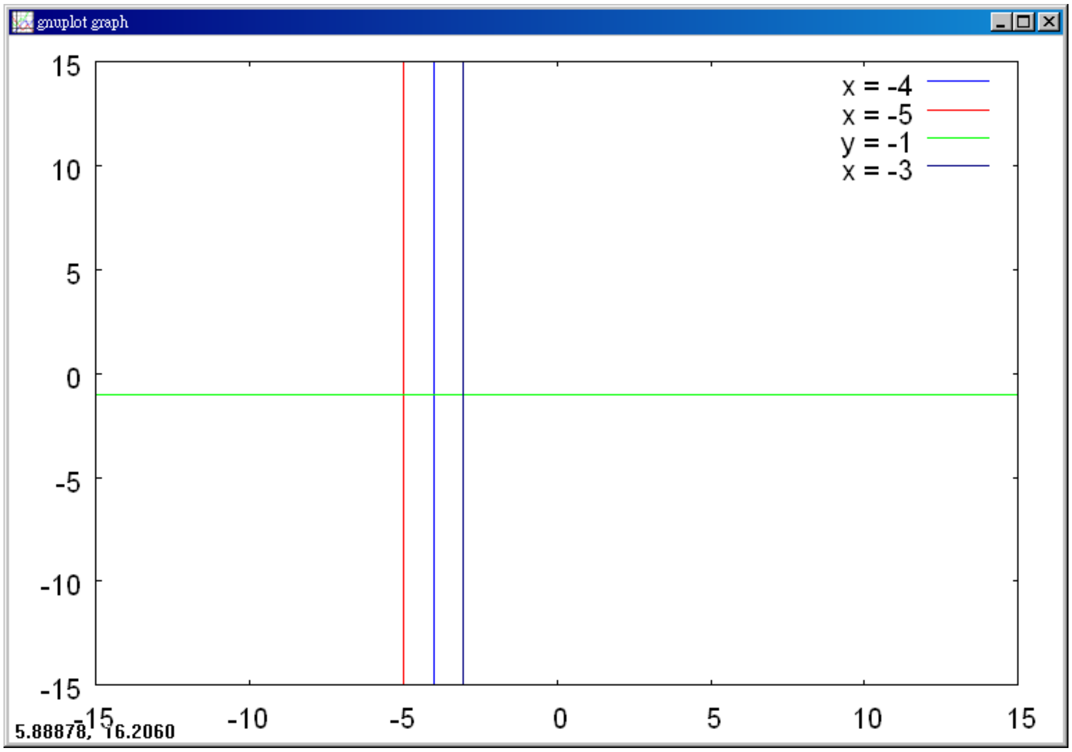
(%o1)
C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.1/share/maxima/5.18.1/share/contrib/implicit_plot.lisp

(%i2) implicit_plot([x=-4,x=-5,y=-1,x=-3], [x, -15, 15], [y, -15, 15]);

※「implicit_plot (橫軸 x(函數), [x, x 值範圍最小值, x 值範圍最大值], [y, y 值範圍最小值, y 值範圍最大值)]」指令表示畫 2d 坐標圖，輸入 implicit_plot([x=-4,x=-5,y=-1,x=-3], [x, -15, 15], [y, -15, 15]) → ctrl+enter。(註：x 自行取值即可。)

(%o2) done

因此，B(-5,-1)對 x=-4 的對稱點為(-3,-1)。



(4)D(-6,1)

(%i1) load(implicit_plot);　※「load(implicit_plot)」指令表示先讀取此 implicit_plot(模組)。

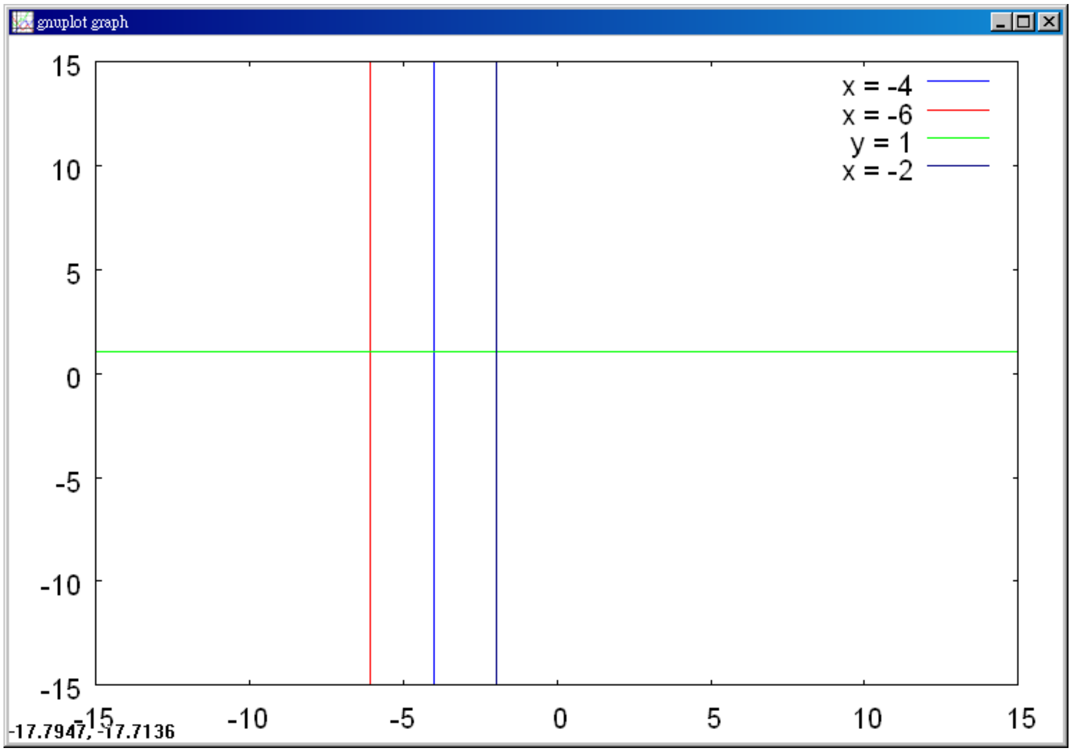
(%o1)
C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.1/share/maxima/5.18.1/share/contrib/implicit_plot.lisp

(%i2) implicit_plot([x=-4,x=-6,y=1,x=-2], [x, -15, 15], [y, -15, 15]);

※「implicit_plot (橫軸 x(函數), [x, x 值範圍最小值, x 值範圍最大值], [y, y 值範圍最小值, y 值範圍最大值)]」指令表示畫 2d 坐標圖，輸入 implicit_plot([x=-4,x=-6,y=1,x=-2], [x, -15, 15], [y, -15, 15]) → ctrl+enter。(註：x 自行取值即可。)

(%o2) done

因此，B(-6,1)對 x=-4 的對稱點為(-2,1)。



此題無法直接使用 Maxima 軟體

3.(1)若 t>0，求$(4+t,t^2)$對 x=4 的對稱點。

$$\begin{cases} x=4+t \\ y=t^2 \end{cases}$$

將 x-4=t 代入 $y=t^2$，所以，$y=(x-4)^2$，因此，此函數爲拋物線。
$(4+t,t^2)$對 x=4 的對稱點爲$(-4-t,t^2)$。
(2)若 t>0，求$(-4+t,t^2)$對 x=-4 的對稱點。

