以下將依據九年一貫數學部編教科書的章節內容，以 MAXIMA 軟體

解答國中三年級上學期例題、隨堂練習及自我評量以供國中生參考

目 錄

國中三年級上學期(第 5 冊)

第 1 章 相似三角形

1-1 縮放

1-2 相似三角形

1-3 相似形的應用

第 2 章 圓

2-1 圓

2-2 圓與角

2-3 圓與多邊形

2-4 數學證明

第 3 章 二次函數

3-1 二次函數與圖形

3-2 配方法與拋物線

國中三年級下學期(第 6 冊)

第 1 章 機率與統計

1-1 資料的統計與分析

1-2 資料的分佈

1-3 機率

第 2 章 回顧與前瞻

2-1 數與量

2-2 代數

2-3 幾何

2-4 綜合解題

國立屏東教育大學 應用數學系 研究助理 林于智

國中三年級上學期(第 5 冊)

第 1 章 相似三角形
1-1 縮放
1-2 相似三角形
1-3 相似形的應用
第 2 章 圓
2-1 圓
2-2 圓與角
2-3 圓與多邊形
2-4 數學證明
第 3 章 二次函數
3-1 二次函數與圖形
3-2 配方法與拋物線

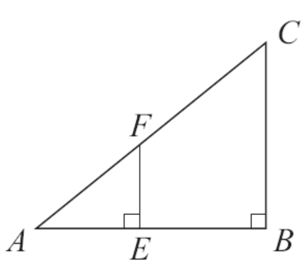
第 1 章 相似三角形 1-1 縮放

P. 7 例 1

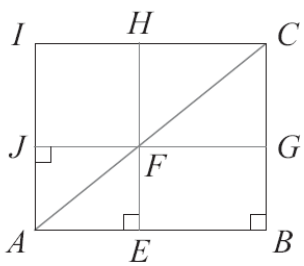
此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，有兩個直角三角形△AEF 和△ABC，試說明這兩三角形的三邊成比例，

即 $\overline{BC}:\overline{EF}=\overline{AB}:\overline{AE}=\overline{AC}:\overline{AF}$ 。



將△ABC 複製一份，如右圖拼成一個矩形 ABCI。



矩形 AEHI 的面積=矩形 ABGJ 的面積，

由於矩形 AEHI 面積= $\overline{AE}$ ‧ $\overline{AI}=\overline{AE}$ ‧ $\overline{BC}$ ，

矩形 ABGJ 面積= $\overline{AB}$ ‧ $\overline{BG}=\overline{AB}$ ‧ $\overline{EF}$ ，

因此，$\overline{AE}$ ‧ $\overline{BC}=\overline{AB}$ ‧ $\overline{EF}$ ，即 $\overline{AB}$ ： $\overline{AE}=\overline{BC}$ ： $\overline{EF}$ 。

要說明斜邊的比，就要應用畢氏定理。

設上面比例的比值為 r，即 $\overline{AB}$ =r $\overline{AE}$ ‧ $\overline{BC}$ =r $\overline{EF}$ ，

由畢氏定理得，

$\overline{AC}=\sqrt{(\overline{AB})^2+(\overline{BC})^2}=\sqrt{(r\overline{AE}^2)+(r\overline{EF})^2}=\sqrt{r^2(\overline{AE}^2+\overline{EF}^2)}$ =r $\sqrt{\overline{AE}^2+\overline{EF}^2}$ =r $\overline{AF}$ ，

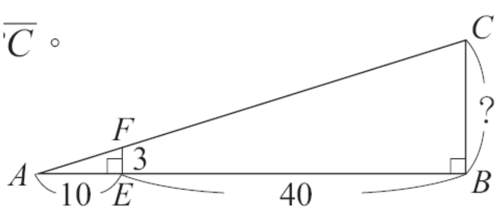
由上述可知 $\overline{BC}$ ： $\overline{EF}=\overline{AB}$ ： $\overline{AE}=\overline{AC}$ ： $\overline{AF}$ 。

P. 8 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

1.如右圖，$\overline{AE}$ =10，$\overline{EB}$ =40，$\overline{EF}$ =3，求 $\overline{BC}$ 。

$\overline{C}$ 。



$\overline{BC}$ ： $\overline{EF}=\overline{AB}$ ： $\overline{AE}$ → x：3=(10+40)：10 → 10x=3(10+40)

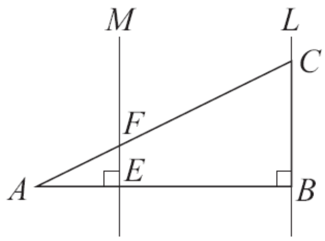
(%i1) solve([10*x=3*(10+40)], [x]);   ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([10*x=3*(10+40)], [x]) → ctrl+enter。

(%o1) [x=15]

因此，$\overline{BC}$ =15。

2.如右圖，已知 $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AE}}$ =3，且直線 L 和 M 都垂直於 $\overline{AB}$ 。在 M 上任找一點 F，作 $\overline{AF}$

交 L 於 C，則 $\frac{\overline{AC}}{\overline{AF}}$ 是不是一定也是 3？



是。

(1)直線變成直線。若縮放前後的直線是相異兩直線，則此兩直線平行。

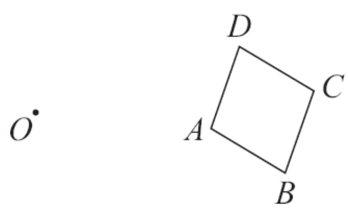
(2)線段變成線段，且縮放後的線段長為原線段長的 k 倍。

(3)角度保持不變。

P. 12 例 2

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，有一邊長為 1 的菱形 ABCD，試以 O 點為中心，畫出 ABCD 縮放 2 倍的圖形，並討論該圖形是否為菱形？

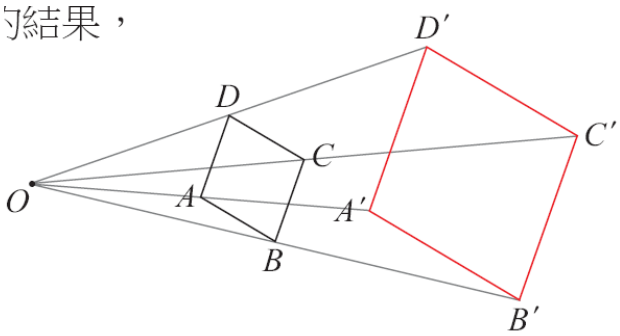


由上面的說明知道，任一線段縮放後仍然是線段。因此，若要畫出四邊形 ABCD 縮放 2 倍的圖形，只要先畫出四個頂點縮放後的點，再用線段連接，就是四邊形 ABCD 縮放後的圖形。底下的四邊形 A'B'C'D'即為所求。

由於 A'B'C'D'是由 O 將 ABCD 縮放 2 倍的結果，

所以 $\overline{A'B'}=\overline{AB}\times 2=1\times 2=2$，同理 $\overline{B'C'}=\overline{C'B'}=\overline{D'A'}=2$，

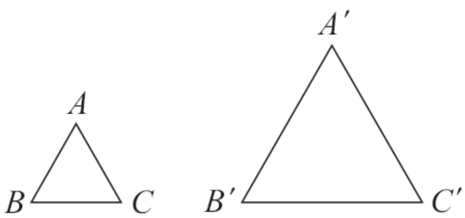
因此新的四邊形 A'B'C'D'是一菱形。



P. 13 例 3

此題無法直接使用 Maxima 軟體

說明正三角形縮放 2 倍的圖形仍然是正三角形。



如右圖，若△ABC 為一正三角形，而△A'B'C'是它縮放 2 倍的圖形。

由前述性質(2)知，無論中心點 O 在哪裡，都有 $\overline{A'B'}=2\overline{AB}$，$\overline{B'C'}=2\overline{BC}$，$\overline{C'A'}=2\overline{CA}$，

因為，△ABC 是正三角形，

因此，$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$，

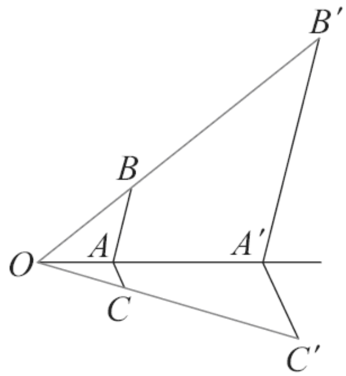
所以，$\overline{A'B'}=\overline{B'C'}=\overline{C'A'}$，

即△A'B'C'是正三角形。

P. 14 例 4

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，∠B'A'C'是由 O 將∠BAC 的圓形縮放 3 倍的結果，試說明∠BAC=∠B'A'C'。



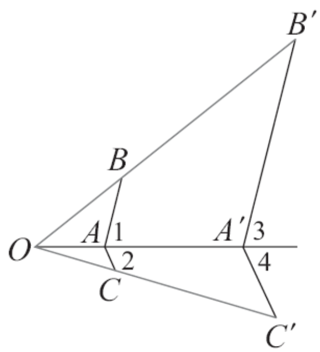
標示∠1、∠2、∠3、∠4 如右圖。由於$\overleftrightarrow{AB}$ // $\overleftrightarrow{A'B'}$，$\overleftrightarrow{AC}$ // $\overleftrightarrow{A'C'}$，

所以∠1=∠3　(同位角相等)

　　∠2=∠4　(同位角相等)

因此，∠1+∠2=∠3+∠4，

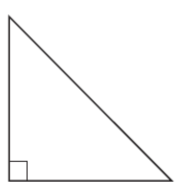
即　　∠BAC=∠B'A'C'。



P. 16 例 5

此題無法直接使用 Maxima 軟體

有一△ABC 的三內角分別為 50°、60°、70°。問右邊的三角形可不可能是△ABC 經過縮放後的圖形？



因為△ABC 經過縮放後的圖形，仍然是一個三內角為 50°、60°、70°的三角形。而右邊的三角形是一個直角三角形，有一個內角是 90°。所以此三角形不可能是△ABC

縮放後的圖形。

P. 18 例 6

此題無法直接使用 Maxima 軟體

試判斷圖 1-13 的四邊形 ABCD 和 EFGH 是否相似？

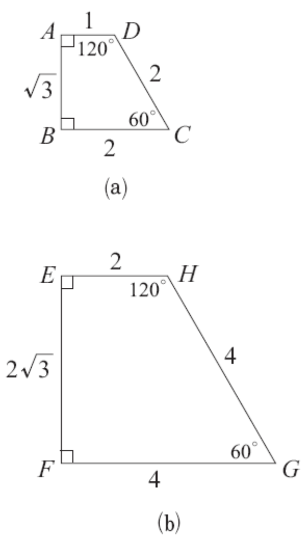
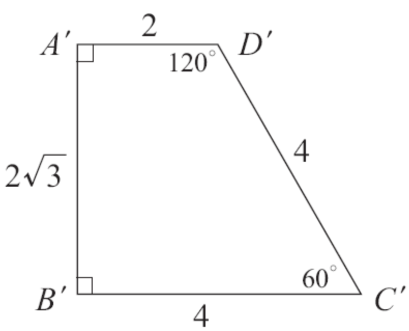


圖 1-13

右圖是將四邊形 ABCD 縮放 2 倍後的四邊形 A'B'C'D'。其內角與原來四邊形 ABCD 的內角相同，而對應邊長則是原圖形邊長的 2 倍。比較 A'B'C'D'和 EFGH，可知兩圖形的邊角對應相等。所以四邊形 A'B'C'D' ≅ 四邊形 EFGH，因此 ABCD 和 EFGH 相似。

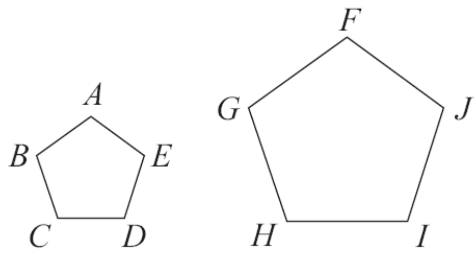


P. 20 例 7

此題無法直接使用 Maxima 軟體

說明任意兩個正五邊形相似。

如右圖，任取兩個正五邊形。



(a) (b)

由於正五邊形的內角都是$(\frac{180\times 3}{5})^{\circ}=108^{\circ}$，因此，這兩個正五邊形的對應角相等。

又因爲每個正五邊形的五邊均等長，

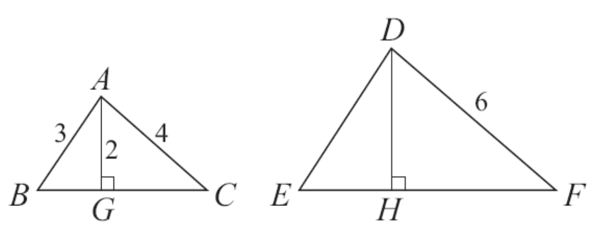
所以，$\overline{FG}:\overline{AB}=\overline{GH}:\overline{BC}=\overline{HI}:\overline{CD}=\overline{IJ}:\overline{DE}=\overline{JF}:\overline{EA}$，

亦即對應邊成比例，因此這兩個正五邊形相似。

P. 20 例 8

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，△ABC~△DEF，其中 A、B、C 的對應點分別爲 D、E、F。已知$\overline{AB}=3$，$\overline{AC}=4$，$\overline{AG}=2$，$\overline{DF}=6$，求$\overline{DE}$和$\overline{DH}$。



因爲，△ABC~△DEF，所以，△DEF 全等於△ABC 的縮放圖形，其縮放的倍數爲

$\frac{\overline{DF}}{\overline{AC}}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$，

因此，$\overline{DE}$是$\overline{AB}$的$\frac{3}{2}$倍，

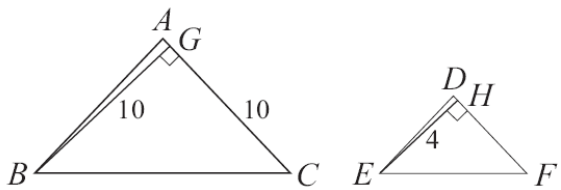
亦即$\overline{DE}=\overline{AB}\times\frac{3}{2}=3\times\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$，

由於 $\overline{AG} \perp \overline{BC}$，所以經過縮放後，其對應邊也會互相垂直，所以 $\overline{DH}$ 就是 $\overline{AG}$ 的對應邊，因此，$\overline{DH} = \overline{AG} \times \frac{3}{2}$ =2×$\frac{3}{2}$=3。

P. 20 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，△ABC~△DEF，其中 A、B、C 的對應點分別為 D、E、F。已知 $\overline{BG}$=10，$\overline{CG}$=10，$\overline{AG}$=1，$\overline{EH}$=4，求 $\overline{DH}$ 和 $\overline{HF}$。



因為，△ABC~△DEF，所以，△DEF 全等於△ABC 的縮放圖形，其縮放的倍數為 $\frac{\overline{BG}}{\overline{EH}} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$，

因此，$\overline{CG}$ 是 $\overline{HF}$ 的 $\frac{5}{2}$ 倍，

亦即 $\overline{CG} = \overline{HF} \times \frac{5}{2} \rightarrow 10 = \overline{HF} \times \frac{5}{2}$，因此，$\overline{HF}$=4，

由於 $\overline{AC} \perp \overline{GB}$，所以經過縮放後，其對應邊也會互相垂直，所以 $\overline{DF}$ 就是 $\overline{HE}$ 的對應邊，因此，$\overline{AG} = \overline{DH} \times \frac{5}{2} \rightarrow 1 = \overline{HF} \times \frac{5}{2}$，因此，$\overline{DH} = \frac{2}{5}$。

P. 23 1-1 自我評量

此題無法直接使用 Maxima 軟體

1.下麵的敘述對的打「○」，錯誤的打「X」。

(X)(1)將直線 L 縮放 3 倍後的圖形，會因為中心點 O 的位置不同，而不能判別出它是不是一直線。

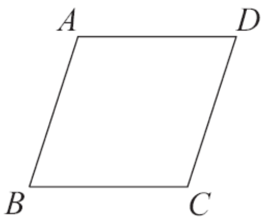
(○)(2)將一線段縮放 2 倍後的線段，其長度不會隨中心點 O 的位置改變而不同。

(○)(3)可找到某中心點 O，將一非正方形的矩形縮放成正方形。

(X)(4)非正方形的菱形不可能縮放成正方形。

此題無法直接使用 Maxima 軟體

2.如右圖，有一平行四邊形 ABCD，將 ABCD 縮放 $\frac{3}{2}$ 倍後得一四邊形 A'B'C'D'。說明 A'B'C'D'也是平行四邊形。



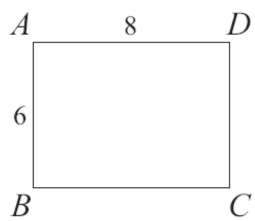
(1)直線變成直線。若縮放前後的直線是相異兩直線，則此兩直線平行。

(2)線段變成線段，且縮放後的線段長爲原線段長的 k 倍。

(3)角度保持不變。

此題無法直接使用 Maxima 軟體

3.如右圖，有一矩形 ABCD。若將此矩形縮放成矩形 A'B'C'D'，且對角線 $\overline{B'D'}$ 長爲 25，求



(1)A'B'C'D'的周長。

$\overline{BD}=\sqrt{8^2+6^2}=10$，

(%i1) sqrt(8^2+6^2);　※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 sqrt(8^2+6^2) → ctrl+enter。

(%o1) 10

$\frac{\overline{B'D'}}{\overline{BD}}=\frac{25}{10}=\frac{5}{2}$，

所以，$\overline{B'D'}$是$\overline{BD}$的$\frac{5}{2}$倍，

亦即$\overline{A'D'}=\overline{AD}\times\frac{5}{2}$=8×$\frac{5}{2}$=20，$\overline{A'B'}=\overline{AB}\times\frac{5}{2}$=6×$\frac{5}{2}$=15，

因此，A’B’C’D’的周長=20+20+15+15=70。

(2) A’B’C’D’的面積。

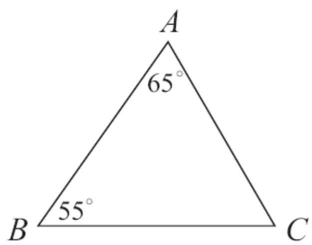
A’B’C’D’的面積=20×15=30 平方單位。

第 1 章 相似三角形 1-2 相似三角形

P. 24 例 1

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如圖 1-14，有兩個三角形，其中∠A=∠D=65°，∠B=∠E=55°，說明△ABC~△DEF。



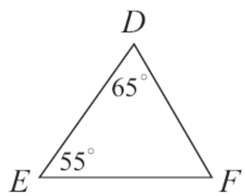
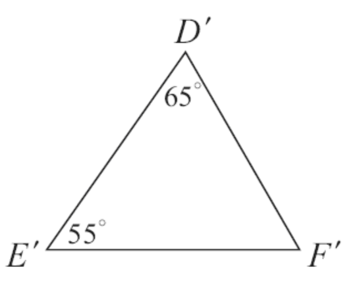


圖 1-14

既然要說明兩三角形相似，因此可以想想要將△DEF 縮放幾倍，才會和△ABC 全等。

從圖 1.14 來看，由於對應角要相等，因此 D、E 的對應點必須是 A、B，換句話說，$\overline{AB}$ 應該就是 $\overline{DE}$ 的對應邊，因此$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}}$就是縮放的倍數，我們用 r 表示$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}}$。

現將△DEF 縮放 r 倍，得△D’E’F’如右圖。



因為 $\overline{D'E'}$=r$\overline{DE}=\overline{AB}$。

且 ∠D’=∠D=∠A=65°，

$\angle E' = \angle E = \angle B = 55^\circ$，

所以　$\triangle D'E'F' \cong \triangle ABC$，　　(ASA 全等性質)

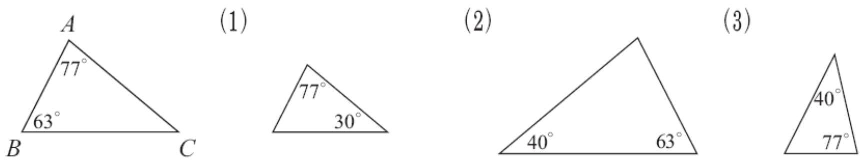
這表示△DEF 縮放 r 倍後和△ABC 全等，

因此△ABC~△DEF。

P. 25 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

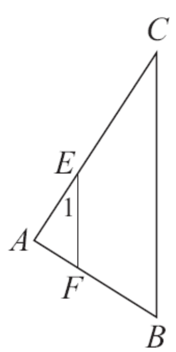
下圖中哪些三角形與△ABC 相似？(1)



P. 26 例 2

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，已知$\angle 1 = \angle C$，$\overline{BC}=20$，$\overline{AB}=10$，$\overline{AF}=3$，$\overline{AE}=5$，求$\overline{EF}$和$\overline{AC}$。



因爲　$\angle 1 = \angle C$，

$\angle A = \angle A$，

所以　$\triangle AEF \sim \triangle ACB$，　　(AA 相似性質)

因此　$\overline{EF} : \overline{CB} = \overline{AE} : \overline{AC} = \overline{AF} : \overline{AB} = 3 : 10$，　　(對應邊成比例)

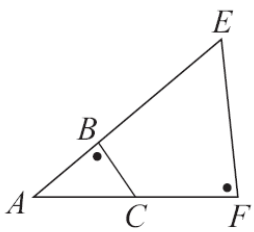
即$\overline{EF} = \dfrac{3}{10}\overline{CB} = \dfrac{3}{10} \times 20 = 6$，

$\overline{AC} = \dfrac{10}{3}\overline{AE} = \dfrac{10}{3} \times 5 = \dfrac{50}{3}$。

P. 26 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，△AEF 中∠ABC=∠AFE，且 C 為 $\overline{AF}$ 的中點。若 $\overline{AB}=10$，$\overline{AC}=12$，求 $\overline{AE}$。



由於∠ABC=∠AFE，∠A=∠A，所以，△ABC~△AFE，

因此，$\overline{AB}:\overline{AF}=10:24=5:12$，

$\overline{AE}=\frac{12}{5}\overline{AC}=\frac{12}{5}\times 12=\frac{144}{5}$。

P. 27 例 3

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如圖 1.15，有兩個三角形，∠A=∠D=75°，$\overline{AB}=10$，$\overline{AC}=20$，$\overline{DE}=12$，$\overline{DF}=24$，說明△ABC~△DEF。

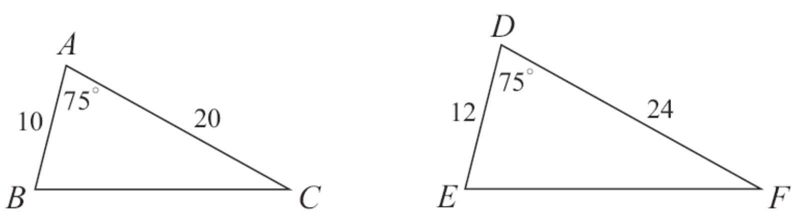
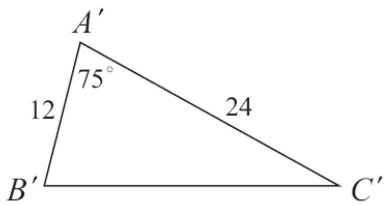


圖 1-15

依照圖 1-15 所給的條件，我們觀察到∠A=∠D 的兩邊長成比例，

$\overline{AB}:\overline{DE}=\overline{AC}:\overline{DF}=5:6$，也就是說，∠D 兩邊長是∠A 兩對應邊長的 $\frac{6}{5}$ 倍。

現將△ABC 縮放 $\frac{6}{5}$ 倍後得△A'B'C'，如右圖。



因爲 $\overline{A'B'}=\frac{6}{5}\overline{AB}=\overline{DE}$，

$\overline{A'C'}=\frac{6}{5}\overline{AC}=\overline{DF}$，

∠A’=∠A=∠D，

所以 △A’B’C’≅△DEF， (SAS 全等性質)

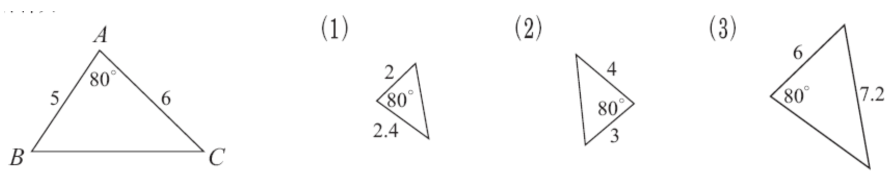
因此 △ABC~△DEF。

P. 27 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

若只用 SAS 相似性質，試判斷(1)、(2)、(3)三個三角形中，哪一個和△ABC 相似？

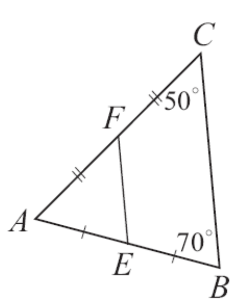
(1)



P. 28 例 4

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖△ABC 中，E、F 分別爲 $\overline{AB}$ 、$\overline{AC}$ 的中點。已知∠B=70°，∠C=50°，求∠AEF 和∠AFE。



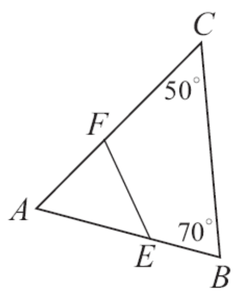
由於 E、F 為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 的中點，所以， $\overline{AE}$ ： $\overline{AB}=\overline{AF}$ ： $\overline{AC}$ =1：2，

又　∠A=∠A，
所以　△AEF~△ABC，　(SAS 相似性質)
因此　∠AEF=∠B=70°，　(對應角相等)
　　　∠AFE=∠C=50°。　(對應角相等)

P. 28 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，△ABC 中 $\overline{AE}$ 、 $\overline{AF}$ 分別為 $\overline{AC}$ 、 $\overline{AB}$ 的一半長，求∠AEF 和∠AFE。



由於 $\overline{AE}$ 、 $\overline{AF}$ 為 $\overline{AC}$ 、 $\overline{AB}$ 的中點，所以， $\overline{AE}$ ： $\overline{AC}=\overline{AF}$ ： $\overline{AB}$ =1：2，

又　∠A=∠A，
所以　△AEF~△ACB，
因此　∠AEF=∠C=50°，
　　　∠AFE=∠B=70°。

P. 29 例 5

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如圖 1-16，有兩三角形，依照圖中邊長的條件，說明△ABC~△DEF。

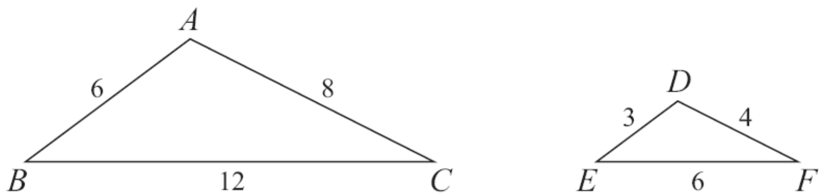
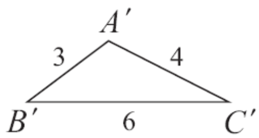


圖 1-16

依照圖 1-16 所給的條件，我們觀察到這兩個三角形的三組對應邊成比例：

$\overline{AB}$ ： $\overline{DE}=\overline{BC}$ ： $\overline{EF}=\overline{AC}$ ： $\overline{DF}$ =2：1，

將△ABC 縮放$\frac{1}{2}$倍後得△A'B'C'，如右圖，



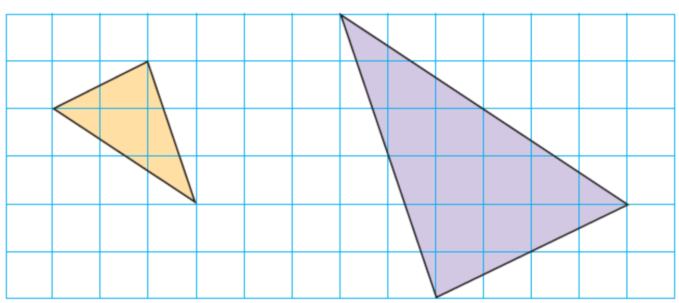
則 $\overline{A'B'}=\overline{DE}$ ，$\overline{B'C'}=\overline{EF}$ ，$\overline{A'C'}=\overline{DF}$ ，

得△A'B'C' ≅ △DEF， (SSS 全等性質)
因此，△ABC~△DEF。

P. 29 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

下圖中的兩個三角形是否相似？



橘色三角形三邊長分別為：

$\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$ 、$\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$ 、$\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$ ，

(%i1) sqrt(3^2+1^2); ※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 sqrt(3^2+1^2) → ctrl+enter。

(%o1) $\sqrt{10}$

(%i2) sqrt(3^2+2^2); ※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 sqrt(3^2+2^2) → ctrl+enter。

(%o2) $\sqrt{13}$

(%i3) sqrt(2^2+1^2); ※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 sqrt(2^2+1^2) → ctrl+enter。

(%o3) $\sqrt{5}$

紫色三角形三邊長分別為：

$\sqrt{2^2+6^2}=2\sqrt{10}$ 、 $\sqrt{4^2+6^2}=2\sqrt{13}$ 、 $\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$ ，

(%i4) sqrt(2^2+6^2); ※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 sqrt(2^2+6^2) → ctrl+enter。

(%o4) $2\sqrt{10}$

(%i5) sqrt(4^2+6^2); ※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 sqrt(4^2+6^2) → ctrl+enter。

(%o5) $2\sqrt{13}$

(%i6) sqrt(4^2+2^2); ※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 sqrt(4^2+2^2) → ctrl+enter。

(%o6) $2\sqrt{5}$

我們觀察到這兩個三角形的三組對應邊成比例：(根據大邊對大邊)

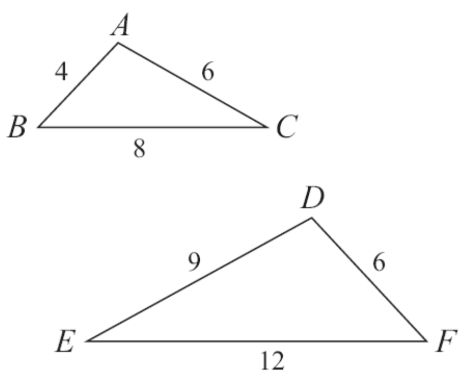
$\sqrt{10}$ ：$2\sqrt{10}=\sqrt{13}$ ：$\sqrt{52}=2\sqrt{13}$ ：$2\sqrt{5}=1$ ：2，

橘色三角形縮放$\dfrac{1}{2}$倍後得紫色三角形。

P. 30 例 6

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，有兩三角形△ABC 和△DEF，求△ABC 面積：△DEF 面積。



$\overline{AB}$ ：$\overline{BC}$ ：$\overline{CA}=\overline{DF}$ ：$\overline{FE}$ ：$\overline{ED}$=2：4：3，

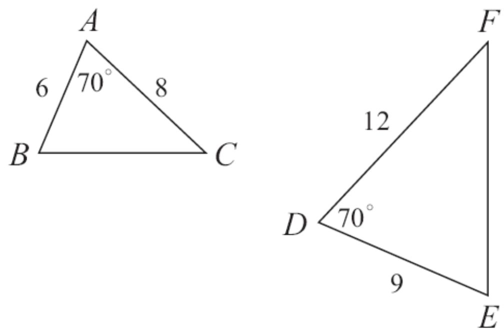
所以，△ABC~△DEF， (SSS 相似性質)

因此，△ABC：△DEF=$\overline{AB}^2$ ：$\overline{DF}^2$=4^2 ：6^2=16：36=4：9。

P. 31 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，有兩三角形△ABC 和△DEF，求△ABC 面積：△DEF 面積。



$\overline{AB}$ ： $\overline{AC}=\overline{DE}$ ： $\overline{DF}$=3：4，

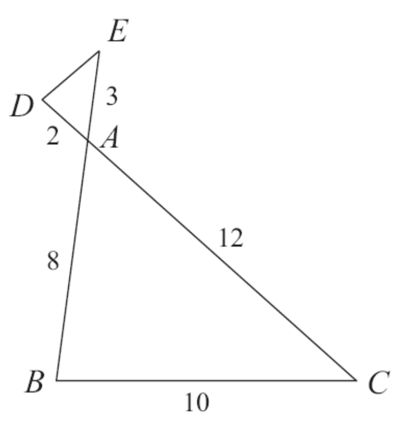
所以，△ABC~△DEF，

因此，△ABC：△DEF=$\overline{AB}^2$ ： $\overline{DE}^2$=6^2 ：9^2=36：81=4：9。

P. 31 例 7

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，$\overline{BE}$和$\overline{CD}$交於 A，$\overline{AD}$=2，$\overline{AE}$=3，$\overline{AB}$=8，$\overline{AC}$=12，$\overline{BC}$=10，求$\overline{DE}$ 。



因為 $\overline{AD}$ ： $\overline{AB}$=1：4=$\overline{AE}$ ： $\overline{AC}$ ，

且　∠DAE=∠BAC，　(對頂角相等)
所以　△ADE~△ABC，　(SAS 相似性質)

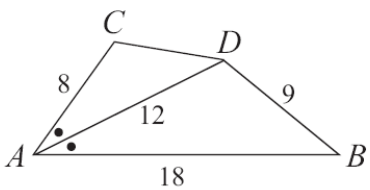
因此　$\overline{DE}$ ： $\overline{BC}$ =1：4，　(對應邊成比例)

將 $\overline{BC}$ =10 代入，得 $\overline{DE}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$ 。

P. 31 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，$\overline{AD}$ 是∠CAB 的角平分線，$\overline{AB}$ =18，$\overline{BD}$=9，$\overline{AD}$=12，$\overline{AC}$ =8，求 $\overline{CD}$ 。



因爲　$\overline{AC}$ ： $\overline{AD}$=2：3=$\overline{AD}$ ： $\overline{AB}$ ，

且　∠CAD=∠DAB，
所以　△CAD~△DAB，

因此　$\overline{CD}$ ： $\overline{DB}$=2：3 → $\overline{CD}$ ：9=2：3 → 3$\overline{CD}$=18，

(%i1) solve([3*x=18], [x]);　※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([3*x=18], [x]) → ctrl+enter。

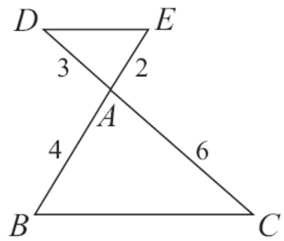
(%o1) [x=6]

因此，$\overline{CD}$=6。

P. 32 例 8

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，$\overline{BE}$ 和 $\overline{CD}$ 交於 A 點，$\overline{AD}$=3，$\overline{AE}$ =2，$\overline{AB}$ =4，$\overline{AC}$ =6，說明 $\overline{DE}\,//\,\overline{BC}$ 。



因為 $\overline{AD}:\overline{AC}=1:2=\overline{AE}:\overline{AB}$，

且 ∠DAE=∠CAB， (對頂角相等)

所以 △DAE~△CAB， (SAS 相似性質)

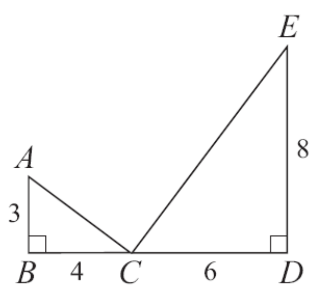
因此 ∠DEA=∠CBA， (對應角相等)

所以 $\overline{DE}\,//\,\overline{BC}$。 (內錯角相等)

P. 32 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，B、C、D 在同一直線上，求∠ACE。



$\overline{AC}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

(%i1) sqrt(3^2+4^2); ※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 sqrt(3^2+4^2) → ctrl+enter。

(%o1) 5

$\overline{EC}=\sqrt{8^2+6^2}=10$

(%i1) sqrt(8^2+6^2); ※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 sqrt(8^2+6^2) → ctrl+enter。

(%o1) 10

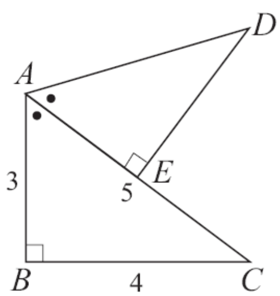
由此可知，∠DCE=∠BAC，∠DEC=∠BCA，

∠BCA＋∠DCE=90°，
因此，∠ACE=180°-90°=90°。

P. 32 例 9

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，$\overline{AB}=3$，$\overline{BC}=4$，$\overline{AC}=5$，E 為 $\overline{AC}$ 的中點，∠BAC=∠EAD，求 $\overline{DE}$ 。



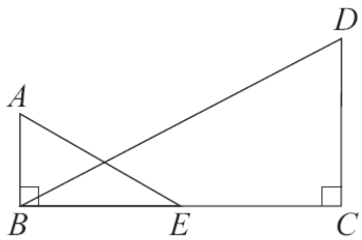
因為　∠B=∠AED=90°，∠BAC=∠EAD，
故　△ABC~△AED，　(AA 相似性質)
又因為　$\overline{AE}=\frac{5}{2}$，　(E 為 $\overline{AC}$ 中點)
所以　$\overline{ED}:\overline{BC}=\overline{AE}:\overline{AB}=\frac{5}{2}:3$，　(對應邊成比例)
因此　$3\overline{ED}:\frac{5}{2}\overline{BC}$，
得　$\overline{ED}=\overline{BC}\times\frac{5}{6}=4\times\frac{5}{6}=\frac{10}{3}$。

P. 33 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，有兩個直角三角形△ABE 與△BCD，其中∠A=∠D，E 是 $\overline{BC}$ 的中點，求

$\overline{BD}:\overline{AE}$。



因爲　$\angle B=\angle C=90^{\circ}$，$\angle A=\angle D$，

故　$\triangle ABE \sim \triangle DCB$，　(AA 相似性質)

又因爲　$\overline{BE}=\frac{1}{2}\overline{BC}$，　(E 爲 $\overline{BC}$ 中點)

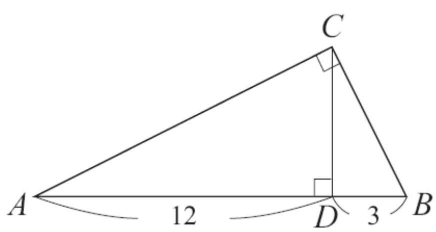
所以　$\overline{BE}:\overline{BC}=1:2$，

因此　$\overline{BD}:\overline{AE}=2:1$。

P. 33 例 10

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，直角三角形 ABC 中，$\angle ACB=90^{\circ}$，$\overline{CD}$ 是斜邊上的高，已知 $\overline{AD}=12$，$\overline{BD}=3$。



(1)以 AA 相似性質說明$\triangle ACD \sim \triangle CBD$。

因爲　$\angle ACD+\angle A=90^{\circ}$，　($\angle D$ 是直角)

且　$\angle B+\angle A=90^{\circ}$，　($\angle ACB$ 是直角)

所以　$\angle ACD=\angle B$，

又知　$\angle ADC=\angle CDB=90^{\circ}$，

因此　$\triangle ACD \sim \triangle CBD$。　(AA 相似性質)

(2)求 $\overline{CD}$。

在(1)的相似關係中，$\triangle ACD$ 中的 A、C、D 分別對應於$\triangle CBD$ 中的 C、B、D。

所以　$\overline{AD}:\overline{CD}=\overline{CD}:\overline{BD}$，　(對應邊成比例)

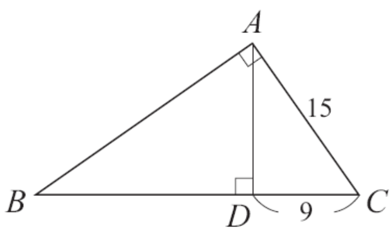
即　　$12：\overline{CD}=\overline{CD}：3$，

得　　$\overline{CD}^2=36$，因此，$\overline{CD}=6$。

P. 34 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

1.如右圖，$\angle BAC=90^\circ$，$\overline{AD}$ 為 $\overline{BC}$ 上的高，$\overline{AC}=15$，$\overline{DC}=9$，求 $\overline{BC}$。



因為　$\angle AAD+\angle B=90^\circ$，　　($\angle D$ 是直角)
且　　$\angle B+\angle C=90^\circ$，　　($\angle BAC$ 是直角)
所以　$\angle BAD=\angle C$，
又知　$\angle BDA=\angle ADC=90^\circ$，
因此　$\triangle BAD \sim \triangle ACD$。　　(AA 相似性質)

$\overline{AD}=\sqrt{15^2-9^2}=12$，

(%i1) sqrt(15^2-9^2);　　※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 sqrt(15^2-9^2) → ctrl+enter。

(%o1) 12

在上述的相似關係中，△BAD 中的 B、A、D 分別對應於△ACD 中的 A、C、D。

所以　$\overline{BD}：\overline{AD}=\overline{AD}：\overline{CD}$，　　(對應邊成比例)