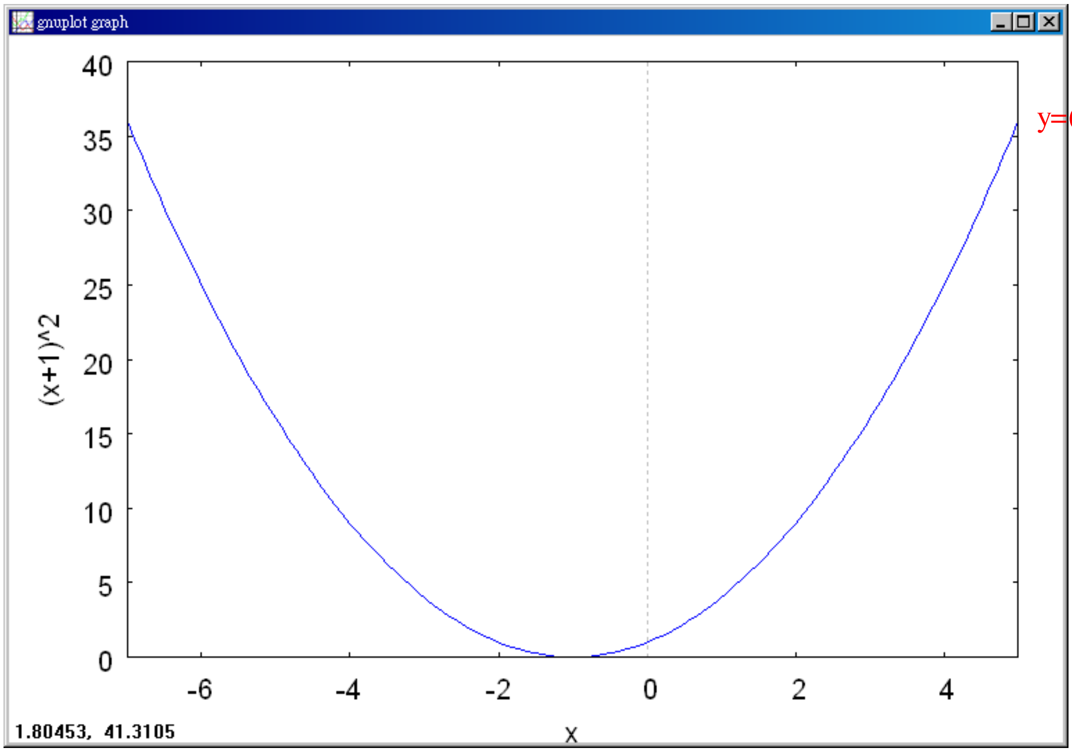
$$\begin{cases} x=-4+t \\ y=t^2 \end{cases}$$

將 x+4=t 代入 $y=t^2$，所以，$y=(x+4)^2$，因此，此函數爲拋物線。
$(-4+t,t^2)$對 x=-4 的對稱點爲$(4-t,t^2)$。
4.畫出 $y=(x+1)^2$ 的圖形，並求其對稱軸及最低點。
(%i1) plot2d((x+1)^2, [x,-7,5]);

※「plot2d([縱軸 y(函數)], [橫軸 x(x,x 值範圍最小值, x 值範圍最大值)])」指令表示畫 2d 坐標圖，輸入 plot2d((x+1)^2, [x,-7,5]) → ctrl+enter。(註：x 自行取值即可。)

(%o1)

因此，對稱軸為-1；最低點為(-1,0)。



$y=(x+1)^2$

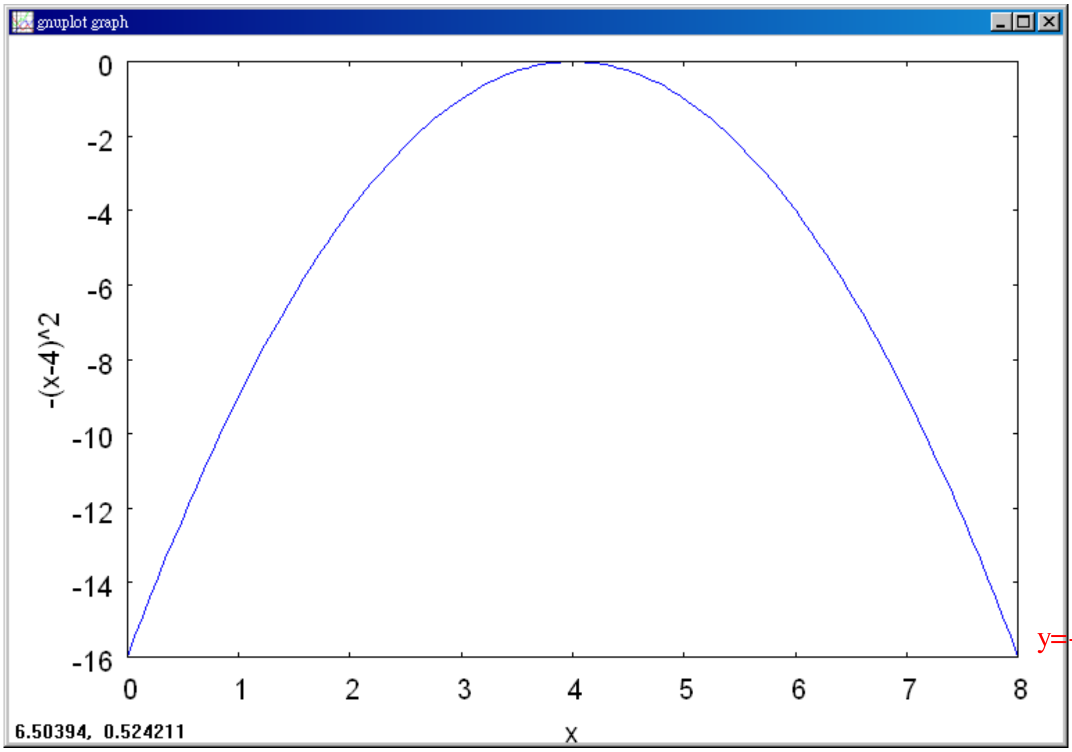
5.試畫出 $y=-(x-4)^2$ 的圖形，並求其對稱軸及其最高點。

(%i1) plot2d(-(x-4)^2, [x,0,8]);

※「plot2d([縱軸 y(函數)], [橫軸 x(x,x 值範圍最小值, x 值範圍最大值)])」指令表示畫 2d 坐標圖，輸入 plot2d(-(x-4)^2, [x,0,8]) → ctrl+enter。(註：x 自行取值即可。)

(%o1)