即　　$\overline{BD}：12=12：9$，

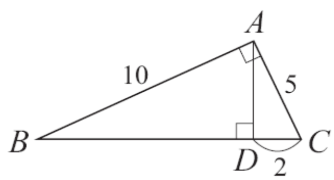
得　　$144=9\overline{BD}$，

(%i1) solve([144=9*x], [x]);　　※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([144=9*x], [x]) → ctrl+enter。

(%o1) [x=16]

因此，$\overline{BD}$=16。

2.如右圖，可不可能有一個△ABC，∠BAC=90°，$\overline{AD}$ 為 $\overline{BC}$ 上的高，且 $\overline{AB}$ =10，$\overline{AC}$ =5，$\overline{DC}$ =2？



△BAD 中的 B、A、D 分別對應於△ACD 中的 A、C、D。

$\overline{AD}=\sqrt{5^2-2^2}=\sqrt{21}$

(%i1) sqrt(5^2-2^2); ※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 sqrt(5^2-2^2) → ctrl+enter。

(%o1) $\sqrt{21}$

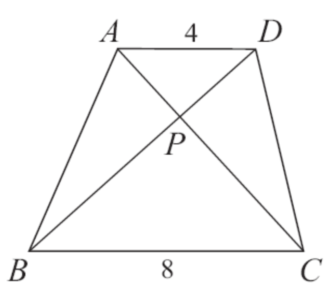
$\overline{BA}:\overline{AD}=\overline{AC}:\overline{CD}$ → $10:\sqrt{21}\neq 5:2$，

所以，如圖，不可能有一個△ABC。

P. 35 例 11

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，有一梯形 ABCD，其中 $\overline{AD}\,//\,\overline{BC}$ 。求△APD 面積：△BPC 面積。



由於 ∠APD=∠CPB (對頂角相等)
∠ADP=∠CBP (內錯角相等)
所以 △APD~△CPB (AA 相似性質)

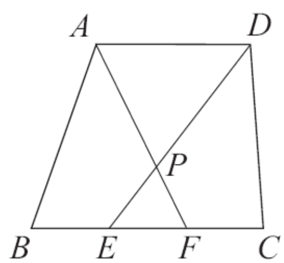
因爲 $\overline{AD}:\overline{BC}=4:8=1:2$

所以 △APD 面積：△CPB 面積=$1^2:2^2=1:4$。

P. 35 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，四邊形 ABCD 爲一梯形，其中 $\overline{AD}//\overline{BC}$，$\overline{AD}=10$，$\overline{BC}=15$，若已知 E、F 三等分 $\overline{BC}$，求



(1) $\overline{DP}:\overline{PE}$。

由於 ∠APD=∠EPF (對頂角相等)
∠ADE=∠CED (內錯角相等)
所以 △APD~△FPE (AA 相似性質)

因爲 $\overline{AD}:\overline{BC}=10:15\times\frac{1}{3}=10:5=2:1$。

(2)△APD 面積：△EFP 面積。
△APD 面積：△EFP 面積=$2^2:1^2=4:1$

P. 36 1-2 自我評量

此題無法直接使用 Maxima 軟體

1.在△ABC 與△DEF 中，下列哪個條件，可確定△ABC 與△DEF 相似。
(可確定的打「○」，不能確定的打「X」。)
(○)(1)∠A=∠D，∠B=∠E。
(○)(2)∠A=∠D，∠B=∠F。
(○)(3)∠A=∠D，∠C=∠E。

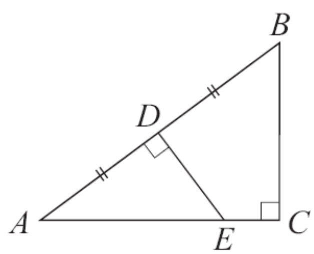
(X)(4)∠A=∠D，$\overline{AB}:\overline{DE}=\overline{BC}:\overline{EF}$。

(◯)(5) ∠A=∠D，$\overline{AB}$ ： $\overline{DE}=\overline{AC}$ ： $\overline{DF}$ 。

(◯)(6) $\overline{BC}$ ： $\overline{EF}=\overline{AC}$ ： $\overline{DF}=\overline{DE}$ ： $\overline{AB}$ 。

此題無法直接使用 Maxima 軟體

2.如右圖，∠C=90°，$\overline{DE}$ 是 $\overline{AB}$ 的中垂線。



(1)△ADE 是否與△ACB 相似？是。

因為　∠A+∠E=90°，　　　(∠D 是直角)

且　　∠A+∠B=90°，　　　(∠C 是直角)

所以　∠ABC=∠AED，

又知　∠ADE=∠ACB=90°，

因此　△ACD~△CBD。

(2)若 $\overline{AB}$ =40，$\overline{AC}$ =32，求 $\overline{DE}$ 。

$\overline{AB}$ =40，$\overline{AD}=\overline{AB}\div 2=20$，

△ADE~△ACB，

$\overline{CB}=\sqrt{40^2-32^2}$ =24，

(%i1) sqrt(40^2-32^2);　　※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 sqrt(40^2-32^2) → ctrl+enter。

(%o1) 24

$\overline{AC}$ ： $\overline{CB}=\overline{AD}$ ： $\overline{DE}$ → 32：24=20：$\overline{DE}$ ，

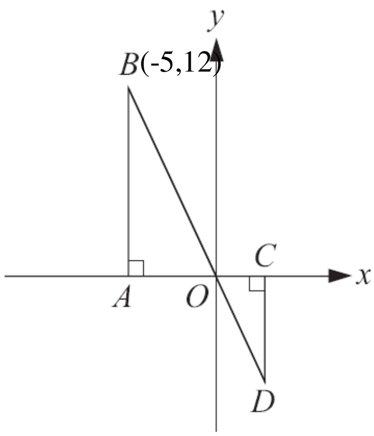
(%i1) solve([24*20=32*x], [x]);　　※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([24*20=32*x], [x]) → ctrl+enter。

(%o1) [x=15]

因此，$\overline{DE}=15$。

此題無法直接使用 Maxima 軟體

3.如右圖，B、O、D 三點在同一直線上，B 點坐標為(-5,12)，$\overline{CD}=6$，試求 D 點坐標。



由於∠BAO=∠DCO=90°，B 和 D 又在同一直線上，
所以，△BAO~△DCO，

$\overline{AB}$ ： $\overline{AO}=\overline{CD}$ ： $\overline{CO}$ → 12：5=6： $\overline{DO}$ ，

(%i1) solve([5*6=12*x], [x]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([5*6=12*x], [x]) → ctrl+enter。

(%o1) $[x=\frac{5}{2}]$

所以，$\overline{DO}=\frac{5}{2}$ ，

因此，D 點坐標($\frac{5}{2}$,-6)。

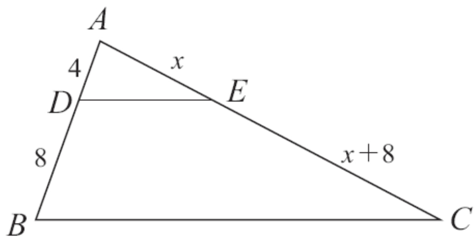
第 1 章 相似三角形 1-3 相似形的應用

P. 37 例 1

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，△ABC 中，D、E 在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 邊上，且 $\overline{DE}$ // $\overline{BC}$ ，已知 $\overline{AD}=4$，$\overline{BD}=8$，

$\overline{AE}$=x，$\overline{CE}$=x+8，求 x。



由圖知$\overline{AB}$=4+8=12，$\overline{AC}$=x+(x+8)=2x+8，

因為$\overline{DE}$ // $\overline{BC}$，所以由上述性質得 4：12=x：(2x+8) → 12x=4(2x+8)，

(%i1) solve([12*x=4*(2*x+8)], [x]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([12*x=4*(2*x+8)], [x]) → ctrl+enter。

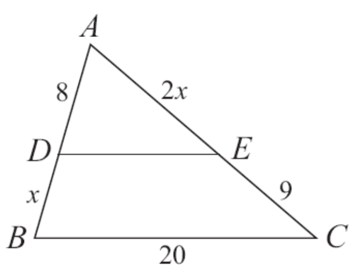
(%o1) [x=8]

P. 38 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，△ABC 中，$\overline{DE}$ // $\overline{BC}$，已知$\overline{AD}$=8，$\overline{DB}$=x，$\overline{AE}$=2x，$\overline{EC}$=9，$\overline{BC}$=20，

求$\overline{AC}$和$\overline{DE}$。



由圖知$\overline{AB}$=8+x，$\overline{AC}$=2x+9，

因為，$\overline{DE}$ // $\overline{BC}$，所以，由上述性質得 8：8+x=2x：2x+9 → 2x×(8+x)=8×(2x+9)，

(%i1) solve([(2*x)*(8+x)=8*(2*x+9)], [x]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入

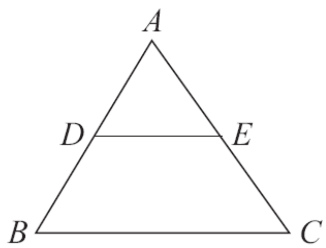
solve([(2*x)*(8+x)=8*(2*x+9)], [x])
→ ctrl+enter。

(%o1) [x=-6,x=6]
負不符所求，所以，x=6。

P. 38 例 2

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，D 為 $\overline{AB}$ 的中點，過 D 作 $\overline{BC}$ 的平行線，並交 $\overline{AC}$ 於 E，說明 E 是 $\overline{AC}$ 的中點。



因為 D 是 $\overline{AB}$ 的中點，所以 $\overline{AD}=\overline{DB}$，

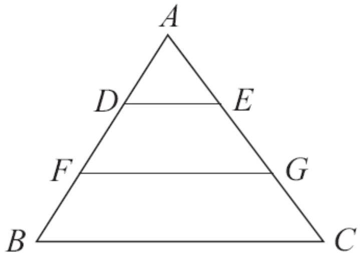
但因為 $\overline{DE}\,//\,\overline{BC}$，因此 $\overline{AE}$ ： $\overline{EC}=\overline{AD}$ ： $\overline{DB}$=1：1 (三角形平行線截比例線段)

所以 $\overline{AE}=\overline{EC}$，即 E 是 $\overline{AC}$ 的中點。

P. 39 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，△ABC 中 D、F 兩點三等分 $\overline{AB}$，過 D、F 作平行於 $\overline{BC}$ 的平行線，分別交 $\overline{AC}$ 於 E、G。說明 E、G 兩點三等分 $\overline{AC}$。



因爲 D、F 兩點三等分 $\overline{AB}$ ，所以 $\overline{AD}=\overline{DF}=\overline{FB}$ ，但因爲 $\overline{DE}\,//\,\overline{FG}\,//\,\overline{BC}$ ，

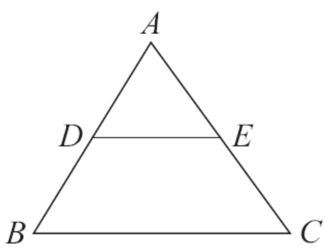
因此 $\overline{AE}$ ： $\overline{EC}$ ： $\overline{GC}=\overline{AD}$ ： $\overline{DF}$ ： $\overline{FB}$ =1：1：1 (三角形平行線截比例線段)

所以 $\overline{AE}=\overline{EC}=\overline{GC}$ ，即 E、G 兩點三等分 $\overline{AC}$ 。

P. 40 例 3

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，已知 $\overline{AD}$ ： $\overline{DB}=\overline{AE}$ ： $\overline{EC}$ ，試說明 $\overline{DE}\,//\,\overline{BC}$ 。



由前面說明知道 $\overline{AD}$ ： $\overline{DB}=\overline{AE}$ ： $\overline{EC}$ 。

在△ADE 與△ABC 中，

由於 $\overline{AD}$ ： $\overline{DB}=\overline{AE}$ ： $\overline{EC}$

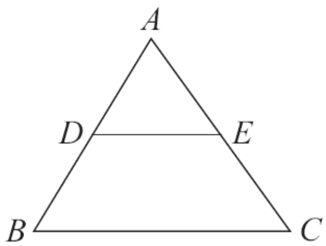
以及 ∠A=∠A (共同角)
所以 △ADE~△ABC (SAS 相似性質)
因此 ∠ADE=∠B

所以 $\overline{DE}\,//\,\overline{BC}$ (同位角相等)

P. 40 例 4

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，D、E 分別是 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 的中點，說明(1) $\overline{DE} // \overline{BC}$ ；(2) $\overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ 。



(1)由題意知 $\overline{AD}$ ： $\overline{DB}$ =1：1= $\overline{AE}$ ： $\overline{EC}$ ，由例 3 知 $\overline{DE} // \overline{BC}$ 。

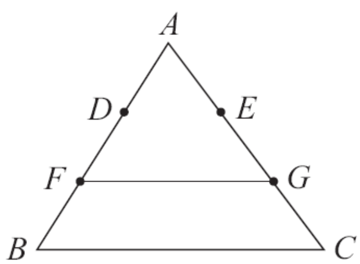
(2)由例 3 的解題說明知道△ADE~△ABC，

因此 $\overline{DE}$ ： $\overline{BC}$ = $\overline{AD}$ ： $\overline{AB}$ =1：2(對應邊成比例)，即 $\overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ 。

P. 41 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，D、F 三等分 $\overline{AB}$ ，E、G 三等分 $\overline{AC}$ 。說明



(1) $\overline{FG} // \overline{BC}$ 。

由題意知 D、F 三等分 $\overline{AB}$ ，E、G 三等分 $\overline{AC}$ ，由例 3 知 $\overline{FG} // \overline{BC}$ 。

(2) $\overline{FG} = \frac{2}{3}\overline{BC}$

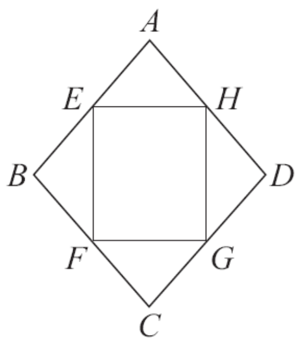
由例 3 的解題說明知道△AFG~△ABC，

因此 $\overline{FG}$ ： $\overline{BC}$ = $\overline{AF}$ ： $\overline{AB}$ =2：3(對應邊成比例)，即 $\overline{FG} = \frac{2}{3}\overline{BC}$ 。

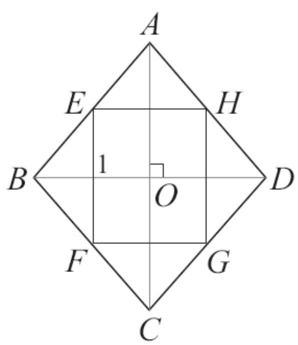
P. 41 例 5

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，四邊形 ABCD 爲一菱形，E、F、G、H 爲各邊的中點。說明四邊形 EFGH 爲一矩形。



如右圖，連接對角線 $\overline{AC}$ 和 $\overline{BD}$ 。



得 $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ (菱形對角線互相垂直平分)

由題意知 $\overline{EH} // \overline{BD}$ (三角形中連接線性質)

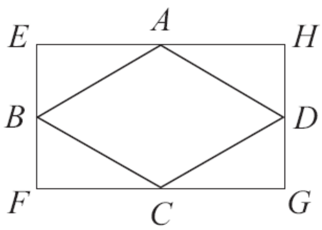
同理 $\overline{EF} // \overline{AC}$

利用兩次平行線同側內角互補的性質可以知道∠HEF=∠1=∠AOB=90°，
由於四邊形 EFGH 爲平行四邊形，因此另外三個內角均爲 90°，所以 EFGH 爲一矩形。

P. 41 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，四邊形 EFGH 為矩形，A、B、C、D 為其四邊的中點。說明四邊形 ABCD 為菱形。

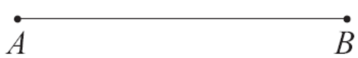


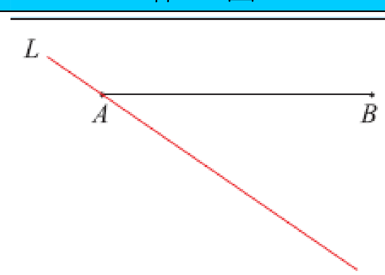
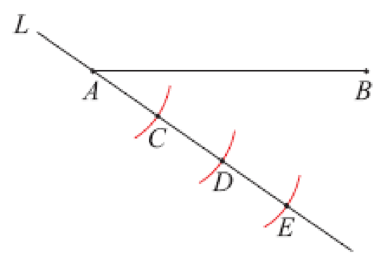
因為都是個邊的中點，所以 $\overline{AB}=\overline{AD}=\overline{CD}=\overline{BC}$，因此 ABCD 為菱形。

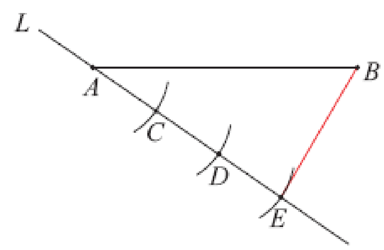
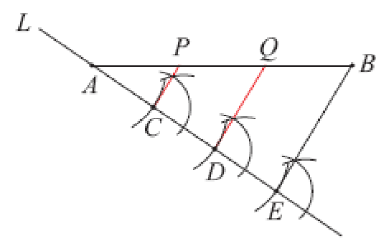
P. 42 例 6

此題無法直接使用 Maxima 軟體

利用尺規作圖，將右圖的 $\overline{AB}$ 三等分。



作　法	作　圖	說　明
(1)過 A 作直線 L。		L 和 $\overline{AB}$ 不重疊。
(2)在 L 上依序取點 C、D、E，使 $\overline{AC}=\overline{CD}=\overline{DE}$。		

(3)連接 $\overline{BE}$ 。		
(4)過點 C、D 分別作 $\overline{BE}$ 的平行線，交 $\overline{AB}$ 於 P、Q，則 P、Q 即為所求。		由平行線截比例線段性質，知 $\overline{AP}=\overline{PQ}=\overline{QB}$ 。

P. 44 例 7

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如圖 1-20，若 $\overline{BC}$=10 公尺，$\overline{CD}$=2 公尺，$\overline{ED}$=5 公尺，求 $\overline{AB}$ 。

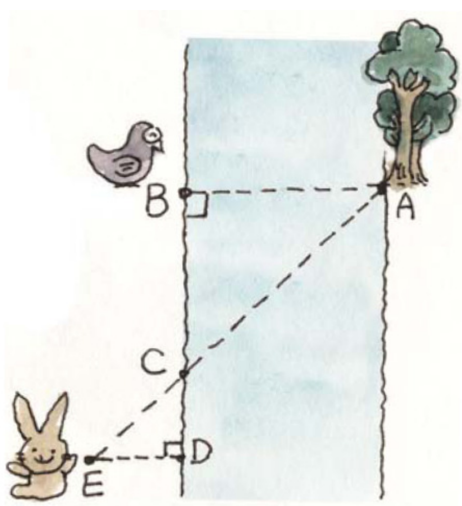


圖1-20

由圖 1-20，得△EDC~△ABC。　(AA 相似性質)

因此　$\overline{AB}$ ：$\overline{ED}=\overline{BC}$ ：$\overline{DC}$

即　$\overline{AB}$ ：5=10：2 → 10×5=2 $\overline{AB}$ ，

(%i1) solve([10*5=2*x], [x]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([10*5=2*x], [x]) → ctrl+enter。

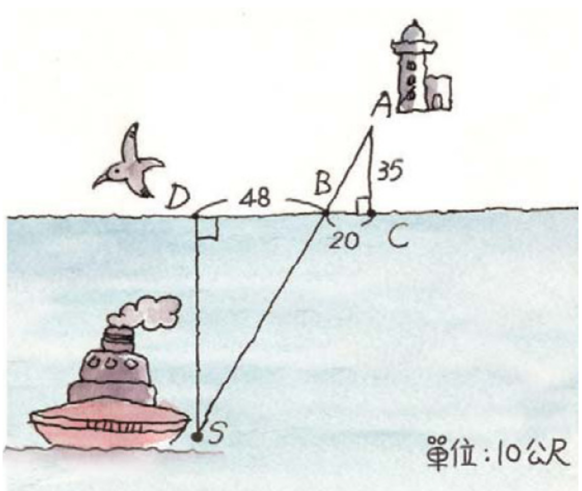
(%o1) [x=25]

得 $\overline{AB}=25$(公尺)。

P. 44 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

在一平直的海岸線旁，有一船隻停在 S 處，某觀測員將測量所得的各項數據繪製成右圖的草圖，其中 C、D 爲海岸線上的兩點，B 爲 $\overline{AS}$ 與 $\overline{CD}$ 交點，試求該船與岸邊的距離。



由圖，得△SDB~△ACB。 (AA 相似性質)

因此 $\overline{DB}:\overline{BC}=\overline{SD}:\overline{AC}$

即 $48:20=\overline{SD}:35 \rightarrow 20\overline{SD}=48\times35$，

(%i1) solve([20*x=48*35], [x]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([20*x=48*35], [x]) → ctrl+enter。

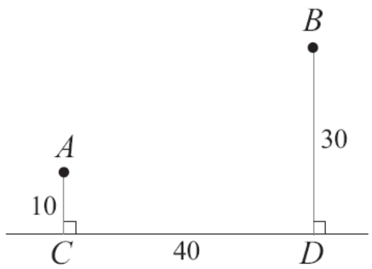
(%o1) [x=84]

因此，該船與岸邊的距離=84x10 公尺=840 公尺。

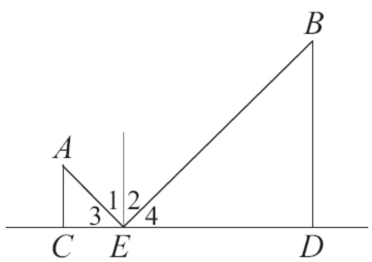
P. 45 例 8

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，A、B 兩球在距離撞球檯邊 10、30 的位置，$\overline{CD}$=40。問將 A 球瞄準撞球檯邊的哪一點，才可使 A 球反彈後擊中 B 球？



如右圖，假設從 A 球瞄準 $\overline{CD}$ 邊上的 E 點，可以使 A 球反彈後擊中 B 球，則入射角∠1=反射角∠2，



因此　∠3=∠4

又　∠C=∠D=90°

所以　△ACE~△BDE　(AA 相似性質)

因此　$\overline{CE}$ ： $\overline{DE}$ = $\overline{AC}$ ： $\overline{BD}$ =10：30=1：3　(對應邊成比例)

但因　$\overline{CD}$=40

所以　$\overline{CE}=40\times\frac{1}{1+3}=10$

(%i1) 40*(1/(1+3));　※直接輸入 40*(1/(1+3)) → ctrl+enter。

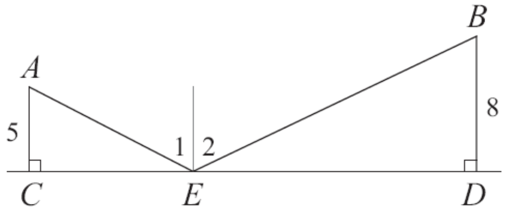
(%o1) 10

與 C 距離為 10 的 E 即為所求之點。

P. 45 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，A、B 到$\overline{CD}$的距離分別為 5、8，其中$\overline{CD}$=36。若欲在$\overline{CD}$上取一點 E，使得△ACE~△BDE，且 A 的對應點是 B，求 E 的位置。



因此　$\angle$CEA=$\angle$DEB

又　　$\angle$C=$\angle$D=90°

所以　△ACE~△BDE　　　　(AA 相似性質)

因此　$\overline{CE}:\overline{DE}=\overline{AC}:\overline{BD}=5:8$　　(對應邊成比例)

但因　$\overline{CD}=36$

所以　$\overline{CE}=36\times\frac{5}{5+8}=\frac{180}{13}$

(%i1) 36*(5/(5+8));　　※直接輸入 36*(5/(5+8)) → ctrl+enter。

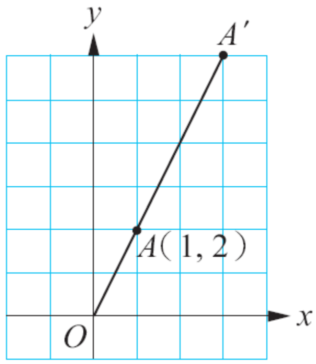
(%o1) $\frac{180}{13}$

與 C 距離為$\frac{180}{13}$的 E 即為所求之點。

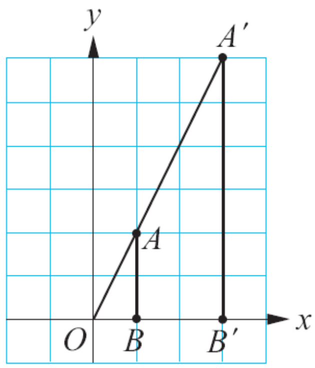
P. 46 例 9

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，在坐標平面上，以 O(0,0)為中心，將$\overline{OA}$縮放 3 倍得$\overline{OA'}$。已知 A 的坐標為(1,2)，求 A'的坐標。



作過 A、A’的鉛直線分別交 x 軸於 B、B’，如右圖。



由 AA 相似性質，知△AOB~△A’OB’。

因此 $\overline{OB'}:\overline{OB}=\overline{A'B'}:\overline{AB}=\overline{OA'}:\overline{OA}=3:1$

因爲 $\overline{OB}=1$，$\overline{AB}=2$

所以 $\overline{OB'}=\overline{OB}\times3=1\times3=3$，$\overline{A'B'}=\overline{AB}\times3=2\times3=6$

所以 A’的坐標爲(3,6)。

P. 46 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

在坐標平面上，以 O 爲中心，將 $\overline{OA}$ 縮放 5 倍得 $\overline{OA'}$。若 A 的坐標爲(1.5,2)，求 A’的坐標。

作過 A、A’的鉛直線分別交 x 軸於 B、B’，
由 AA 相似性質，知△AOB~△A’OB’。

因此 $\overline{OB'}$ ： $\overline{OB}=\overline{A'B'}$ ： $\overline{AB}=\overline{OA'}$ ： $\overline{OA}$=5：1

因為 $\overline{OB}$=1.5， $\overline{AB}$=2

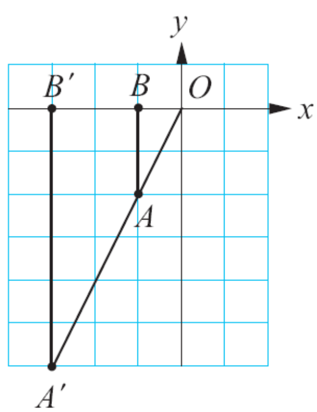
所以 $\overline{OB'}=\overline{OB}$×5=1.5×5=7.5， $\overline{A'B'}=\overline{AB}$×5=2×5=10

所以 A'的坐標為(7.5,10)。

P. 46 例 10

此題無法直接使用 Maxima 軟體

在坐標平面上，以 O 為中心，將 $\overline{OA}$ 縮放 3 倍得 $\overline{OA'}$。若 A 為(-1,-2)，求 A'的坐標。



作過 A、A'的鉛直線交 x 軸得 B 和 B'，
則△AOB~△A'OB'。 (AA 相似性質)

因此 $\overline{A'B'}$ ： $\overline{AB}=\overline{OB'}$ ： $\overline{OB}=\overline{OA'}$ ： $\overline{OA}$=3：1 (對應邊成比例)

因為 $\overline{OB}$=1， $\overline{AB}$=2

所以 $\overline{OB'}=\overline{OB}$×3=1×3=3， $\overline{A'B'}=\overline{AB}$×3=2×3=6

由於 A'在第三象限，得

A'的坐標為(- $\overline{OB'}$,- $\overline{A'B'}$)=(-3,-6)。

P. 47 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

在坐標平面上，以 O 為中心，將 $\overline{OA}$ 縮放 3 倍得 $\overline{OA'}$。若 A 的坐標為(1,-2)，求 A’的坐標。

作過 A、A’的鉛直線交 x 軸得 B 和 B’，
則△AOB~△A’OB’。 (AA 相似性質)

因此 $\overline{A'B'}:\overline{AB}=\overline{OB'}:\overline{OB}=\overline{OA'}:\overline{OA}=3:1$ (對應邊成比例)

因為 $\overline{OB}=1$，$\overline{AB}=2$

所以 $\overline{OB'}=\overline{OB}\times3=1\times3=3$，$\overline{A'B'}=\overline{AB}\times3=2\times3=6$

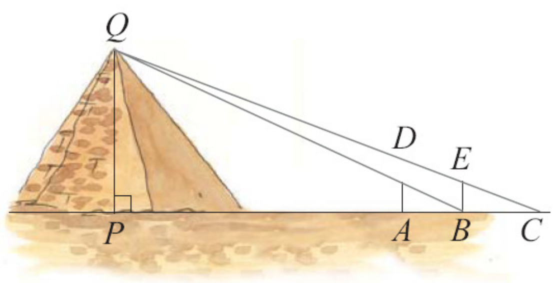
由於 A’在第四象限，得

A’的坐標為($\overline{OB'}$,-$\overline{A'B'}$)=(3,-6)。

P. 48 例 11

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，設金字塔高為 $\overline{PQ}$，我們拿一根 2 公尺的標尺，垂直豎立在 A 點上，測得 $\overline{AB}$=6 公尺，現將標尺移到 B 點，再測得 $\overline{BC}$=6.09 公尺。求金字塔高 $\overline{PQ}$。



由直角三角形的相似形原理知道

$\dfrac{\overline{AD}}{\overline{PQ}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{PB}}$ (△ADB~△PQB)

$\dfrac{\overline{BE}}{\overline{PQ}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{PC}}$ (△BEC~△PQC)

其中 $\overline{AD}=\overline{BE}$=2。現設 $\overline{PA}$=x，則由題意知

$$\frac{2}{\overline{PQ}}=\frac{6}{x+6}=\frac{6.09}{x+6+6.09}$$

由第二個等號知

$\frac{6}{x+6}=\frac{6.09}{x+6+6.09}$ → 6×(x+6+6.09)=(x+6)×6.09

(%i1) solve([6*(x+6+6.09)=(x+6)*6.09], [x]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([6*(x+6+6.09)=(x+6)*6.09], [x]) → ctrl+enter。

rat: replaced -6.09 by -609/100 = -6.09

※(註)rat：指令表示將小數化成分數。

rat: replaced 12.09 by 1209/100 = 12.09

※(註)rat：指令表示將小數化成分數。

(%o1) [x=400]

$\frac{2}{\overline{PQ}}=\frac{6}{400+6}$ → 6 $\overline{PQ}$=2×(400+6)

(%i2) solve([6*x=2*(400+6)], [x]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([6*x=2*(400+6)], [x]) → ctrl+enter。

(%o2) [x=$\frac{406}{3}$]

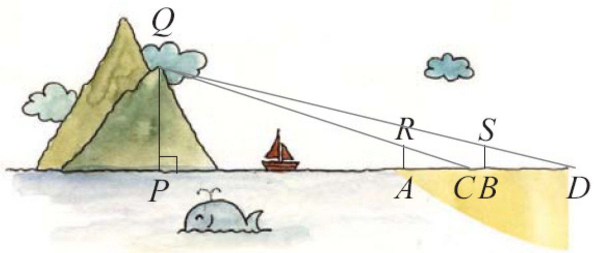
所以，$\overline{PQ}=\frac{406}{3}\fallingdotseq 135$，

因此，金字塔高約為 135 公尺。

P. 49 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

仿照例 11，從海岸上使用 2 公尺的標尺測量某海島山峰之海拔高度。若已知 $\overline{AC}$ 為 3 公尺，$\overline{BD}$ 為 3.5 公尺，且 $\overline{AB}$ 為 200 公尺，求 $\overline{PQ}$ 和 $\overline{AP}$。



由直角三角形的相似形原理知道

$\frac{\overline{AR}}{\overline{PQ}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{PC}}$　(△ARC~△PQC)

$\frac{\overline{BS}}{\overline{PQ}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{PD}}$　(△BSD~△PQD)

其中 $\overline{AR}=\overline{BS}$ =2。現設 $\overline{PA}$ =x，則由題意知

$\frac{\overline{AR}}{\overline{PQ}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{PC}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{PD}} \to \frac{2}{\overline{PQ}}=\frac{3}{3+x}=\frac{3.5}{x+3+(200-3)+3.5}$

由第二個等號知

$\frac{3}{3+x}=\frac{3.5}{x+3+(200-3)+3.5} \to$ 3×(x+3+(200-3)+3.5)=(3+x)×3.5

(%i1) solve([3*(x+3+(200-3)+3.5)=(3+x)*3.5], [x]);

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([3*(x+3+(200-3)+3.5)=(3+x)*3.5], [x]) → ctrl+enter。

rat: replaced -3.5 by -7/2 = -3.5

※(註)rat：指令表示將小數化成分數。

rat: replaced 203.5 by 407/2 = 203.5

※(註)rat：指令表示將小數化成分數。

(%o1) [x=1200]

所以，$\overline{PA}$ =1200 公尺，

$\frac{2}{\overline{PQ}}=\frac{3}{3+x} \to$ 3 $\overline{PQ}$ =2×(3+x)

(%i2) solve([3*x=2*(3+x)], [x]);

(%o2) [x=6]

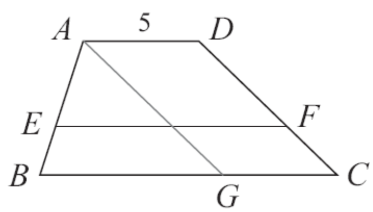
所以，$\overline{PQ}$ =6，

因此，金字塔高約為 6 公尺。

P. 50 1-3 自我評量

此題無法直接使用 Maxima 軟體

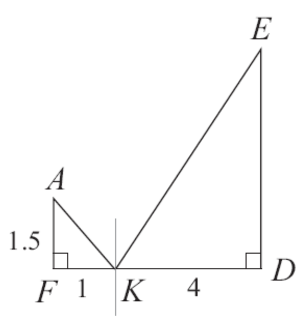
1.如右圖，梯形 ABCD 中 $\overline{AD}//\overline{BC}$，E、F 分別在 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 上，且 $\overline{EF}//\overline{AD}$，若 $\overline{AD}=5$，$\overline{EF}=11$，$\overline{BC}=14$，求 $\overline{AE}$ ： $\overline{EB}$ 的比值。（提示：過 A 作 $\overline{AG}//\overline{CD}$）



$\overline{AE}$ ： $\overline{EB}$ ＝2：1。

此題無法直接使用 Maxima 軟體

2.東佑想知道升旗臺上旗桿 $\overline{DE}$ 的高度，東佑站在 F 處，與旗桿底 D 點的距離為 5 公尺（如右圖所示）。東佑在 $\overline{FD}$ 上位於自己前方 1 公尺的 K 處平放一面鏡子，透過光的反射正好看到了旗桿頂。若東佑眼睛到腳的高度為 1.5 公尺（即 $\overline{AF}$），試求旗桿桿頂的高度。（提示：人射角=反射角）



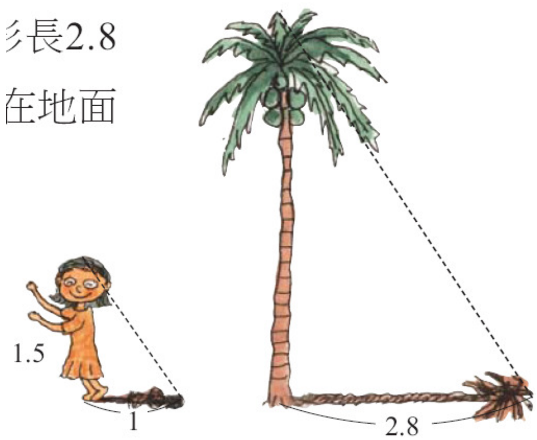
因此　$\angle FKA=\angle DKE$
又　$\angle F=\angle D=90^\circ$
所以　$\triangle AFK\sim\triangle EDK$　(AA 相似性質)

因此 $\overline{FK}：\overline{KD}=1：4$ (對應邊成比例)

所以 $1：4=\overline{AF}：\overline{ED} \rightarrow 1：4=1.5：\overline{ED} \rightarrow \overline{ED}=4\times1.5=6$。

此題無法直接使用 Maxima 軟體

3.如右圖，一樹木經陽光照射在地上的影長 2.8 公尺，同一時刻，身長 1.5 公尺的知儀在地面上的影長爲 1 公尺，求此樹的高度。



令樹的高度=x，

$x：2.8=1.5：1 \rightarrow x=2.8\times1.5=4.2$ 公尺。

第 2 章 圓 2-1 圓

P. 53 例 1

坐標平面上有一以 O(0,0)爲圓心，半徑爲 10 的圓，下列哪些點在圓內？哪些點在圓上？哪些在圓外？

★圓內的點和圓心的距離小於半徑。

★圓外的點和圓心的距離大於半徑。

★圓上的點和圓心的距離等於半徑。

(1)A(-6,8)

$\overline{OA}=\sqrt{6^2+8^2}=10$

(%i1) sqrt(6^2+8^2); ※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 sqrt(6^2+8^2) → ctrl+enter。

(%o1) 10

因爲 10 等於半徑 10，所以，A 在圓上。

(2)B(0,-20)

$\overline{OB}=\sqrt{0^2+(-20)^2}$ =20

(%i2) sqrt(0^2+(-20)^2); ※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 sqrt(0^2+(-20)^2) → ctrl+enter。

(%o2) 20

因爲 20 大於半徑 10，所以，B 在圓外。

(3)C(4,5)

$\overline{OC}=\sqrt{4^2+5^2}$ =6.403124237432849

(%i3) float(sqrt(4^2+5^2)); ※「float(算式)」指令表示將結果轉換爲小數；「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 float(sqrt(4^2+5^2)) → ctrl+enter。

(%o3) 6.403124237432849

因爲 6.403124237432849 小於半徑 10，所以，C 在圓內。

P. 53 隨堂練習

坐標平面上有一以 O(0,0)爲圓心，半徑爲 5。下列哪些點在圓內？哪些點在圓上？哪些在圓外？

★圓內的點和圓心的距離小於半徑。

★圓外的點和圓心的距離大於半徑。

★圓上的點和圓心的距離等於半徑。

A(1,2)

$\overline{OA}=\sqrt{1^2+2^2}$ =2.23606797749979

(%i1) float(sqrt(1^2+2^2)); ※「float(算式)」指令表示將結果轉換爲小數；「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 float(sqrt(1^2+2^2)) → ctrl+enter。

(%o1) 2.23606797749979

因爲 2.23606797749979 小於半徑 5，所以，A 在圓內。

B(-2,-3)

$\overline{OB}=\sqrt{(-2)^2+(-3)^2}$ =3.60555127546398

(%i2) float(sqrt((-2)^2+(-3)^2)); ※「float(算式)」指令表示將結果轉換爲小數；「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 float(sqrt((-2)^2+(-3)^2)) → ctrl+enter。

(%o2) 3.605551275463989

因爲 3.60555127546398 小於半徑 5，所以，B 在圓內。

C(0,5)

$\overline{OC} = \sqrt{0^2 + 5^2} = 5$

(%i3) sqrt(0^2+5^2); ※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 sqrt(0^2+5^2) → ctrl+enter。

(%o3) 5

因爲 5 等於半徑 5，所以，C 在圓上。

D(5,5)

$\overline{OD} = \sqrt{5^2 + 5^2} = 7.071067811865476$

(%i4) float(sqrt(5^2+5^2)); ※「float(算式)」指令表示將結果轉換爲小數；「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 float(sqrt(5^2+5^2)) → ctrl+enter。

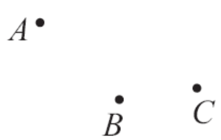
(%o4) 7.071067811865476

因爲 7.071067811865476 大於半徑 5，所以，D 在圓外。

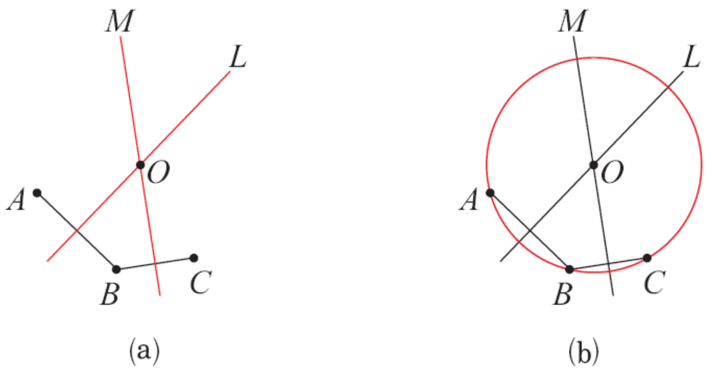
P. 54 例 2

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，不在同一直線上的三點 A、B、C，求過此三點的圓。



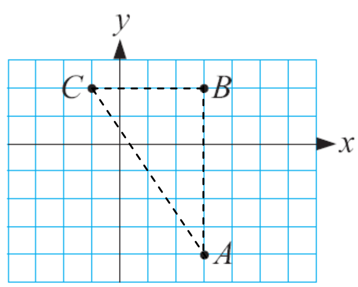
基本想法是，如果 A、B、C 在一圓上，則 $\overline{AB}$ 與 $\overline{BC}$ 是該圓的弦，但因爲圓上一弦的中垂線必會通過圓心，所以 $\overline{AB}$ 與 $\overline{BC}$ 的中垂線應該交於此圓的圓心。利用上面的想法，作 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 的中垂線 L、M，並且交於 O 點，如下圖(a)。由於 L 和 M 爲中垂線，所以 $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$ ，因此以 O 爲中心，半徑爲 $\overline{OA}$ 作圓即爲所求，如下圖(b)。