因此，對稱軸為 4；最高點為(4,0)。



$y=-(x-4)^2$

此題無法直接使用 Maxima 軟體

6.求下列各二次函數的最大值以及其圖形的最高點。

(1)$y=-(x+5)^2+1$

最大值爲 1；最高點爲(-5,1)。

(2)$y=-8(2x-4)^2+1$

最大值爲 1；最高點爲(2,1)。

(3)$y=-x^2+6x+4$

$y=-x^2+6x+4 \rightarrow y=-(x^2-6x+9)+4+9 \rightarrow y=-(x-3)^2+13$，

因此，最大值爲 13；最高點爲(3,13)。

(4) $y=-2x^2-4x+1 \rightarrow -2(x^2+2x+1)+1+2 \rightarrow -2(x+1)^2+3$，

因此，最大值爲 3；最高點爲(-1,3)。

此題無法直接使用 Maxima 軟體

7.求下列各二次函數圖形的對稱軸。

(1)$y=-(x+1)^2$

對稱軸爲-1。

(2)$y=-(x-1)^2$

對稱軸爲 1。

(3)$y=x^2+4x+1$
$y=(x+2)^2-3$，
對稱軸為-2。
(4)$y=-x^2+6x$
$y=-(x^2-6x+9)+9$ → $y=-(x-3)^2+9$，
對稱軸為 3。
(5)$y=(1-x)(1+x)$
$y=1-x^2$ → $y=-x^2+1$，
對稱軸為 0。
(6)$y=2x^2+8x+c$，c 是常數
$y=2(x^2+4x+4)+c-8$ → $y=2(x^2 2)+c-8$，
對稱軸為-2。

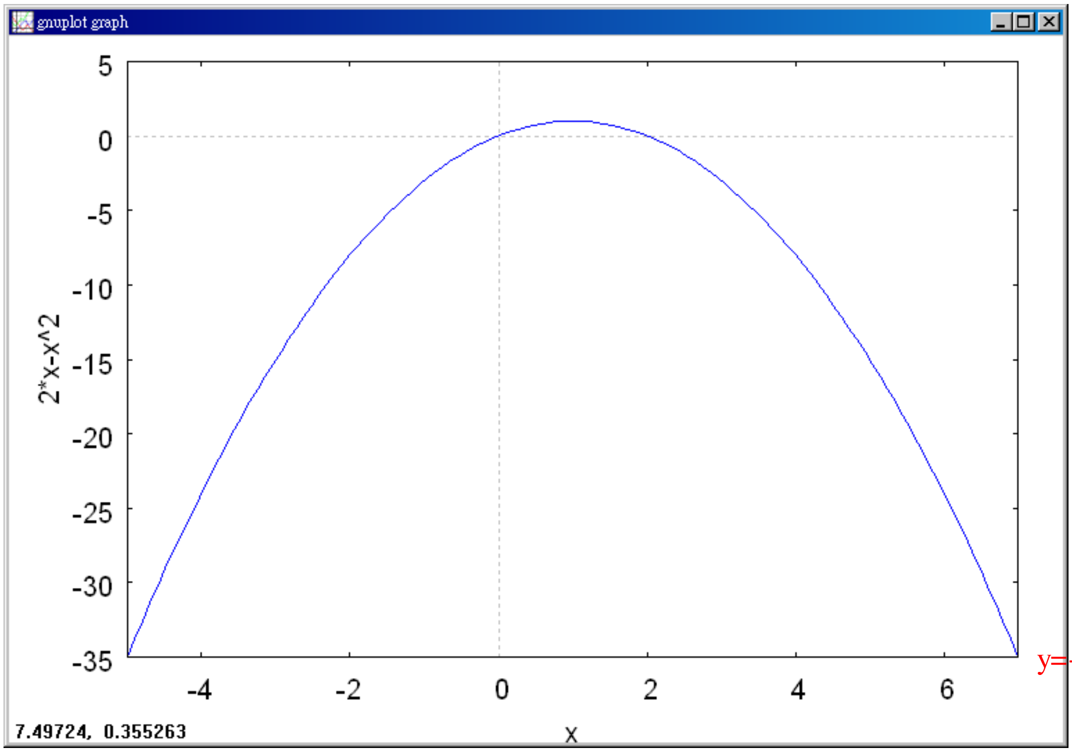
此題無法直接使用 Maxima 軟體

8.求下列各二次函數的最小值及其圖形的最低點。
(1)$y=(x+2)^2-2$
最小值為-2；最低點為(-2,2)。
(2)$y=5(x-2)^2-2$
最小值為 2；最低點為(2,-2)。
(3)$y=x^2+10x$
$y=(x+5)^2-25$，
最小值為-25；最低點為(-5,-25)。
(4)$y=2x^2+12x-100$
$y=2(x^2+6x+9)-100-18$ → $y=2(x+3)-118$，
最小值為-118；最低點為(-3,-118)。
9.畫出 $y=-x^2+2x$ 的圖形。

(%i1) plot2d(-x^2+2*x, [x,-5,7]);

※「plot2d([縱軸 y(函數)], [橫軸 x(x,x 值範圍最小值, x 值範圍最大值)])」指令表示畫 2d 坐標圖，輸入 plot2d(-x^2+2*x, [x,-5,7]) → ctrl+enter。(註：x 自行取值即可。)

(%o1)



$y=-x^2+2x$

10.設一拋物線對稱於 x=2，且通過(0,1)、(-1,5)，求表示此拋物線的二次函數。

★ $y=a(x-h)^2+k$

$$\begin{cases} 1=a(0-2)^2+k \\ 5=a(-1-2)^2+k \end{cases}$$

(%i1) solve([1=a*(0-2)^2+k,5=a*(-1-2)^2+k], [a,k]);

※「solve([變數算式,變數算式], [變數,變數])」指令表示求解，輸入 solve([1=a*(0-2)^2+k,5=a*(-1-2)^2+k], [a,k]) → ctrl+enter。

(%o1) $[[a=\frac{4}{5},k=-\frac{11}{5}]]$

因此，此拋物線的二次函數為 $y=\frac{4}{5}(x-2)^2-\frac{11}{5}$。

11.設一拋物線的最低點是(-1,-2)，且通過(0,2)、(-2,b)，求 b。

★ $y=a(x-h)^2+k$

$$\begin{cases} -2=a(-1+1)^2+k \\ 2=a(0+1)^2+k \end{cases}$$

(%i1) solve([-2=a*(-1+1)^2+k,2=a*(0+1)^2+k], [a,k]);

※「solve([變數算式,變數算式], [變數,變數])」指令表示求解，輸入 solve([-2=a*(-1+1)^2+k, 2=a*(0+1)^2+k], [a,k]) → ctrl+enter。

(%o1) [[a=4,k=-2]]

此拋物線的二次函數爲 $y=4(x-2)^2-2$。

將(-2,b)帶入 $y=4(x-2)^2-2$，可得 $b=4(-2-2)^2-2$。

(%i2) solve([b=4*(-2-2)^2-2], [b]);

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([b=4*(-2-2)^2-2], [b]) → ctrl+enter。

(%o2) [b=62]

此題無法直接使用 Maxima 軟體

12.設拋物線 $y=(x-1)^2$ 的最低點爲 A，且與 y=4 的圖形交於 B、C，求△ABC 的面積。

由 $4=(x-1)^2$ 可知，

(%i1) solve([4=(x-1)^2], [x]);

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([4=(x-1)^2], [x]) → ctrl+enter。

(%o1) [x=3,x=-1]