P. 55 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，坐標平面上有三點 A(3,-4)、B(3,2)、C(-1,2)，求過此三點的圓的圓心坐標，並繪出此圓。



圓心的坐標即爲 $\overline{AC}$ 中點=($\dfrac{3+(-1)}{2}$, $\dfrac{-4+2}{2}$)=(1,-1)。

(%i1) (3+(-1))/2; ※直接輸入(3+(-1))/2 → ctrl+enter。

(%o1) 1

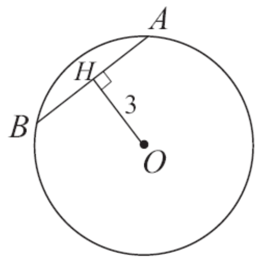
(%i2) (-4+2)/2; ※直接輸入(-4+2)/2 → ctrl+enter。

(%o2) -1

P. 56 例 3

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，有一半徑爲 5 的圓 O，$\overline{AB}$ 爲一弦，若 $\overline{OH} \perp \overline{AB}$，且 $\overline{OH}$ =3，求 $\overline{AB}$。



連接半徑$\overline{OA}$，$\overline{OA}$=5。

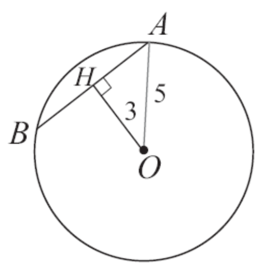
由於△OHA 爲直角三角形，

因此 $\overline{AH}=\sqrt{5^2-3^2}$ =4 (畢氏定理)

(%i1) sqrt(5^2-3^2); ※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 sqrt(5^2-3^2) → ctrl+enter。

(%o1) 4

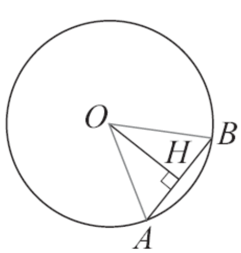
所以 $\overline{AB}$ =4×2=8 (H 爲$\overline{AB}$中點)



P. 56 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，有一半徑爲 5 的圓，$\overline{AB}$爲一弦，若$\overline{OH}\perp\overline{AB}$，且$\overline{AB}$=5，求$\overline{OH}$、∠AOB、∠AOH。



$\overline{OH}=\sqrt{5^2-2.5^2}$ =4.330127018922194

(%i1) sqrt(5^2-2.5^2); ※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 sqrt(5^2-2.5^2) → ctrl+enter。

(%o1) 4.330127018922194

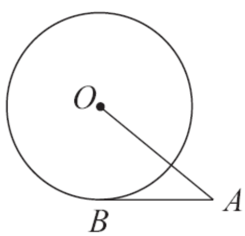
根據三角形三邊等長，因此，∠AOB=∠A=∠B=60°，

∠AOH=180°-∠A-∠OHA=180°-60°-90°=30°。

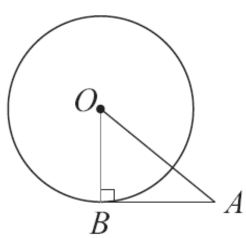
P. 58 例 4

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，有一半徑為 16 的圓 O，A 為圓外一點，$\overline{OA}=20$，若 $\overline{AB}$ 和圓相切於 B 點，求 $\overline{AB}$ 。



連接 $\overline{OB}$ ，由於 $\overline{AB}$ 和圓 O 相切於 B 點，所以 $\overline{OB}\perp\overline{AB}$ 。



由畢氏定理得 $\overline{AB}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OB}^2}=\sqrt{20^2-16^2}=12$，

(%i1) sqrt(20^2-16^2); ※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 sqrt(20^2-16^2) → ctrl+enter。

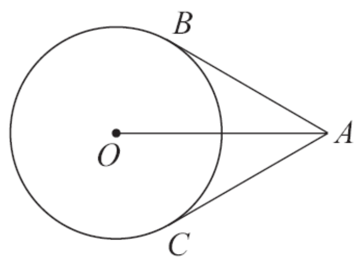
(%o1) 12

因此，$\overline{AB}=12$。

P. 58 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，有一半徑為 1 的圓，$\overline{AB}$ 、$\overline{AC}$ 分別切圓 O 於 B、C，若 $\overline{OA}$=2，求 $\overline{AC}$ 、$\overline{AB}$ 。



由於 $\overline{OA}$ 為共邊，$\overline{OB}=\overline{OC}$ =半徑，∠B 和∠C 分別切於圓外，∠OBA=∠OCA=90°，

因此，$\overline{AC}=\overline{AB}$ ，

根據畢氏定理得 $\overline{AC}=\sqrt{2^2-1^1}=\sqrt{3}$ ，

(%i1) sqrt(2^2-1^2); ※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 sqrt(2^2-1^2) → ctrl+enter。

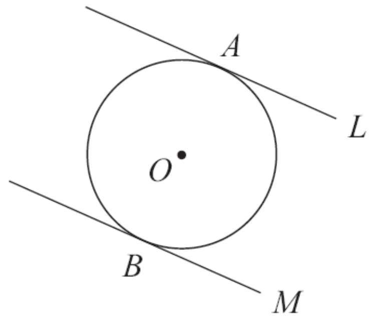
(%o1) $\sqrt{3}$

因此，$\overline{AC}=\overline{AB}=\sqrt{3}$ 。

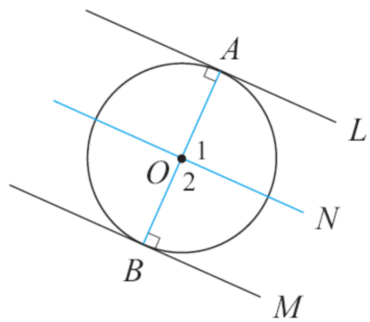
P. 59 例 5

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，L、M 為圓 O 的切線，其切點分別為 A、B，若 L//M，說明 $\overline{AB}$ 為圓 O 的直徑。



如右圖，連接$\overline{OA}$和$\overline{OB}$，



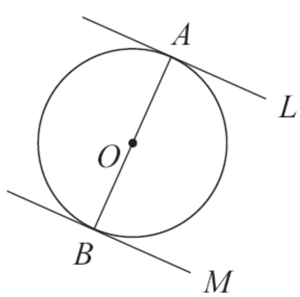
由於 L 切圓 O 於 A 點，M 切圓 O 於 B 點，
所以$\angle$A=90°，$\angle$B=90°。
過 O 作 L 的平行線 N，當然 N 也平行 M，因此$\angle$1=$\angle$2=90°，

由於$\angle$1+$\angle$2=180°，所以 O、A、B 三點共線，即$\overline{AB}$通過圓心，因此$\overline{AB}$爲直徑。

P. 59 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，過直徑$\overline{AB}$的端點，作兩切線 L 和 M，說明 L//M。

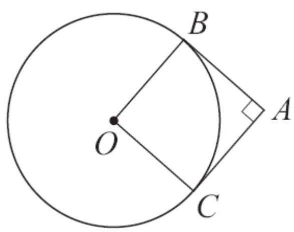


切線與圓心的連線是垂直的 90 度，所以∠OBM=∠OAL，因此，L//M。

P. 60 例 6

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，$\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 切圓 O 於 B、C 兩點。若∠A=90°，說明 ABOC 為正方形。



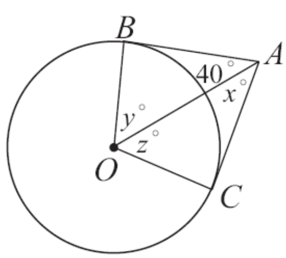
由於∠A=90°，所以∠O=90°，　(∠A+∠O=180°)
因此，ABOC 為矩形。

但鄰邊 $\overline{OB}=\overline{OC}$ ，因此，ABOC 為正方形。

P. 60 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，$\overline{AB}$ 和 $\overline{AC}$ 切圓 O 於 B、C 兩點。∠OAB=40°。求圖中的 x、y、z。



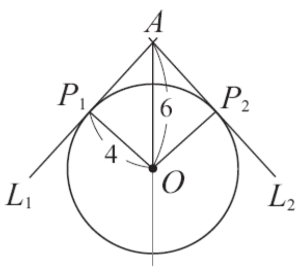
∠OAB=x=40°，
y=z=180°-90°-40°=50°。

P. 60 例 7

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，有一半徑為 4 的圓 O，過圓 O 外一點 A，有兩條切線 L_1 和 L_2，各切圓 O

於 P_1 和 P_2，若已知 $\overline{OA}$=6，求 $\overline{AP_1}$ 、 $\overline{P_1P_2}$ 。



由於 P_1 為切點，所以 $\angle OP_1A=90^\circ$，

因此 $\overline{AP_1}^2+4^2=6^2$ (畢氏定理)

所以，$\overline{AP_1}=\sqrt{6^2-4^2}=2\sqrt{5}$ ，

(%i1) sqrt(6^2-4^2); ※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 sqrt(6^2-4^2) → ctrl+enter。

(%o1) $2\sqrt{5}$

因此 箏形 AP_1OP_2 面積=△AP_1O 面積×2=$\frac{2\sqrt{5}\times 4}{2}$×2=8$\sqrt{5}$ ，

(%i2) (((2*sqrt(5))*4)/2)*2; ※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 (((2*sqrt(5))*4)/2)*2 → ctrl+enter。

(%o2) $8\sqrt{5}$

所以 $\overline{P_1P_2}=\frac{AP_1OP_2\text{面積}}{\overline{OA}}\times 2$ (箏形面積=$\frac{1}{2}$×兩對角線相乘)

因此，$\overline{P_1P_2}=\frac{8\sqrt{5}}{6}\times 2=\frac{8\sqrt{5}}{3}$ 。

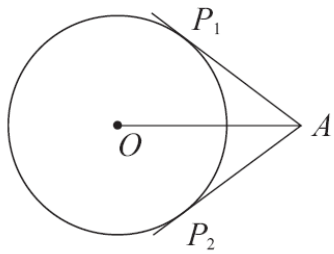
(%i3) ((8*sqrt(5))/6)*2; ※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 ((8*sqrt(5))/6)*2 → ctrl+enter。

(%o3) $\frac{8\sqrt{5}}{3}$

P. 61 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，$\overline{AP_1}$ 、$\overline{AP_2}$ 為 A 到圓 O 的兩切線段。已知圓的半徑為 6，$\overline{OA}$=10，求 $\overline{P_1P_2}$ 。



由於 P_1 爲切點，所以∠O P_1 A=90°，

因此 $\overline{AP_1}^2+6^2=10^2$ (畢氏定理)

所以，$\overline{AP_1}=\sqrt{10^2-6^2}=8$，

(%i1) sqrt(10^2-6^2); ※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 sqrt(10^2-6^2) → ctrl+enter。

(%o1) 8

因此 箏形 A P_1 O P_2 面積=△A P_1 O 面積×2=8×6×$\frac{1}{2}$×2=48，

(%i2) 8*6*(1/2)*2; ※直接輸入 8*6*(1/2)*2 → ctrl+enter。

(%o2) 48

所以 $\overline{P_1P_2}=\dfrac{AP_1OP_2\text{面積}}{\overline{\text{OA}}}\times 2$ (箏形面積=$\frac{1}{2}$×兩對角線相乘)

因此，$\overline{P_1P_2}=\dfrac{48}{10}\times 2=\dfrac{48}{5}$ 。

(%i3) (48/10)*2; ※直接輸入(48/10)*2 → ctrl+enter。

(%o3) $\dfrac{48}{5}$

P. 62 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

1.圓 O 是以 O(0,0)爲圓心，半徑爲 6 的圓，圓 O'(3,4)爲圓心，半徑爲 1 的圓，問此兩圓是否相切？若相切，是內切還是外切？

★外切：l 連心距 $\overline{OO'}=r_1+r_2$ ；內切：l 連心距 $\overline{OO'}=r_2-r_1$ 。

$\overline{OO'}=\sqrt{(0-3)^2+(0-4)^2}=5$，

(%i1) sqrt((0-3)^2+(0-4)^2); ※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入

sqrt((0-3)^2+(0-4)^2) → ctrl+enter。

(%o1) 5

$\overline{OO'}=r_2-r_1$ → 5=6-1，因此，兩圓屬於內切。

2.圓 O 是以 O(0,0)爲圓心，半徑爲 16 的圓，圓 O'是以 O'(7,24)爲圓心，半徑爲 9 的圓，問此兩圓是否相切？若相切，是內切或外切？

★外切：l 連心距 $\overline{OO'}=r_1+r_2$ ；內切：l 連心距 $\overline{OO'}=r_2-r_1$ 。

$\overline{OO'}=\sqrt{(0-7)^2+(0-24)^2}=25$

(%i2) sqrt((0-7)^2+(0-24)^2);　※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 sqrt((0-7)^2+(0-24)^2) → ctrl+enter。

(%o2) 25

$\overline{OO'}=r_1+r_2$ → 25=16+9，因此，兩圓屬於外切。

P. 63 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

圓 O 是以 O(0,0)爲圓心，半徑爲 5 的圓，圓 O'是以 O'是以 O'(1,1)爲圓心，半徑爲 1 的圓，問此兩圓的關係爲何？

★外離：l 連心距 $\overline{OO'}>r_1+r_2$ 。

★交於兩點：$r_2+r_1>$ l 連心距 $\overline{OO'}>r_2-r_1$ 。

★內離：$r_2-r_1>$l 連心距 $\overline{OO'}$ 。

$\overline{OO'}=\sqrt{(0-1)^2+(0-1)^2}=1.414213562373095$

(%i1) float(sqrt((0-1)^2+(0-1)^2));　※「float(算式)」指令表示將結果轉換爲小數；「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 float(sqrt((0-1)^2+(0-1)^2)) → ctrl+enter。

(%o1) 1.414213562373095

$r_2-r_1=1-5=-4$，$r_2+r_1=1+5=6$，

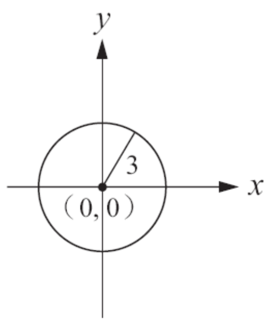
所以，$r_2+r_1>$ l 連心距 $\overline{OO'}>r_2-r_1$ → $r_2+r_1>1.414213562373095>r_2-r_1$，

因此，此兩圓的關係交於兩點。

P. 64 例 8

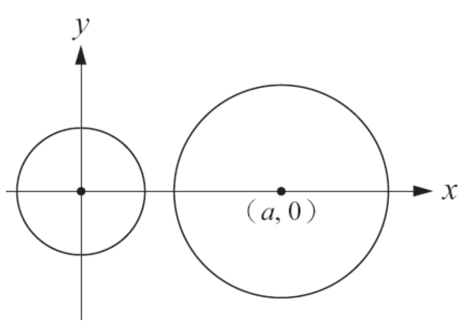
此題無法直接使用 Maxima 軟體

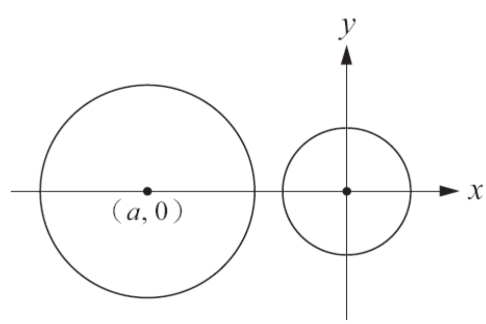
如右圖，坐標平面上有一以(0,0)爲圓心，半徑爲 3 的圓。另有一圓，其半徑爲 5，圓心爲(a,0)。若已知此兩圓外離，求 a 的範圍。



★外離：l 連心距 $\overline{OO'}>r_1+r_2$ 。

外離時，連心距 l>8，
當(a,0)在 y 軸的右側時(左下圖)，連心距 8=a-0=a，因此，a>8，
當(a,0)在 y 軸的左側時(右下圖)，連心距 8=0-a=-a，由 l>8，得-a>8，因此 a<-8，



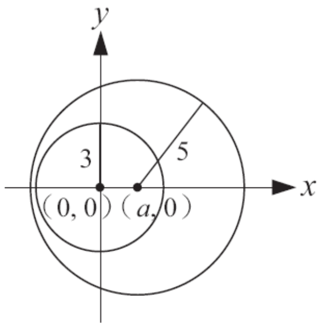


因此，a 的範圍是 a>8 或 a<-8。

P. 64 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

有一以 O(0,0)爲圓心，半徑爲 3 的圓，另有一圓其半徑爲 5，圓心爲(a,0)。若已知此兩圓內離，求 a 的範圍（右圖爲參考圖）。



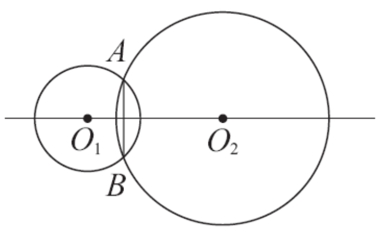
★內離：$r_2 - r_1 >$l 連心距$\overline{OO'}$ 。

內離時，2>l 連心距，
當(a,0)在 y 軸的右側時，連心距 2=a-0=a，因此，a<2，
當(a,0)在 y 軸的左側時，連心距 2=0-a=-a，由 2>l，得 2>-a，因此 a<-2，
因此，a 的範圍是 a<2 或 a<-2。

P. 65 例 9

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，兩圓交於 A、B 兩點，說明$\overleftrightarrow{O_1O_2}$是$\overline{AB}$的中垂線。

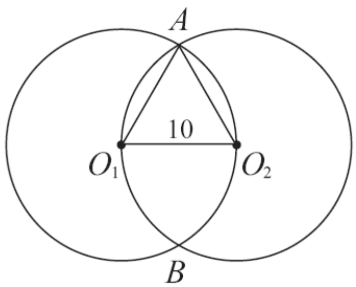


由於$\overleftrightarrow{O_1O_2}$是兩圓共同的對稱軸，因此若 A 為兩圓交點，則 A 對$\overleftrightarrow{O_1O_2}$的對稱點 B 也是兩圓交點，也就是說兩圓交點 A、B 互為對稱點，所以$\overleftrightarrow{O_1O_2}$是$\overline{AB}$的中垂線。

P. 65 例 10

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，兩圓 O_1和 O_2交於 A、B 兩點，而且 O_1在圓 O_2上，O_2在圓 O_1上，若$\overline{O_1O_2}$=10，求此兩圓的半徑，並說明△A O_1O_2為正三角形。



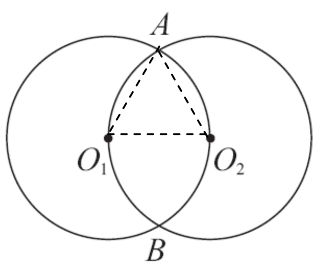
因為 O_2 在圓 O_1 上，所以 $\overline{O_1O_2}$ 為圓 O_1 的半徑，因此圓 O_1 的半徑為 10。同理，圓 O_2 的半徑為 10。

又因為 $\overline{O_1A}=10$，$\overline{O_2A}=10$，$\overline{O_1O_2}=10$，所以△A O_1O_2 為正三角形。

P. 66 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，兩圓 O_1 和 O_2 交於 A、B 兩點，且 O_1 在圓 O_2 上，O_2 在圓 O_1 上。若已知圓 O_1 的半徑為 10，求 $\overset{\frown}{AO_1B}$ 的弧長。



★弧長=圓周長×$\dfrac{\text{弧所對圓心角度數}}{360}$。

由例 10 知道∠A O_1O_2 =∠A O_2O_1=60°，表示 $\overset{\frown}{O_1A}$ 和 $\overset{\frown}{O_2A}$ 的弧度都是 60°。

$\overset{\frown}{O_1A}=\overset{\frown}{O_1B}$，

$\overset{\frown}{AO_1B}$ 的弧長$=\overset{\frown}{O_1A}+\overset{\frown}{O_1B}=10\times2\times\pi\times\dfrac{60}{360}+10\times2\times\pi\times\dfrac{60}{360}=\dfrac{20\pi}{3}$

(%i1) 10*2*%pi*(60/360)+10*2*%pi*(60/360);