B 和 C 分別爲(-1,4)和(3,4)，

所以，底等於 $\overline{BC}=\sqrt{(-1-3)^2+(4-4)^2}=4$，

(%i2) sqrt((-1-3)^2+(4-4)^2);

※「sqrt(數値)」指令表示求開根號，輸入 sqrt((-1-3)^2+(4-4)^2) → ctrl+enter。

(%o2) 4

高=y=4，

△ABC 面積=$4\times4\times\frac{1}{2}$=8 平方單位。

(%i3) 4*4*(1/2);

※直接輸入 4*4*(1/2) → ctrl+enter。

(%o3) 8

應用問題 Maxima 軟體無法直接解

13.設拋物線的最低點爲 O(0,0)，且與 y=8 的圖形交於 A、B。已知△OAB 的面積爲 16，求

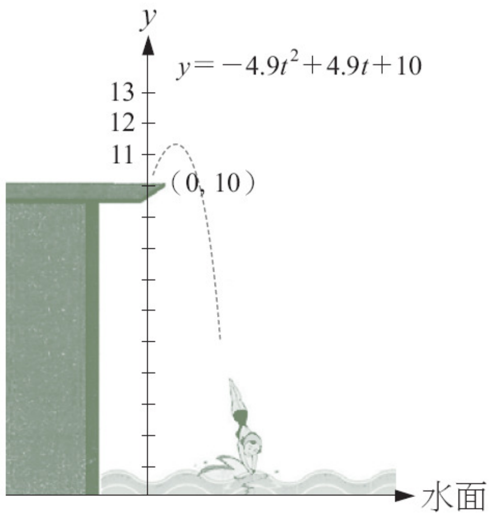
(1)A、B 兩點的坐標。
高=y=8，
△OAB 面積=16 → $16=底\times8\times\frac{1}{2}$ ，
(%i1) solve([16=x*8*(1/2)], [x]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([16=x*8*(1/2)], [x]) → ctrl+enter。
(%o1) [x=4]
4÷2=2，
(%i2) 4/2; ※直接輸入 4/2 → ctrl+enter。
(%o2) 2
因此，A、B 兩點的坐標分別為(-2,8)、(2,8)。
(2)表示此拋物線的二次函數。
將三點(0,0)、(-2,8)、(2,8)代入 $y=ax^2+bx+c$。

$$\begin{cases} 0=c \\ 8=a\times(-2)^2+8b+c \\ 8=a\times(2)^2+8b+c \end{cases}$$

(%i1) solve([0=c,8=a*(-2)^2+(-2)*b+c,8=a*(2)^2+2*b+c], [a,b,c]);
※「solve([變數算式,變數算式,變數算式], [變數,變數,變數])」指令表示求解，輸入 solve([0=c,8=a*(-2)^2+(-2)*b+c,8=a*(2)^2+2*b+c], [a,b,c]) → ctrl+enter。
(%o1) [[a=2,b=0,c=0]]
因此，此拋物線的二次函數 $y=2x^2$ 。

應用問題 Maxima 軟體無法直接解

14.在時間 t=0 秒時，某位跳水選手從離水面高 10 公尺的平台跳下（如右圖）。已知在 t 秒時的高度為 $y=-4.9t^2+4.9t+10$（公尺），請問此選手起跳後幾秒達到最高點？此時離水面多少公尺？



將 $y=-4.9t^2-4.9t+10$ 做配方可知，

$y=-4.9(t^2-t+\frac{1}{4})+10+\frac{4.9}{4} \rightarrow y=-4.9(t-\frac{1}{2})^2+\frac{44.9}{4}$，

因此，在$\frac{1}{2}$達到最高點，

(%i1) float(solve([y=-4.9*((1/2)-(1/2))^2+(44.9)/4], [y]));

※「float(算式)」指令表示將結果轉換為小數；「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 float(solve([y=-4.9*((1/2)-(1/2))^2+(44.9)/4], [y])) → ctrl+enter。

rat: replaced -11.225 by -449/40 = -11.225

※(註)rat：指令表示將小數化成分數。

(%o1) [y=11.225]

此離水面為 11.225 公尺。

第 3 章 二次函數 第 3 章綜合習題

1.是非題

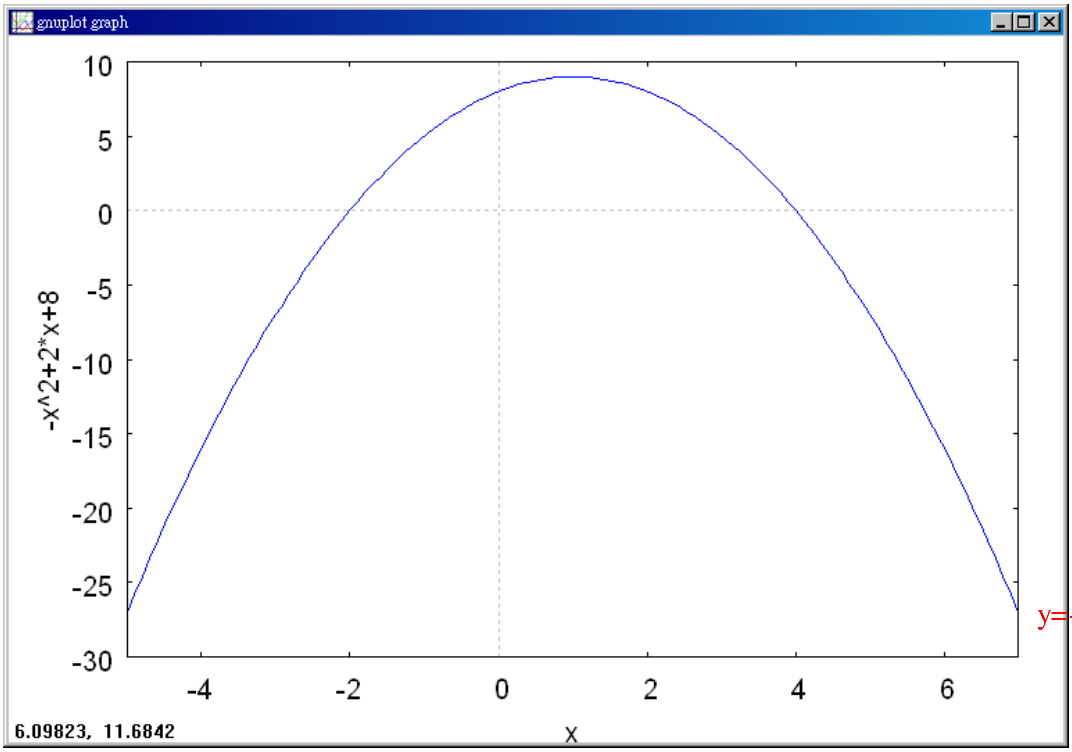
(X)(1)$y=-x^2+2x+8$ 圖形的開口向上。

(%i1) plot2d([-x^2+2*x+8],[x,-5,7]);

※「plot2d([縱軸 y(函數)], [橫軸 x(x,x 值範圍最小值, x 值範圍最大值)])」指令表

示畫 2d 坐標圖，輸入 plot2d([-x^2+2*x+8],[x,-5,7]) → ctrl+enter。(註：x 自行取值即可。)

(%o1)



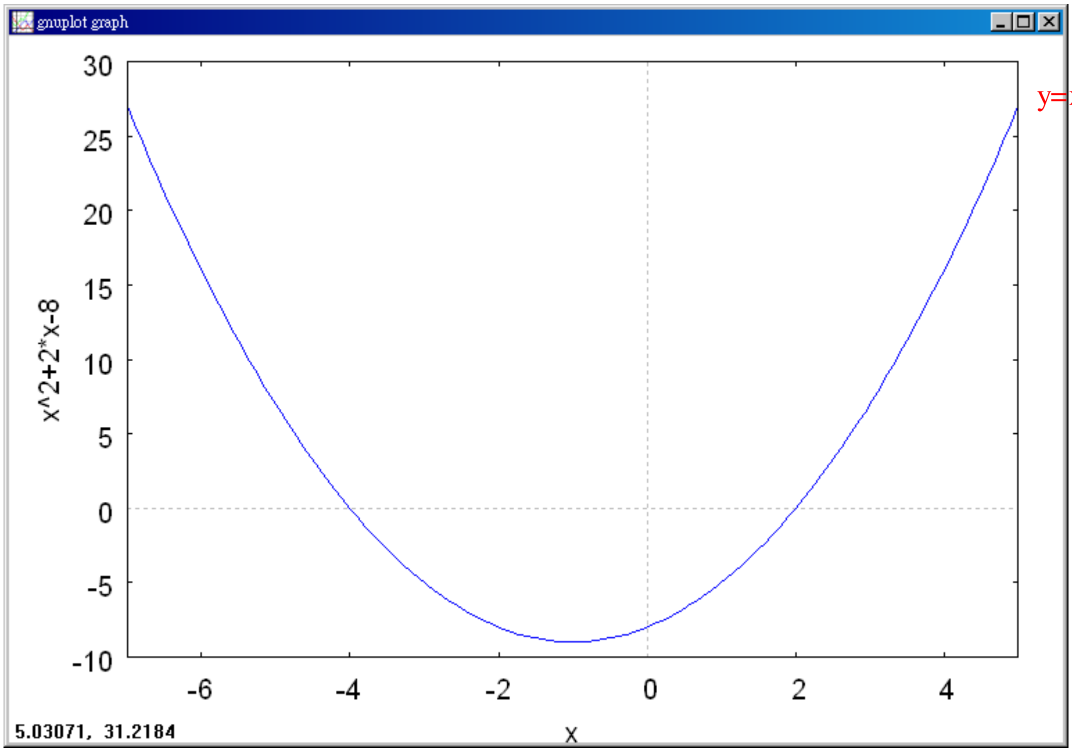
y=-x ^{2} +2x+8

(X)(2)y=x ^{2} +2x-8 圖形的開口向下。

(%i1) plot2d([x^2+2*x-8],[x,-7,5]);

※「plot2d([縱軸 y(函數)], [橫軸 x(x,x 值範圍最小值, x 值範圍最大值)])」指令表示畫 2d 坐標圖，輸入 plot2d([x^2+2*x-8],[x,-7,5]) → ctrl+enter。(註：x 自行取值即可。)

(%o1)



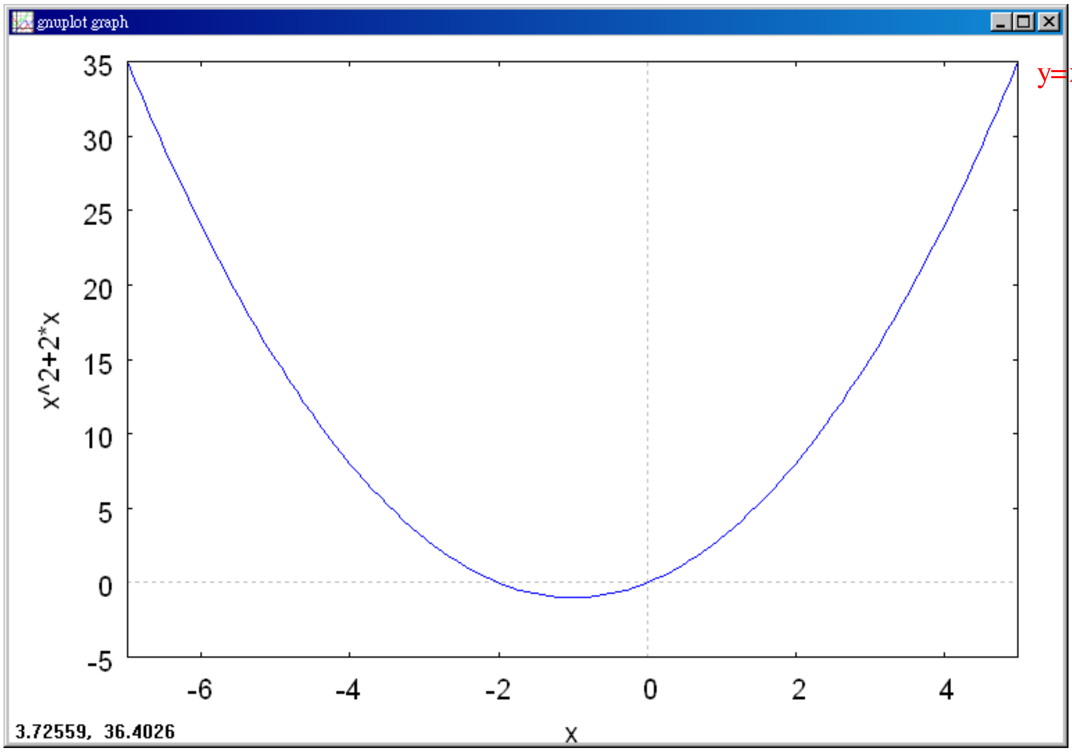
$y=x^2+2x-8$

(X)(3)$y=x^2+2x$ 的對稱軸是 $x=0$。

(%i1) plot2d([x^2+2*x],[x,-7,5]);

※「plot2d([縱軸 y(函數)], [橫軸 x(x,x 值範圍最小值, x 值範圍最大值)])」指令表示畫 2d 坐標圖，輸入 plot2d([x^2+2*x],[x,-7,5]) → ctrl+enter。(註：x 自行取值即可。)

(%o1)