※直接輸入 10*2*%pi*(60/360)+10*2*%pi*(60/360) → ctrl+enter。(%pi=

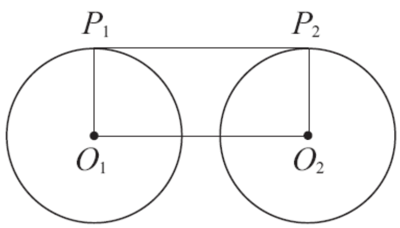
π)

(%o1) $\frac{20\pi}{3}$

P. 67 例 11

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，圓 O_1 與圓 O_2 的半徑為 5，$\overline{O_1O_2}$ =12，且 $\overline{P_1P_2}$ 是圓 O_1 和圓 O_2 的外公切線段，試說明四邊形 $P_1O_1O_2P_2$ 為一矩形，並求 $\overline{P_1P_2}$ 。



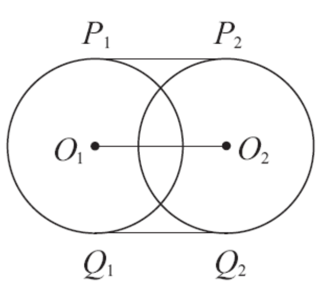
因為 $\angle O_1P_1P_2 = 90^\circ$，$\angle O_2P_2P_1 = 90^\circ$，所以 $\overline{O_1P_1} // \overline{O_2P_2}$ 。

又因為 $\overline{O_1P_1} = \overline{O_2P_2}$ =5，所以四邊形 $P_1O_1O_2P_2$ 是一矩形，因此 $\overline{P_1P_2} = \overline{O_1O_2}$ =12。

P. 68 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，圓 O_1 與圓 O_2 的半徑相等，其兩外公切線段為 $\overline{P_1P_2}$ 、$\overline{Q_1Q_2}$ ，說明 $\overline{P_1P_2} // \overline{Q_1Q_2}$ ，且 $\overline{P_1Q_1}$ 為直徑。



由例 11 知道，等半徑兩圓的外公切線 $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ 平行於連心線 $\overleftrightarrow{O_1O_2}$ ，

而等半徑兩圓的外公切線 $\overline{Q_1Q_2}$ 平行於連心線 $\overleftrightarrow{O_1O_2}$ ，因此 $\overline{P_1P_2}\,//\,\overline{Q_1Q_2}$ ；

由於 $\overline{P_1P_2}$ 相切於圓，因此， $\overline{O_1P_1}$ 為此圓半徑，

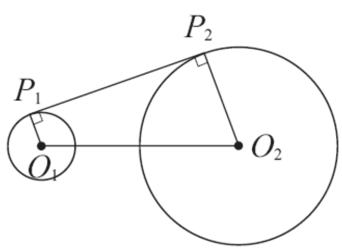
而 $\overline{Q_1Q_2}$ 也相切於圓，因此， $\overline{Q_1Q_2}$ 也為此圓半徑，因此， $\overline{P_1Q_1}$ 為直徑。

P. 68 例 12

此題無法直接使用 Maxima 軟體

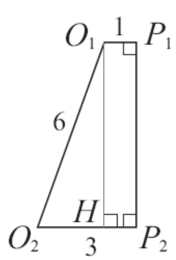
如右圖，圓 O_1 半徑為 1，圓 O_2 半徑為 3，連心距 $\overline{O_1O_2}$ =6。若 $\overline{P_1P_2}$ 為外公切線段，

求 $\overline{P_1P_2}$ 。



因為 $\overline{O_1P_1}\perp\overline{P_1P_2}$ ， $\overline{O_2P_2}\perp\overline{P_1P_2}$ ，

所以可將上圖的 $P_1O_1O_2P_2$ 重新畫成如右圖的梯形。



作高 $\overline{O_1H}$ ，得 $\overline{O_2H}$ =3-1=2，

因此， $\overline{P_1P_2}=\overline{O_1H}=\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}$ 。

(%i1) sqrt(6^2-2^2); ※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 sqrt(6^2-2^2) →

ctrl+enter。

(%o1) $4\sqrt{2}$

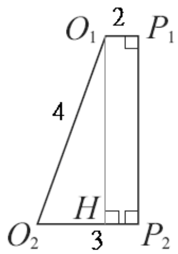
P. 69 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，圓 O_1 半徑為 2，圓 O_2 半徑為 3，連心距 $\overline{O_1O_2}=4$，$\overline{P_1P_2}$ 為外公切線段。試仿例 12 的說明畫出對應的梯形，並求 $\overline{P_1P_2}$ 。

因為 $\overline{O_1P_1}\perp\overline{P_1P_2}$ ，$\overline{O_2P_2}\perp\overline{P_1P_2}$ ，

所以可將上圖的 $P_1O_1O_2P_2$ 重新畫成如右圖的梯形。



作高 $\overline{O_1H}$ ，得 $\overline{O_2H}=3-2=1$，

因此，$\overline{P_1P_2}=\overline{O_1H}=\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$ 。

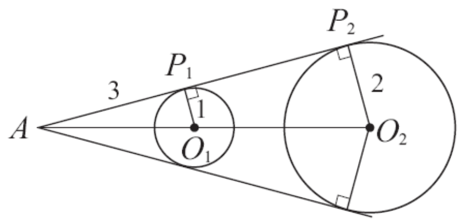
(%i1) sqrt(4^2-1^2); ※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 sqrt(4^2-1^2) → ctrl+enter。

(%o1) $\sqrt{15}$

P. 69 例 13

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，A 點是圓 O_1、圓 O_2 兩條外公切線的交點。已知 $\overline{AP_1}=3$，圓 O_1 半徑為 1，圓 O_2 半徑為 2，求 $\overline{P_1P_2}$ 。



由前面說明，A、O_1、O_2 三點共線。由於 $\overline{O_1P_1} // \overline{O_2P_2}$，

因此 $\triangle AO_1P \sim \triangle AO_2P_2$ (AA 相似性質)

所以 $\overline{AP_1}$ ： $\overline{AP_2} = \overline{O_1P_1}$ ： $\overline{O_2P_2}$ =1：2 (對應邊成比例)

因此 $\overline{AP_2} = 2\overline{AP_1} = 2\times 3 = 6$

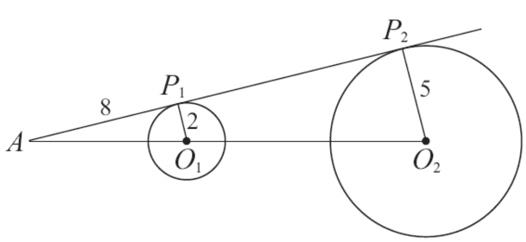
得 $\overline{P_1P_2} = \overline{AP_2} - \overline{AP_1} = 6-3=3$。

P. 70 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，圓 O_1 和圓 O_2 的半徑分別爲 2 和 5，且外公切線 $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ 和 $\overleftrightarrow{O_1O_2}$ 交於 A 點。

已知 $\overline{AP_1}=8$，求 $\overline{P_1P_2}$ 和 $\overline{O_1O_2}$ 。



$\overline{AP_1}$ ： $\overline{AP_2}$ =2：5 → 8： $\overline{AP_2}$ =2：5 → $2\overline{AP_2} = 8\times 5$，

(%i1) solve([2*x=8*5], [x]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([2*x=8*5], [x]) → ctrl+enter。

(%o1) [x=20]

所以，$\overline{AP_2}=20$，因此，$\overline{P_1P_2}=20-8=12$。

$\overline{AO_1} = \sqrt{8^2+2^2} = 2\sqrt{17}$ ，

(%i2) sqrt(8^2+2^2); ※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 sqrt(8^2+2^2) → ctrl+enter。

(%o2) $2\sqrt{17}$

$\overline{AO_2}=2\sqrt{17}\times\frac{5}{2}=5\sqrt{17}$ ，

(%i3) (2*sqrt(17))*(5/2); ※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 (2*sqrt(17))*(5/2) → ctrl+enter。

(%o3) $5\sqrt{17}$

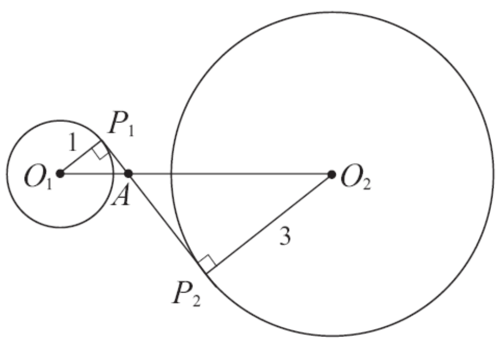
因此，$\overline{Q_1Q_2}=5\sqrt{17}-2\sqrt{17}$ 。

P. 70 例 14

此題無法直接使用 Maxima 軟體

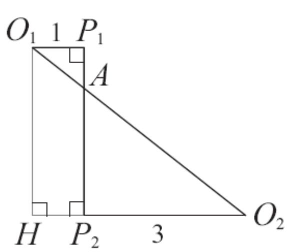
如右圖，A 為內公切線 $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ 與 $\overleftrightarrow{O_1O_2}$ 的交點。已知圓 O_1 半徑為 1，圓 O_2 半徑為 3，

連心距 $\overline{O_1O_2}=5$，求 $\overline{P_1P_2}$ 和 $\overline{P_1A}$ 。



因為 $\overline{O_1P_1}\perp\overline{P_1P_2}$ ，$\overline{O_2P_2}\perp\overline{P_1P_2}$ ，

可以將上面的 O_1、P_1、P_2、O_2 畫成右邊的圖形。



如圖作 $\overline{O_1H}\,//\,\overline{P_1P_2}$ ，交 $\overleftrightarrow{O_2P_2}$ 於 H，

因此 $O_1HP_2P_1$ 為矩形。

可得 $\overline{O_2H}=\overline{P_2H}+\overline{O_2P_2}=1+3=4$，

因此 $\overline{P_1P_2}=\overline{O_1H}=\sqrt{\overline{O_1O_2}^2-\overline{O_2H}^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$，

(%i1) sqrt(5^2-4^2); ※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 sqrt(5^2-4^2) → ctrl+enter。

(%o1) 3

由右圖知 $\triangle O_1P_1A \sim \triangle O_2P_2A$ (AA 相似性質)

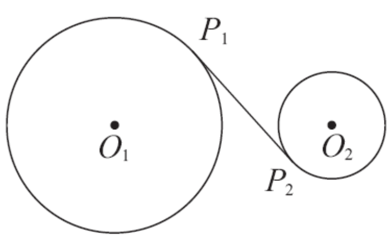
因此 $\overline{P_2A}:\overline{P_1A}=\overline{O_2P_2}:\overline{O_1P_1}=3:1$ (對應邊成比例)

所以 $\overline{P_1A}=\dfrac{1}{1+3}\times\overline{P_1P_2}=\dfrac{1}{4}\times 3=\dfrac{3}{4}$。

P. 71 隨堂練習

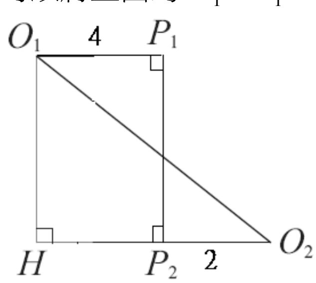
此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，圓 O_1 半徑為 4，圓 O_2 半徑為 2，連心距 $\overline{O_1O_2}=8$，$\overline{P_1P_2}$ 為兩圓的內公切線段，其中 P_1、P_2 為切點，求 $\overline{P_1P_2}$。



因為 $\overline{O_1P_1}\perp\overline{P_1P_2}$，$\overline{O_2P_2}\perp\overline{P_1P_2}$，

可以將上面的 O_1、P_1、P_2、O_2 畫成右邊的圖形。



如圖作$\overline{O_1H} // \overline{P_1P_2}$，交$\overleftrightarrow{O_2P_2}$於 H，

因此 $O_1HP_2P_1$為矩形。

可得 $\overline{O_2H}=\overline{P_2H}+\overline{O_2P_2}$=4+2=6，

因此 $\overline{P_1P_2}=\overline{O_1H}=\sqrt{\overline{O_1O_2}^2-\overline{O_2H}^2}=\sqrt{8^2-6^2}=2\sqrt{7}$ 。

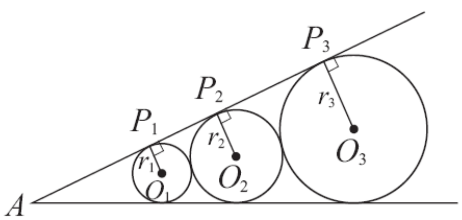
(%i1) sqrt(8^2-6^2); ※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 sqrt(8^2-6^2) → ctrl+enter。

(%o1) $2\sqrt{7}$

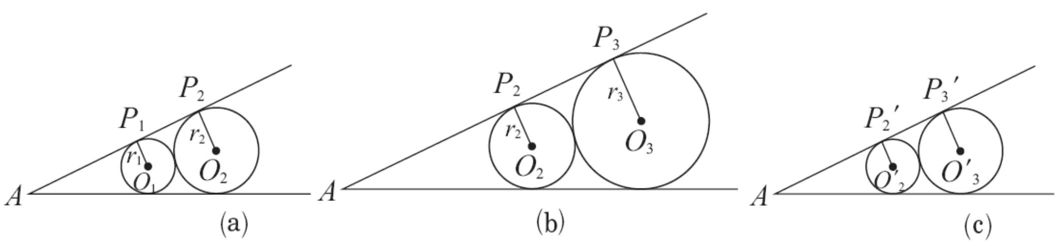
P. 71 例 15

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，∠A 的兩邊是圓 O_1、圓 O_2、圓 O_3的外公切線，且圓 O_1和圓 O_2外切，圓 O_2和圓 O_3外切。若 r_1、r_2、r_3各為圓 O_1、圓 O_2、圓 O_3的半徑，說明$\frac{r_2}{r_1}=\frac{r_3}{r_2}$ 。



我們將上圖分解成右邊的圖(a)和圖(b)。



現以 A 為中心將圖(b)中的圖形縮放$\frac{r_1}{r_2}$倍，得圖(c)，則

$\overline{O_2'P_2'}=r_2\times\frac{r_1}{r_2}=r_1$，$\overline{O_3'P_3'}=r_3\times\frac{r_1}{r_2}=\frac{r_3r_1}{r_2}$ ，

由於圓 O_2'的半徑和圓 O_1一樣，

因此圖(c)和圖(a)的圖形一樣。

所以 $\overline{O_2P_2}=\overline{O_3'P_3'}$

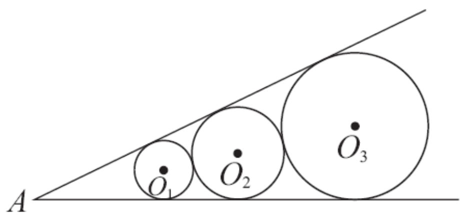
亦即 $r_2=\dfrac{r_3r_1}{r_2}$

得 $\dfrac{r_2}{r_1}=\dfrac{r_3}{r_2}$ 。

P. 72 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，圓 O_1 半徑為 2，圓 O_2 半徑為 3，且圓 O_1 和圓 O_2 外切，圓 O_2 和圓 O_3 外切，求 O_3 的半徑。



根據例 15 可知，$\dfrac{r_2}{r_1}=\dfrac{r_3}{r_2}$ → $\dfrac{3}{2}=\dfrac{r_3}{3}$

(%i1) solve([3/2=x/3], [x]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([3/2=x/3], [x]) → ctrl+enter。

(%o1) [x=$\dfrac{9}{2}$]

P. 73 2-1 自我評量

此題無法直接使用 Maxima 軟體

1.下列敘述，將正確的打「○」，錯誤的打「X」。

(○)(1)圓的對稱軸必過圓心。

(○)(2)若圓上某半徑平分一弦，則該半徑垂直此弦。

(○)(3)若圓心到一直線的距離等於半徑，則此直線為切線。

(X)(4)同圓心的相異兩圓一定內離。

(X)(5)若兩圓的兩個半徑以及連心距可以構成三角形的三邊，則此兩圓必外離。

(○)(6)若兩圓的兩條外公切線平行，則此兩圓的半徑相等。

(○)(7)若兩圓相切，則切點在兩圓的連心線段上。

此題無法直接使用 Maxima 軟體

2.已知坐標平面上有一圓，(1,1)和(-1,-1)落在此圓上，下麵那一點不可能是該圓的圓心。

★判斷兩點與題目給的點距離是否相等。

(1)(1,-1)

$$\sqrt{(1-1)^2+(1-(-1))^2}=\sqrt{(-1-1)^2+(-1-(-1))^2}$$

(%i1) compare(sqrt((1-1)^2+(1-(-1))^2),sqrt((-1-1)^2+(-1-(-1))^2));

※「compare(算式,算式)」指令表示比較算式;「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 compare(sqrt((1-1)^2+(1-(-1))^2),sqrt((-1-1)^2+(-1-(-1))^2)) → ctrl+enter。

(%o1) =

(2)(0,0)

$$\sqrt{(1-0)^2+(1-0)^2}=\sqrt{(-1-0)^2+(-1-0)^2}$$

(%i2) compare(sqrt((1-0)^2+(1-0)^2),sqrt((-1-0)^2+(-1-0)^2));

※「compare(算式,算式)」指令表示比較算式;「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 compare(sqrt((1-0)^2+(1-0)^2),sqrt((-1-0)^2+(-1-0)^2)) → ctrl+enter。

(%o2) =

(3)(-1,0)

$$\sqrt{(1-(-1))^2+(1-0)^2}=\sqrt{(-1-(-1))^2+(-1-0)^2}$$

(%i3) compare(sqrt((1-(-1))^2+(1-0)^2),sqrt((-1-(-1))^2+(-1-0)^2));

※「compare(算式,算式)」指令表示比較算式;「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 compare(sqrt((1-(-1))^2+(1-0)^2),sqrt((-1-(-1))^2+(-1-0)^2)) → ctrl+enter。

(%o3) >

(4)(-1,1)

$$\sqrt{(1-(-1))^2+(1-1)^2}=\sqrt{(-1-(-1))^2+(-1-1)^2}$$

(%i4) compare(sqrt((1-(-1))^2+(1-1)^2),sqrt((-1-(-1))^2+(-1-1)^2));

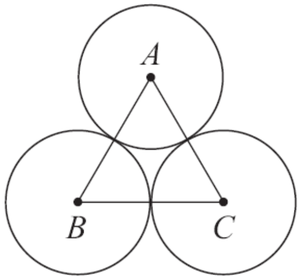
※「compare(算式,算式)」指令表示比較算式;「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 compare(sqrt((1-(-1))^2+(1-1)^2),sqrt((-1-(-1))^2+(-1-1)^2)) → ctrl+enter。

(%o4) =

因此，(3)(-1,0)不可能是該圓的圓心。

此題無法直接使用 Maxima 軟體

3.如右圖，有三個等半徑的圓兩兩外切，其中 A、B、C 為圓心，說明△ABC 為正三角形。



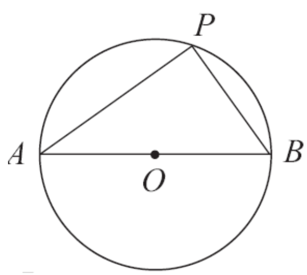
由於此三個圓半徑相等，同時兩兩之間的圓也互為相切，所以，三邊會等長，因此，△ABC 為正三角形。

第 2 章 圓 2-2 圓與角

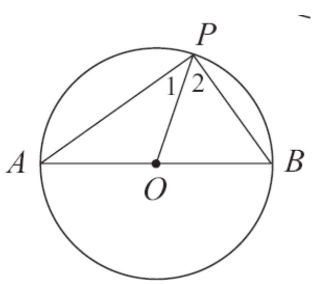
P. 75 例 1

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，$\overline{AB}$ 為圓 O 的直徑，在圓上任取異於 A、B 的一點 P，說明圓周角∠APB 必為直角。



如右圖，作 $\overline{OP}$ 。



由於 ∠1=∠A (△OAP 為等腰三角形)

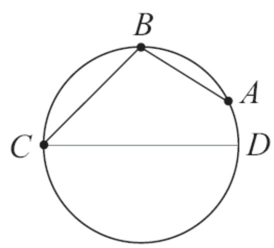
∠2=∠B (△OBP 為等腰三角形)

由三角形內角和為 180°，得$\angle A+\angle B+(\angle 1+\angle 2)=180^\circ$
因此　$(\angle 1+\angle 2)\times 2=180^\circ$
所以　$\angle 1+\angle 2=\dfrac{180^\circ}{2}=90^\circ$。