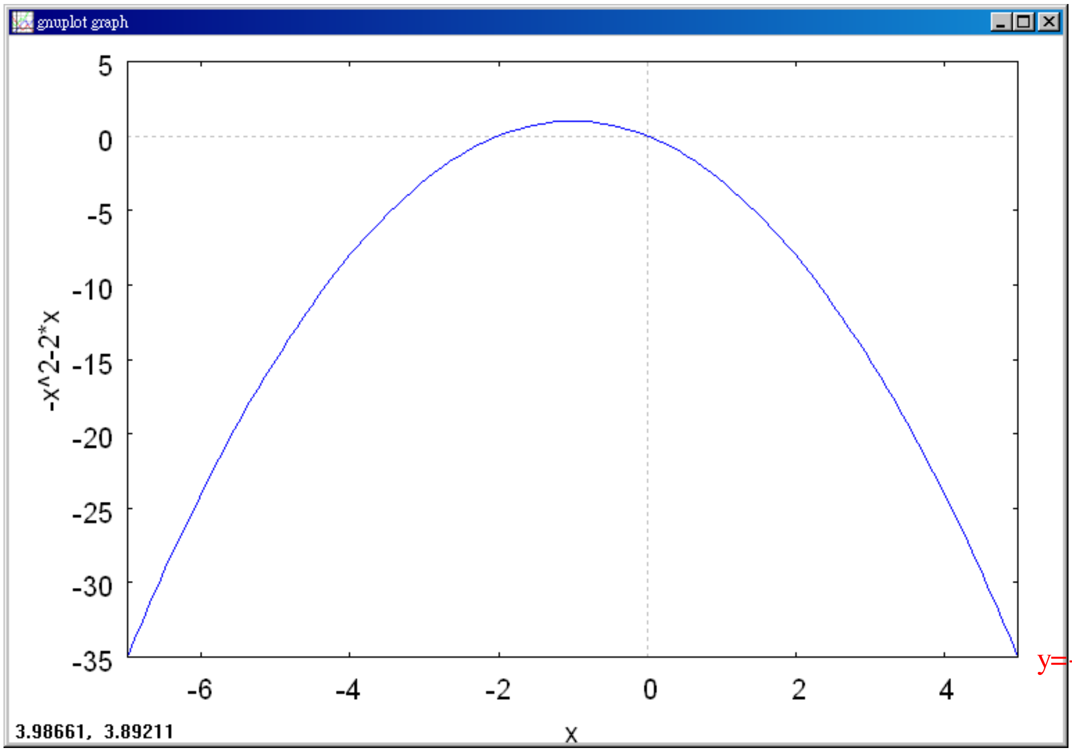
$y=x^2+2x$

(X)(4)$y=-x^2-2x$ 的對稱軸是 $x=0$。

(%i1) plot2d([-x^2-2*x],[x,-7,5]);

※「plot2d([縱軸 y(函數)], [橫軸 x(x,x 值範圍最小值, x 值範圍最大值)])」指令表示畫 2d 坐標圖，輸入 plot2d([-x^2-2*x],[x,-7,5]) → ctrl+enter。(註：x 自行取值即可。)

(%o1)



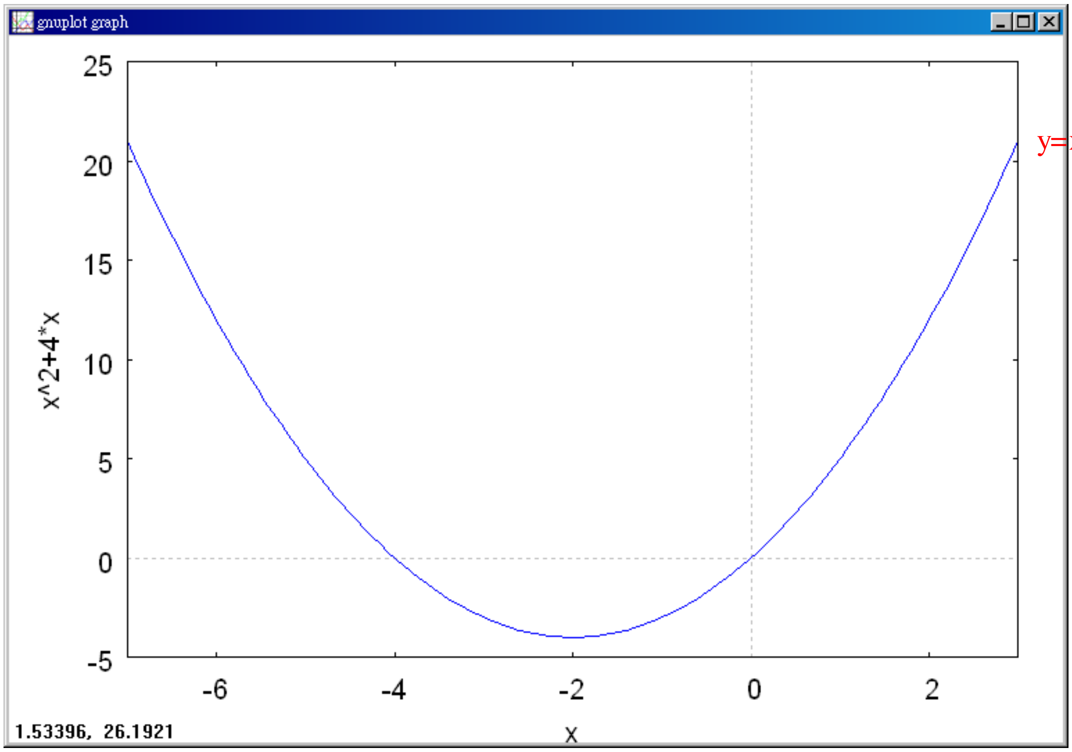
y=-x^2 -2x

(X)(5)y=x^2 +4x 圖形的最低點是(0,0)。

(%i1) plot2d([x^2+4*x],[x,-7,3]);

※「plot2d([縱軸 y(函數)], [橫軸 x(x,x 值範圍最小值, x 值範圍最大值)])」指令表示畫 2d 坐標圖，輸入 plot2d([x^2+4*x],[x,-7,3]) → ctrl+enter。(註：x 自行取值即可。)

(%o1)



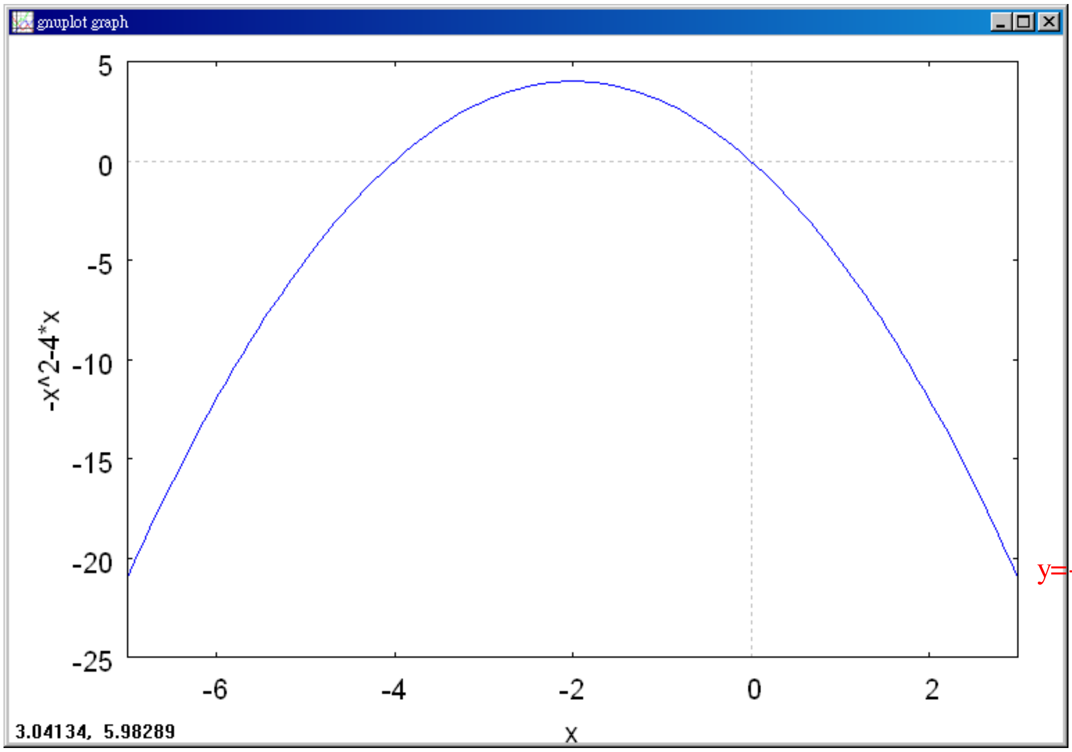
y=x ^{2} +4x

(X)(6)y=-x ^{2} -4x 圖形的最高點是(0,0)。

(%i1) plot2d([-x^2-4*x],[x,-7,3]);

※「plot2d([縱軸 y(函數)], [橫軸 x(x,x 值範圍最小值, x 值範圍最大值)])」指令表示畫 2d 坐標圖，輸入 plot2d([-x^2-4*x],[x,-7,3]) → ctrl+enter。(註：x 自行取值即可。)

(%o1)



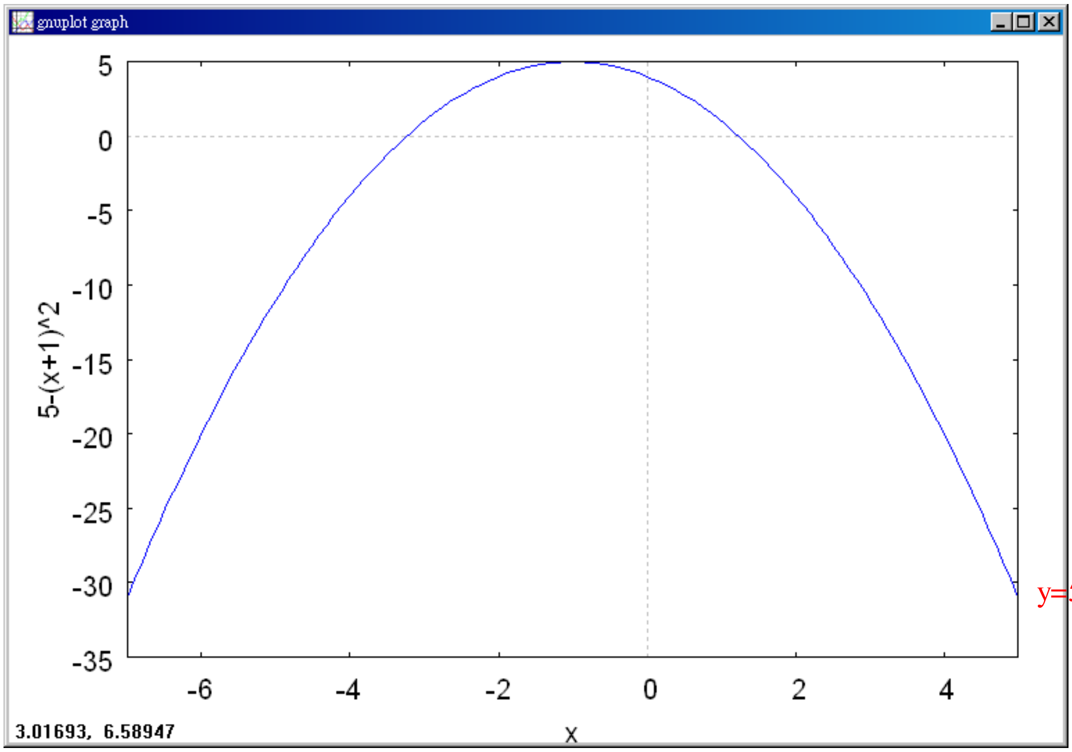
$y=-x^2-4x$

(○)(7)$y=5-(x+1)^2$的對稱軸是 x=-1。

(%i1) plot2d([5-(x+1)^2],[x,-7,5]);

※「plot2d([縱軸 y(函數)], [橫軸 x(x,x 值範圍最小值, x 值範圍最大值)])」指令表示畫 2d 坐標圖，輸入 plot2d([5-(x+1)^2],[x,-7,5]) → ctrl+enter。(註：x 自行取值即可。)

(%o1)



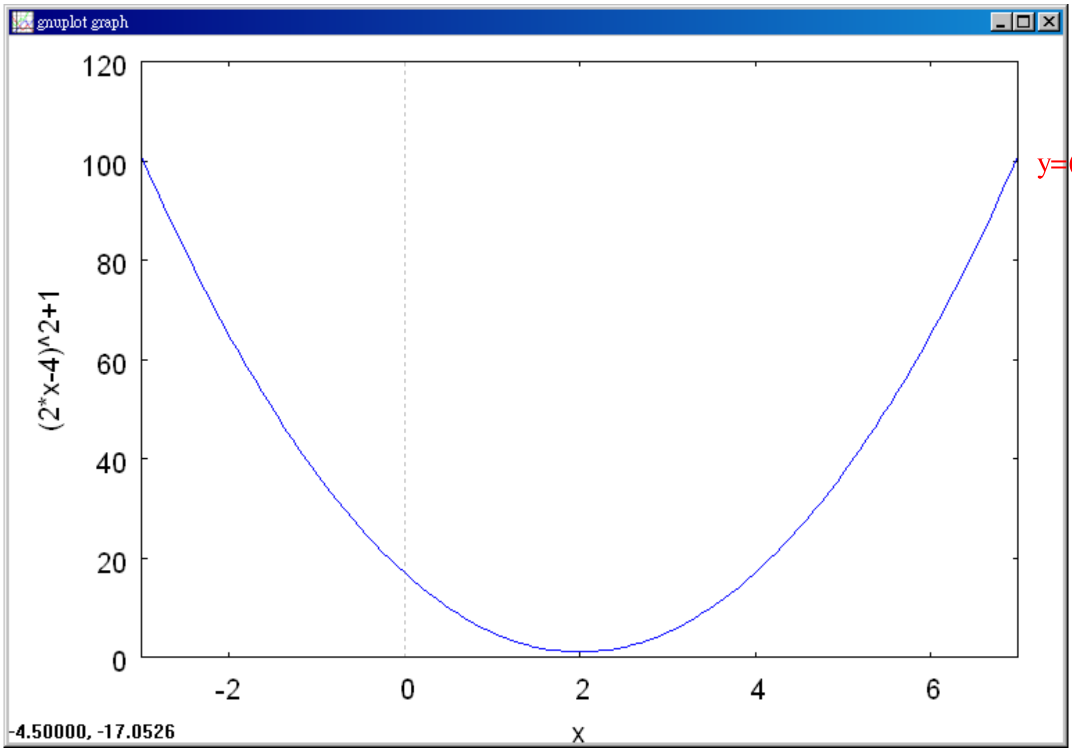
$y=5-(x+1)^2$

(X)(8)$y=(2x-4)^2+1$ 的對稱軸是 x=4。

(%i1) plot2d([(2*x-4)^2+1],[x,-3,7]);