P. 76 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，$\overline{CD}$為圓 O 的直徑，若圓上的 A、B 兩點在$\overline{CD}$的同側，說明$\angle ABC$是鈍角。

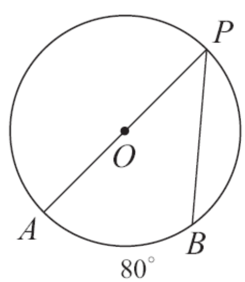


因為$\overline{CD}$直徑，所以弧 CD 為 180 度，而弧 AC 大於 180 度，因此，$\angle ABC$大於９０度是鈍角。

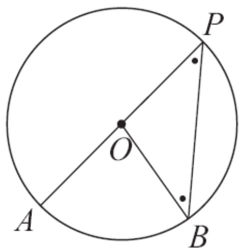
P. 76 例 2

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，$\overline{AP}$為圓 O 的直徑，若已知$\overset{\frown}{AB}=80^\circ$，求$\angle APB$。



連接$\overline{OB}$，則$\angle AOB=\overset{\frown}{AB}=80^\circ$。



由於 $\overline{OB}=\overline{OP}$ ，所以△POB 爲等腰三角形，

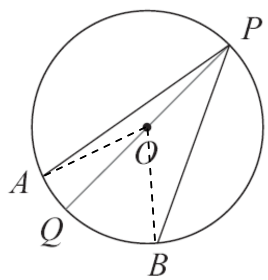
因此 ∠AOB=2∠APB (三角形外角性質)

即 ∠APB=$\frac{1}{2}$∠AOB=40°。

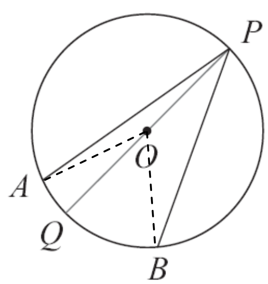
P. 77 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，$\overset{\frown}{AB}$=70°，利用直徑$\overline{PQ}$與例題 2 求∠APB。



連接$\overline{OB}$和$\overline{OA}$，則∠BOA=$\overset{\frown}{AB}$=70°。



由於 $\overline{OB}=\overline{OP}=\overline{OA}$ ，所以△POB△POA 爲等腰三角形，

因此 ∠BOQ=2∠BPQ (三角形外角性質)

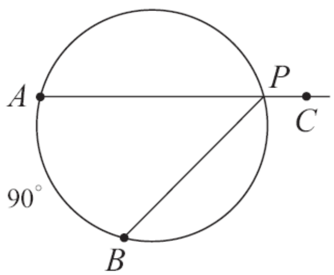
$\angle AOQ=2\angle APQ$ (三角形外角性質)

即 $\angle APB=\angle BPQ+\angle APQ=\frac{1}{2}(\angle BOQ+\angle AOQ)=\frac{1}{2}\times\angle AOB=\frac{1}{2}\times 70^{\circ}=35^{\circ}$。

P. 77 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，$\overset{\frown}{AB}=90^{\circ}$，C 為 $\overline{AP}$ 上的一點。求$\angle BPC$。



★圓周角等於其所對弧度數的一半。

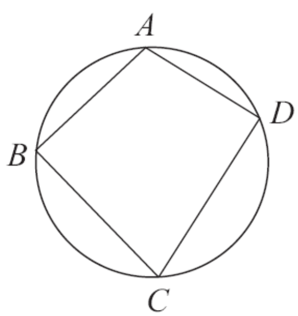
$\angle APB=90^{\circ}\div 2=45^{\circ}$，

因此，$\angle BPC=180^{\circ}-\angle APB=180^{\circ}-45^{\circ}=135^{\circ}$。

P. 78 例 3

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，圓上四點 A、B、C、D 構成一四邊形，說明$\angle A+\angle C=180^{\circ}=\angle B+\angle D$。



由於 $\angle A=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BCD}$，

$\angle C=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BAD}$，

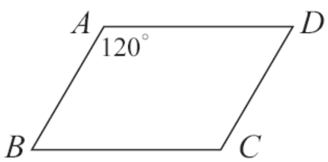
所以 $\angle A+\angle C=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BCD}+\frac{1}{2}\overset{\frown}{BAD}=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BCD}+\overset{\frown}{BAD})=360^\circ\times\frac{1}{2}=180^\circ$，

同理 $\angle B+\angle D=180^\circ$。

P. 78 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，有一平行四邊形 ABCD，$\angle A=120^\circ$，說明 A、B、C、D 不會共圓。

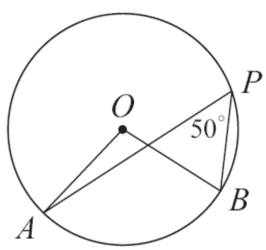


在圓內的四邊形，對角的和要是 180 度，但 AC 或 BD 和不是 180。

P. 78 例 4

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，$\angle APB=50^\circ$，求 $\angle AOB$。



由於 $\angle A=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BCD}$

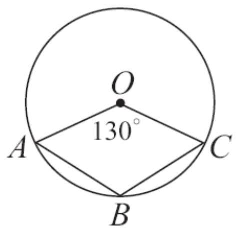
所以 $\overset{\frown}{AB}=2\angle APB=50^\circ\times2=100^\circ$

因此 $\angle AOB=\overset{\frown}{AB}=100^\circ$。

P. 79 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，圓心角 $\angle AOC=130^\circ$，求 $\angle ABC$。



★同一弧所對圓周角是所對圓心角的一半。

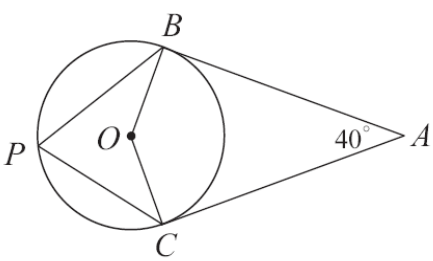
$\angle$AOC=130°，所以，$\overset{\frown}{ABC}$=130°x2=260°，

$\overset{\frown}{AC}$=360°-260°=100°，因此，$\angle$ABC=100°÷2=50°。

P. 79 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，$\overline{AB}$ 、$\overline{AC}$ 分別與圓 O 切於 B、C。已知$\angle$A=40°，求$\angle$BOC 和$\angle$BPC。



★同一弧所對圓周角是所對圓心角的一半。

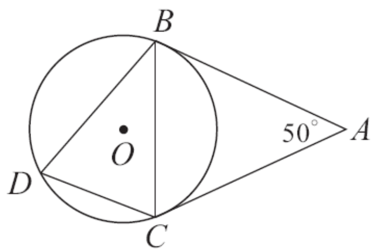
$\angle$BOC=360°-90°-90-40°($\angle$A)=140°，

$\angle BPC=\frac{1}{2}\angle BOC=\frac{1}{2}\times 140°=70°$。

P. 81 例 5

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，D 為圓 O 上的一點，且 $\overline{AB}$ 、$\overline{AC}$ 分別與圓 O 相切於 B、C，$\angle$A=50°，求$\angle$ABC 和$\angle$BDC。



利用等腰三角形或弧切角爲所夾弧一半的性質，都可以知道∠CBA=∠BCA，

所以　∠CBA=$\frac{1}{2}$(180°-50°)=65°　(三角形的內角和爲 180 度)

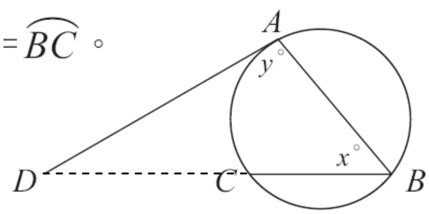
因此　∠BDC=∠CBA=65° 。　(弧切角等於圓周角)

P. 81 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，$\overline{DA}$ 與圓切於 A，且 C 爲圓上一點，$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$ 。

$=\overset{\frown}{BC}$ 。



(1)說明 y=2x

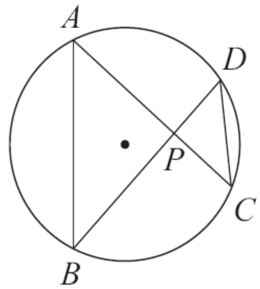
y 所對的弧長爲 $\overset{\frown}{AB}$ ，而 x 所對的弧長爲 $\overset{\frown}{AC}$ ，由於 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$ ，所以，y=2x。

(2)若 D、C、B 共線，且∠ADC=30°，求 x。
x=180°-90°(y)-30°(∠ADC)=60°。

P. 82 例 6

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，$\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 相交於 P 點，說明△ABP~△DCP。



因爲 ∠APB=∠DPC (對頂角相等)

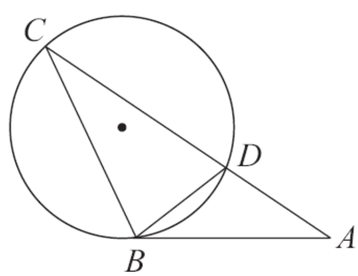
∠ABP=∠DCP (對同一弧的圓周角相等)

所以 △ABP~△DCP。

P. 82 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，$\overline{AB}$ 切圓於 B，並且 $\overline{AC}$ 交圓於 D，說明△ABC~△ADB。



∠A＝∠A (共角)

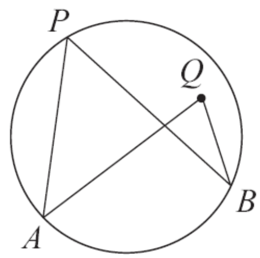
∠DBA=∠BCD (弦切角等於圓內角)，

△ABC~△ADB (AA 相似)。

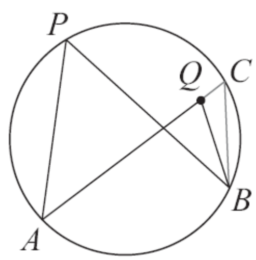
P. 82 例 7

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，點 Q 在圓內部，Q 和 P 在 $\overline{AB}$ 的同側，說明∠Q>∠P。



如右圖，延長$\overline{AQ}$，使得$\overrightarrow{AQ}$和圓 O 交於 C 點，並連接$\overline{CB}$。

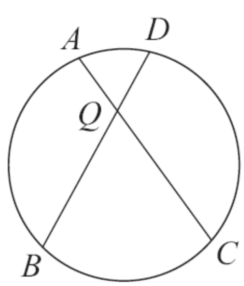


因為∠APB 和∠ACB 所對的弧相同，所以∠APB=∠ACB，
由於∠AQB 是△BQC 的外角，亦即∠AQB=∠ACB+∠QBC，
所以∠AQB>∠ACB，因此∠AQB>∠APB。

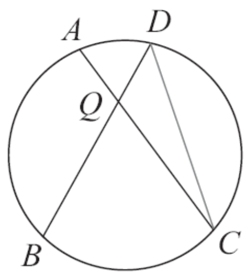
P. 83 例 8

$\boxed{\text{此題無法直接使用 Maxima 軟體}}$

如右圖，$\overset{\frown}{AD}=40^\circ$，$\overset{\frown}{BC}=90^\circ$，求∠BQC。



如右圖，連接$\overline{CD}$，由例 7 的說明可知，

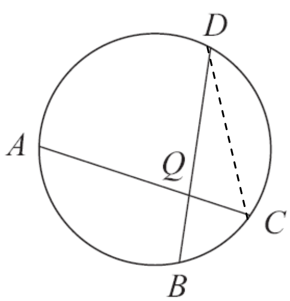


$\angle$BQC=$\angle$QDC+$\angle$QCD=$\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{AD})$=$\frac{1}{2}(90^\circ+40^\circ)$=$\frac{1}{2}\times130^\circ=65^\circ$。

P. 84 隨堂練習

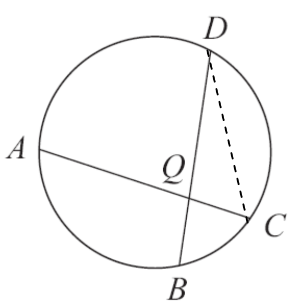
此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，A、B、C、D 為圓上四點，Q 為圓內一點。



(1)若 $\overset{\frown}{BC}=40^\circ$，$\overset{\frown}{AD}=120^\circ$，求$\angle$BQC。

如圖，連接$\overline{CD}$，由例 7 的說明可知，



$\angle$BQC=$\angle$QDC+$\angle$QCD=$\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{AD})$=$\frac{1}{2}(40^\circ+120^\circ)$=$\frac{1}{2}\times160^\circ=80^\circ$。

(2)若$\angle$AQD=90°，$\overset{\frown}{AB}=100^\circ$，求$\overset{\frown}{CD}$。

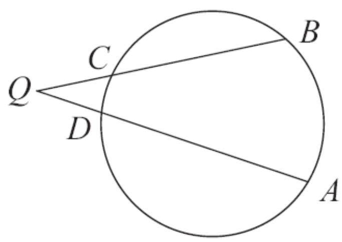
∠AQB=180-∠AQD=180°-90°=90°，
∠AQB=∠DQC　(對角相等)

因此，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}=100^\circ$。

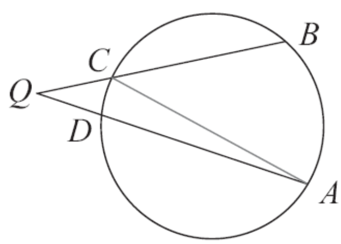
P. 84 例 9

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，已知$\overset{\frown}{AB}=90^\circ$，$\overset{\frown}{CD}=30^\circ$，求∠AQB。



如右圖，連接$\overline{AC}$，

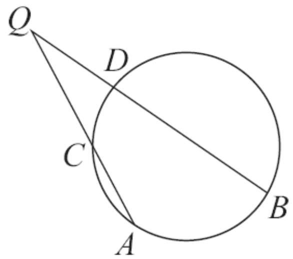


$\angle AQB=\angle ACB-\angle DAC=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{CD})=\frac{1}{2}(90^\circ-30^\circ)=\frac{1}{2}\times 60^\circ=30^\circ$。

P. 84 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，A、B、C、D 為圓上四點，Q 為圓外一點。



(1) 若 $\overset{\frown}{CAB}$=140°，$\overset{\frown}{DCA}$=80°，求∠AQB。

令 $\overset{\frown}{AC}$=x，$\overset{\frown}{DC}$=8-x，$\overset{\frown}{BA}$=140-x，

$\angle AQB=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{DC})=\frac{1}{2}((140-x)-(80-x))=30^\circ$。

(%i1) (1/2)*((140-x)-(80-x)); ※直接輸入(1/2)*((140-x)-(80-x)) → ctrl+enter。

(%o1) 30

(2)若∠AQB=35°，$\overset{\frown}{CD}$=45°，求 $\overset{\frown}{AB}$。

$\angle AQB=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{DC}) \rightarrow 35=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AB}-45)$，

(%i2) solve([35=(1/2)*(x-45)], [x]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([35=(1/2)*(x-45)], [x]) → ctrl+enter。

(%o2) [x=115]

因此，$\overset{\frown}{AB}$=115°。

P. 73 2-2 自我評量

此題無法直接使用 Maxima 軟體

1.下列敘述，將正確的打「○」，錯誤的打「X」。

(○)(1)若一圓周角所對的弧是 120°，則此角爲鈍角。

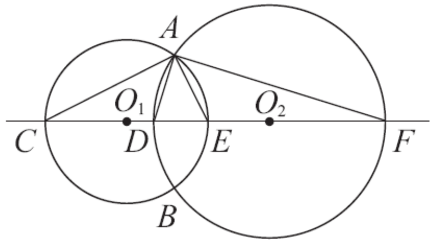
(○)(2)若 $\overline{AB}$ 爲圓上直徑，C、D 爲圓上異於 A、B 的兩點，則∠ACB=∠ADB。

(○)(3)圓中兩相異直徑的四個端點構成一個矩形。

(X)(4)若由圓上四個點所構成的四邊形是平行四邊形，則此平行四邊形一定是矩形。

此題無法直接使用 Maxima 軟體

2.如右圖，圓 O_1 和圓 O_2 交於 A、B 兩點，$\overleftrightarrow{O_1O_2}$ 與兩圓的交點為 C、D、E、F。說明∠CAD=∠FAE。

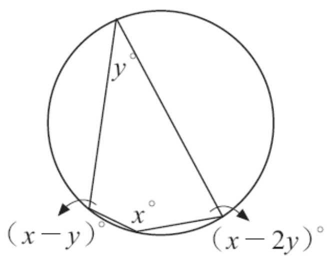


因為 $\overline{CE}$ 和 $\overline{DF}$ 都是直徑，

∠ACE=∠FAD=90°，
∠DAE=∠DAE，
因此，∠CAD=∠FAE。

此題無法直接使用 Maxima 軟體

3.如右圖，求 x、y。



$$\begin{cases} x+y=180 \\ 2x-3y=180 \end{cases}$$

(%i1) solve([x+y=180,2*x-3*y=180], [x,y]);

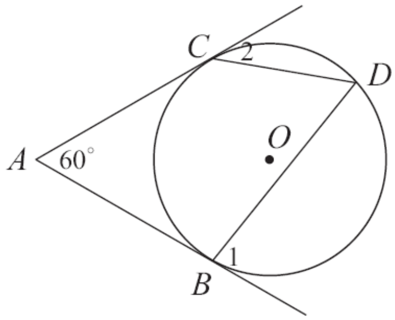
※「solve([變數算式,變數算式], [變數,變數])」指令表示求解，輸入 solve([x+y=180,2*x-3*y=180], [x,y]) → ctrl+enter。

(%o1) [[x=144,y=36]]

此題無法直接使用 Maxima 軟體

4.如右圖，A 為圓 O 外一點，$\overline{AB}$ 、$\overline{AC}$ 切圓於 B、C 兩點，D 為圓上一點。已知

$\angle BAC=60^{\circ}$，$\angle 1=2\angle 2$，求$\angle BDC$、$\angle 1$、$\angle 2$。



令$\angle 2=x$，$\angle 1=2x$，$\overset{\frown}{BD}=4x$，$\overset{\frown}{CD}=2x$，$\overset{\frown}{BC}=360-6x$，

$\angle CDB=180-3x$，$\angle ACD=180-x$，$\angle ABD=180-2x$，

$\angle A+\angle ACD+\angle CDB+\angle ABD=360 \rightarrow 60+(180-x)+(180-3x)+(180-2x)=360$，

(%i1) solve([60+(180-x)+(180-3*x)+(180-2*x)=360], [x]);

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([60+(180-x)+(180-3*x)+(180-2*x)=360], [x]) → ctrl+enter。

(%o1) [x=40]

因此，$\angle 1=2\times 40=80$，$\angle 2=40$，$\angle BDC=180-3\times 40=$

(%i1) 2*40; ※直接輸入 2*40 → ctrl+enter。

(%o1) 80

(%i2) 180-3*40; ※直接輸入 180-3*40 → ctrl+enter。

(%o2) 60

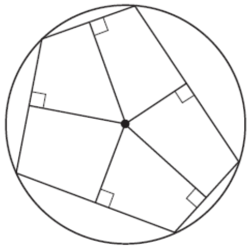
第 2 章 圓 2-3 圓與多邊形

P. 88 例 1

此題無法直接使用 Maxima 軟體

若一多邊形有外心，說明外心是此多邊形各邊中垂線的交點。

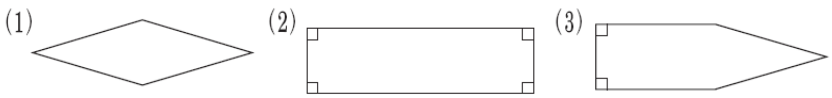
由於此多邊形有外接圓，因此任一邊都是該圓的弦，但因為圓上一弦的中垂線必過圓心，因此外心（亦即圓心）就是各邊中垂線的交點。右圖是五邊形的例子。



P. 88 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

判斷下列各圖形哪些有外心？哪些沒有外心？



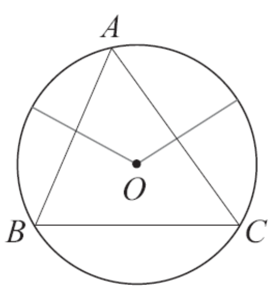
(2)有外心；(1)和(3)沒有外心。

P. 89 例 2

此題無法直接使用 Maxima 軟體

說明△ABC 必有外心。

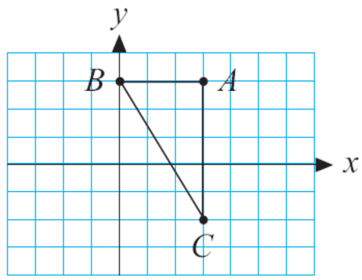
由於 A、B、C 三點不共線，由 2-1 節知道，必有一圓 O 通過此三點 A、B、C（如右圖）。因此圓 O 就是△ABC 的外接圓，而圓心 O 就是△ABC 的外心。