※「plot2d([縱軸 y(函數)], [橫軸 x(x,x 值範圍最小值, x 值範圍最大值)])」指令表示畫 2d 坐標圖，輸入 plot2d([(2*x-4)^2+1],[x,-3,7]) → ctrl+enter。(註：x 自行取值即可。)

(%o1)



y=(2x-4)^{2}+1

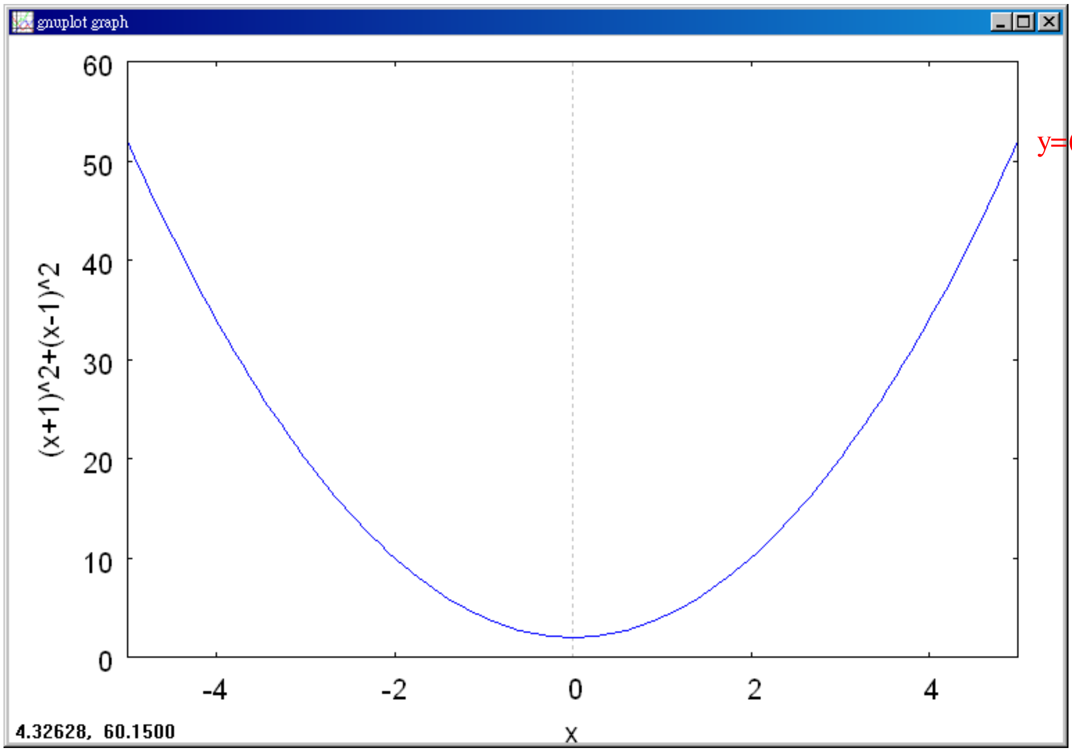
(○)(9)若某二次函數的對稱軸是 x=-1，則此二次函數可以寫成 $y=a(x+1)^{2}+k$，其中 a、k 為常數。

(X)(10)$y=(x-1)^{2}+(x+1)^{2}$ 的對稱軸可以是 x=1，也可以是 x=-1。

(%i1) plot2d([(x-1)^2+(x+1)^2],[x,-5,5]);

※「plot2d([縱軸 y(函數)], [橫軸 x(x,x 值範圍最小值, x 值範圍最大值)])」指令表示畫 2d 坐標圖，輸入 plot2d([(2*x-4)^2+1],[x,-3,7]) → ctrl+enter。(註：x 自行取值即可。)

(%o1)



y=(x-1)^2+(x+1)

2.若 y=(x-h)^2+k 通過(-3,8)以及(5,8)二點，求 h、k。

$$\begin{cases} 8=(-3-h)^2+k \\ 8=(8-h)^2+k \end{cases}$$

(%i1) solve([8=(-3-h)^2+k,8=(8-h)^2+k], [h,k]);

※「solve([變數算式,變數算式], [變數,變數])」指令表示求解，輸入 solve([8=(-3-h)^2+k,8=(8-h)^2+k], [h,k]) → ctrl+enter。

(%o1) [[h=$\frac{5}{2}$,k=-$\frac{89}{4}$]]

此題無法直接使用 Maxima 軟體

3.若某拋物線最低點爲 A(2,-8)，與 x 軸交於 B、C 兩點，若△ABC 的面積爲 24，求表示此拋物線的二次函數。

高=y=8，

△OAB 面積=24 → 24=底x8x$\frac{1}{2}$，

(%i1) solve([24=x*8*(1/2)], [x]);

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求

解，輸入 solve([16=x*8*(1/2)], [x]) → ctrl+enter。

(%o1) [x=6]

6÷2=3，

(%i2) 6/2; ※直接輸入 6/2 → ctrl+enter。

(%o2) 3

因此，A、B 兩點的坐標分別爲(2+3,0)=(5,0)、(2-3,0)=(-1,0)。

將三點(2,-8)、(5,0)、(-1,0)代入 $y=ax^2+bx+c$。

$$\begin{cases} -8 = a\times(2)^2 + 2b + c \\ 0 = a\times(5)^2 + 5b + c \\ 0 = a\times(-1)^2 + (-1)\times b + c \end{cases}$$

(%i3) solve([-8=a*(2)^2+2*b+c,0=a*(5)^2+5*b+c,0=a*(-1)^2+(-1)*b+c], [a,b,c]);

※「solve([變數算式,變數算式,變數算式], [變數,變數,變數])」指令表示求解，輸入 solve([-8=a*(2)^2+2*b+c,0=a*(5)^2+5*b+c,0=a*(-1)^2+(-1)*b+c], [a,b,c]) → ctrl+enter。

(%o3) $[[a=\frac{8}{9},b=-\frac{32}{9},c=-\frac{40}{9}]]$

因此，此拋物線的二次函數 $y=\frac{8}{9}x^2-\frac{32}{9}x-\frac{40}{9}$。

此題無法直接使用 Maxima 軟體

4.已知 $y=x^2+c$ 的圖形通過 A(-a,4)、B(a,4)兩點，其中 a>0，且△OAB 爲直角三角形，其中 O 爲原點(0,0)，求

(1)a

$a^2+16+a^2+16=4a^2$，

(%i1) solve([a^2+16+a^2+16=4*a^2], [a]);

(%o1) [a=-4,a=4]

負不符所求，因此 a=4。

(2)c

將 B(4,4)代入 $y=x^2+c$，

(%i1) [x,y]:[4,4]; ※「[變數,變數]:[數值,數值]」指令表示設定變數的數值，輸入[x,y]:[4,4] → ctrl+enter。

(%o1) [4,4]

(%i2) solve([y=x^2+c], [c]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([y=x^2+c], [c]) → ctrl+enter。

(%o2) [c=-12]