P. 89 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，坐標平面上有一△ABC，且 A、B、C 坐標為(3,3)、(0,3)、(3,-2)，求△ABC 外心的坐標。



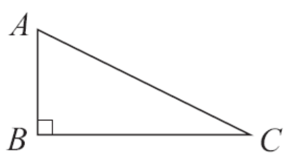
由於直角三角形，外心就是斜邊 $\overline{BC}$ 的中點，

$\overline{BC}$ 的中點=$(\frac{0+3}{2},\frac{3+(-2)}{2})=(\frac{3}{2},\frac{1}{2})$。

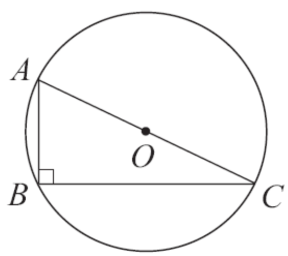
P. 89 例 3

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，△ABC 為直角三角形，說明△ABC 的外心就是斜邊 $\overline{AC}$ 的中點。



過 A、B、C 三點作一外接圓，如右圖。

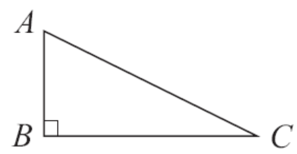


由於圓周角∠ABC=90°，所以 $\overline{AC}$ 必為直徑。但外心 O 為此圓的圓心，因此外心就是 $\overline{AC}$ 的中點。

P. 90 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，△ABC 爲直角三角形，其中 $\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=12$，求外接圓的半徑。



由於直角三角形，外接圓的半徑就是斜邊 $\overline{AC}$ 的一半，

$\overline{AC}=\sqrt{5^2+12^2}=13$，

(%i1) sqrt(5^2+12^2); ※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 sqrt(5^2+12^2) → ctrl+enter。

(%o1) 13

外接圓的半徑=13÷2=$\dfrac{13}{2}$。

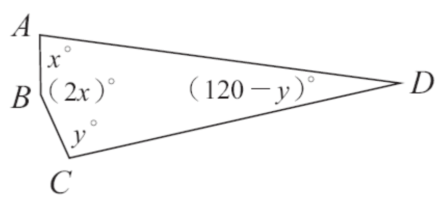
(%i2) 13/2; ※直接輸入 13/2 → ctrl+enter。

(%o2) $\dfrac{13}{2}$

P. 91 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，有一四邊 ABCD，若已知 ABCD 有外接圓，求 x、y。



由於 ABCD 有外接圓，因此，∠A 與∠C 互補，而∠B 與∠D 互補，

$$\begin{cases} x+y=180 \\ 2x+(120-y)=180 \end{cases}$$

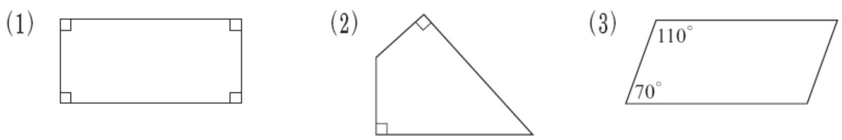
(%i1) solve([x+y=180,2*x+(120-y)=180], [x,y]); ※「solve([變數算式,變數算式], [變數,變數])」指令表示求解，輸入 solve([x+y=180,2*x+(120-y)=180], [x,y]) → ctrl+enter。

(%o1) [[x=80,y=100]]

P. 92 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

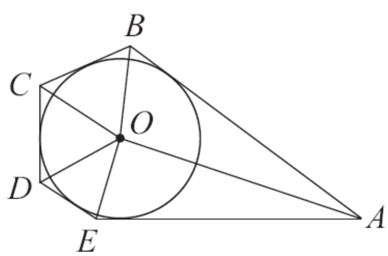
下列哪些四邊形有外接圓？(1)和(3)。



P. 93 例 4

此題無法直接使用 Maxima 軟體

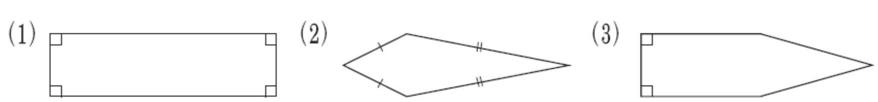
若一多邊形有內心，說明內心是此多邊形各內角的角平分線的交點。
由於此多邊形有內切圓，由 2-1 節圓外一點的切線性質知道，此多邊形頂點到圓心的連線是該內角 角平分線，因此內心（亦即圓心）就是各內角的角平分線的交點。右圖以五邊形為例。



P. 94 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

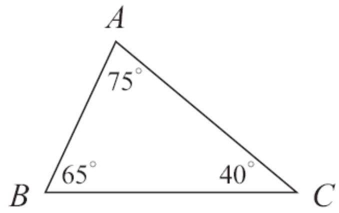
判斷下列各圖形哪些有內心？哪些沒有內心？(2)有內心，(1)和(3)沒有內心。

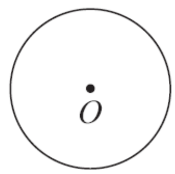


P. 94 例 5

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，有一△ABC 與圓 O，試在圓 O 作一外切三角形 A’B’C’，使得△ABC~△A’B’C’。



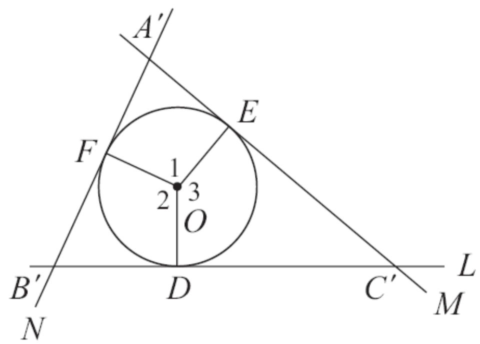


令 $\angle 1=180^\circ-\angle A=105^\circ$

$\angle 2=180^\circ-\angle B=115^\circ$

$\angle 3=180^\circ-\angle C=140^\circ$

由於$\angle 1+\angle 2+\angle 3=360^\circ$，在圓 O 作 105°、115°、140°的圓心角，分別在圓上得 D、E、F 點如右圖。



再過 D、E、F 分別作切線 L、M、N 構成△A’B’C’。所以

$\angle A'=180^\circ-\angle 1=180^\circ-105^\circ=75^\circ=\angle A$，

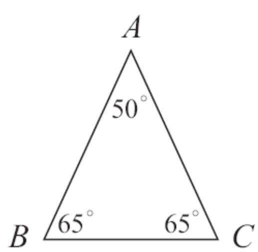
$\angle B'=180^\circ-\angle 2=180^\circ-115^\circ=65^\circ=\angle B$，

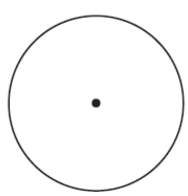
因此 △ABC~△A’B’C’ (AA 相似性質)

P. 95 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，有一△ABC，試仿例 5 在下面的圓畫出一外切三角形和△ABC 相似。



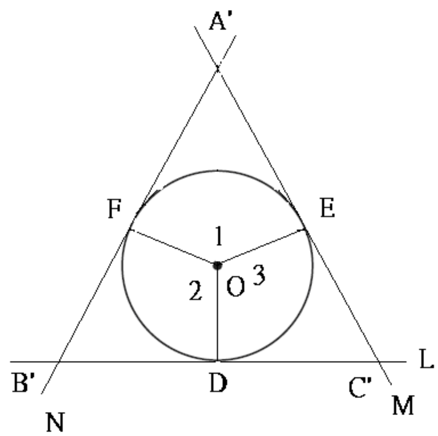


令 $\angle 1=180^\circ-\angle A=130^\circ$

$\angle 2=180^\circ-\angle B=115^\circ$

$\angle 3=180^\circ-\angle C=115^\circ$

由於$\angle 1+\angle 2+\angle 3=360^\circ$，在圓 O 作 130°、115°、115°的圓心角，分別在圓上得 D、E、F 點如右圖。



再過 D、E、F 分別作切線 L、M、N 構成△A'B'C'。所以

$\angle A'=180^\circ-\angle 1=180^\circ-130^\circ=50^\circ=\angle A$，

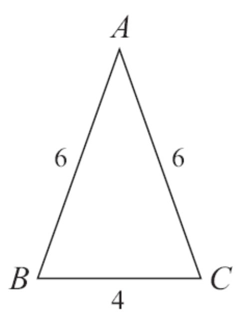
$\angle B'=180^\circ-\angle 2=180^\circ-115^\circ=65^\circ=\angle B$，

因此 △ABC~△A'B'C' (AA 相似性質)

P. 97 例 6

此題無法直接使用 Maxima 軟體

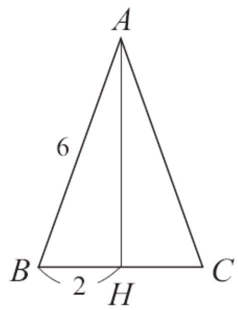
如右圖，△ABC 為等腰三角形，腰長為 6，底邊長為 4。



(1)求△ABC 的面積。

(2)求內心 O 到各邊的距離。

(1)如右圖，作 $\overline{AH}$ 為 $\overline{BC}$ 上的高。



所以 $\overline{BH}$ =2 ($\overline{AH}$ 是 $\overline{BC}$ 的中垂線)

$\overline{AH}=\sqrt{6^2-2^2}$ =4 $\sqrt{2}$

(%i1) sqrt(6^2-2^2); ※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 sqrt(6^2-2^2) → ctrl+enter。

(%o1) 4 $\sqrt{2}$

由此得△ABC 面積爲 $\frac{1}{2}$ ×4×4 $\sqrt{2}$ =8 $\sqrt{2}$

(%i2) (1/2)*4*(4*sqrt(2)); ※直接輸入(1/2)*4*(4*sqrt(2)) → ctrl+enter。

(%o2) 8 $\sqrt{2}$

(2)設內心 O 到各邊的距離爲 d。

△ABC 的周長爲 6+6+4=16，

因此，8 $\sqrt{2}$ = $\frac{1}{2}$ ×16×d，

(%i3) solve([8*sqrt(2)=(1/2)*16*d], [d]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([8*sqrt(2)=(1/2)*16*d], [d]) → ctrl+enter。

(%o3) [d= $\sqrt{2}$]

P. 97 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

已知一三角形的周長 24，面積爲 18，求此三角形內切圓的半徑。

★內心 O 到△ABC 三邊的距離都相等(記成 d)。△ABC 面積= $\frac{1}{2}$ ×△ABC 周長×d。

三角形內切圓的半徑表示三邊的距離都相等，求 d 值即可，

$18=\frac{1}{2}\times 24\times d$，

(%i1) solve([18=(1/2)*24*d], [d]);

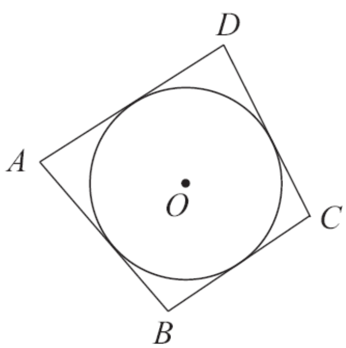
※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([18=(1/2)*24*d], [d]) → ctrl+enter。

(%o1) $[d=\frac{3}{2}]$

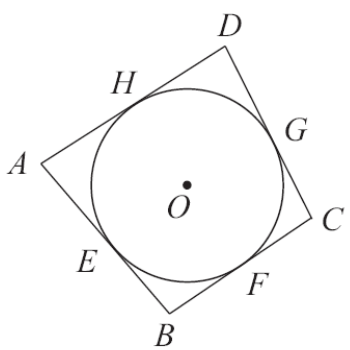
P. 98 例 7

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，四邊形 ABCD 是圓 O 的外切四邊形，說明 $\overline{AD}+\overline{BC}=\overline{AB}+\overline{CD}$。



設四邊形 ABCD 和圓 O 切於 E、F、G、H 四點。



由於 $\overline{AH}=\overline{AE}$，$\overline{BE}=\overline{BF}$，

$\overline{CF}=\overline{CG}$，$\overline{DG}=\overline{DH}$， (切線性質)

因此 $\overline{AD}+\overline{BC}=\overline{AH}+\overline{DH}+\overline{BF}+\overline{CF}$

$=\overline{AE}+\overline{DG}+\overline{BE}+\overline{CG}$

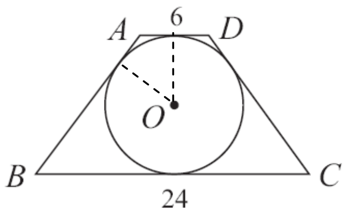
$=(\overline{AE}+\overline{BE})+(\overline{CG}+\overline{DG})$

$=\overline{AB}+\overline{CD}$ 。

P. 98 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，等腰梯形 ABCD 有內切圓，其中 $\overline{AD}//\overline{BC}$ ， $\overline{AD}=6$， $\overline{BC}=24$，求 $\overline{AB}$ 和內切圓半徑。



根據例 7 可知， $\overline{AB}=\frac{\overline{AD}}{2}+\frac{\overline{BC}}{2}=\frac{6}{2}+\frac{24}{2}=15$，

(%i1) (6/2)+(24/2); ※直接輸入(6/2)+(24/2) → ctrl+enter。

(%o1) 15

內切圓直徑= $\sqrt{15^2-9^2}=12$，

(%i2) sqrt(15^2-9^2); ※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 sqrt(15^2-9^2) → ctrl+enter。

(%o2) 12

因此，內切圓半徑=12÷2=6。

(%i1) 12/2; ※直接輸入 12/2 → ctrl+enter。

(%o1) 6

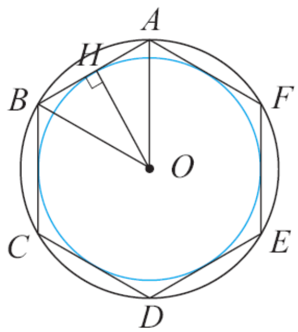
P. 101 例 8

此題無法直接使用 Maxima 軟體

設一正六邊形邊長為 1，求此正六邊形內切圓及外接圓的半徑。

如右圖，令正六邊形 ABCDEF 的外心（也是內心）為 O，則外接圓的半徑等於 $\overline{OA}$，

而且內切圓的半徑等於△OAB 中 $\overline{AB}$ 上的高 $\overline{OH}$ 。



由於正六邊形各內角等於$\frac{(6-2)\times 180^{\circ}}{6}=120^{\circ}$，

(%i1) ((6-2)*180)/6; ※直接輸入((6-2)*180)/6 → ctrl+enter。

(%o1) 120

所以 $\angle OAB=\frac{120^{\circ}}{2}=60^{\circ}$， ($\overleftrightarrow{OA}$ 為線對稱軸)

同理 $\angle OBA=60^{\circ}$， ($\overleftrightarrow{OB}$ 為線對稱軸)

因此△OAB 是邊長 1 的正三角形。

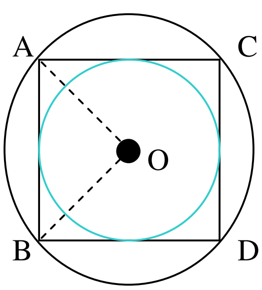
得 $\overline{OA}=1$，$\overline{OH}=\frac{\sqrt{3}}{2}$， (△OAH 為 30°-60°-90°三角形)

所以，外接圓半徑為 1，內切圓半徑為$\frac{\sqrt{3}}{2}$。

P. 102 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

設一正方形邊長為 2，求此正方形外接圓與內切圓的半徑。



由於正四邊形各內角等於$\frac{(4-2)\times 180^{\circ}}{4}=90^{\circ}$，

(%i1) ((4-2)*180)/4; ※直接輸入((4-2)*180)/4 → ctrl+enter。

(%o1) 90

所以 $\angle OAB=\dfrac{90^\circ}{2}=45^\circ$，$\angle OBA=45^\circ$，

因此△OAB 是等腰三角形。

得 $\overline{OA}=\sqrt{2}$， (△OAB 爲 45°-45°-90°三角形 → 1：1：$\sqrt{2}$)

所以，外接圓半徑爲$\sqrt{2}$，內切圓半徑爲 2÷2=1。

P. 103 2-3 自我評量

此題無法直接使用 Maxima 軟體

1.下列敘述，正確的打「○」，錯誤的打「X」。

(○)(1)圓的外切平行四邊形必爲菱形。

(X)(2)菱形必有內切圓。

(X)(3)圓的內接箏形必爲菱形。

(X)(4)菱形必有外接圓。

(X)(5)任一矩形必有外接圓。

(○)(6)任一矩形必有內切圓。

(X)(7)三角形的內心一定在三角形內部。

(X)(8)三角形的外心一定在三角形外部。

(X)(9)正三角形的內心和外心是不同的點。

(○)(10)直角三角形的內心和外心是不同的點。

此題無法直接使用 Maxima 軟體

2.若圓的半徑爲 4，求其內接正方形與外切正方形的面積。

內接正方形的邊長=4$\sqrt{2}$， (等腰△爲 45°-45°-90° → 1：1：$\sqrt{2}$)

內接正方形的面積=4$\sqrt{2}$x4$\sqrt{2}$=32 平方單位，

(%i1) 4*sqrt(2)*4*sqrt(2); ※直接輸入 4*sqrt(2)*4*sqrt(2) → ctrl+enter。

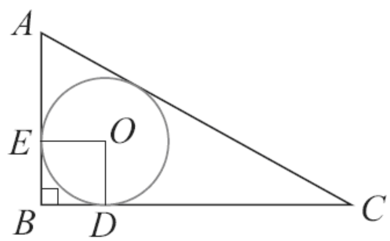
(%o1) 32

外接正方形的邊長=4x2=8，

外接正方形的面積=8x8=64 平方單位，

此題無法直接使用 Maxima 軟體

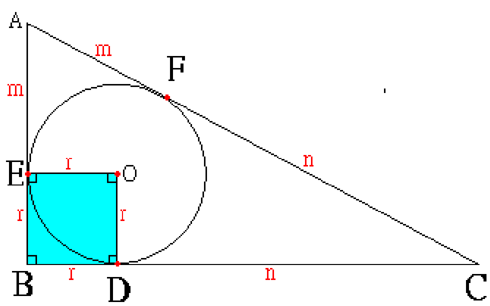
3.如右圖，有一直角三角形 ABC，∠B 為直角，且 O 為內心，作 $\overline{OD}\perp\overline{BC}$，$\overline{OE}\perp\overline{AB}$，試說明



(1) $\overline{BE}=\overline{BD}$是三角形 ABC 內切圓半徑。

因為內心到三邊的垂直距離相等，所以是 ABC 的內切圓半徑。

(2) $\overline{OE}=\dfrac{\overline{AB}+\overline{BC}-\overline{AC}}{2}$ 。



如上圖，有直角三角形 ABC，B 為直角，O 為內切圓圓心，D、E、F 為切點，
連接線段 OE 與線段 OD，觀察四邊形 OEBD，
∠OEB=∠ODB=90 度（切線），∠EBD=90 度（直角三角形之直角），
故∠DOE=360°-90°-90°-90°=90°，因此，OEBD 為長方形，

又因$\overline{OE}=\overline{OD}$=r，因此，OEBD 為正方形，因此，$\overline{BE}=\overline{BD}$=r，

又根據圓的切線性質，$\overline{AE}=\overline{AF}$ ，且$\overline{CF}=\overline{CD}$，分別令其為 m 與 n，

則兩股和-斜邊=$\overline{AB}+\overline{BC}$ - $\overline{AC}$ =(m+r)+(n+r)-(m+n)=2r，

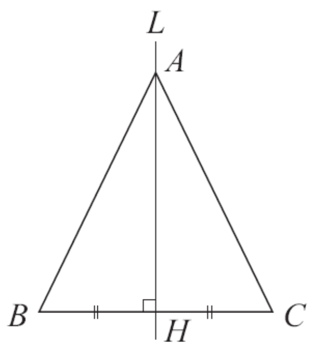
因此，r=$\dfrac{(\text{兩股和-斜邊})}{2}=\overline{OE}=\dfrac{\overline{AB}+\overline{BC}-\overline{AC}}{2}$ 。

第 2 章 圓 2-4 數學證明

P. 105 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，A 在 $\overline{BC}$ 的中垂線 L 上。



在下列空格中填入適當的性質證明 $\overline{AB}=\overline{AC}$ 。

【證明】由於 $\overline{BH}=\overline{CH}$ (中垂線垂直平分)

∠AHB=∠AHC (皆 90 度)

$\overline{AH}=\overline{AH}$

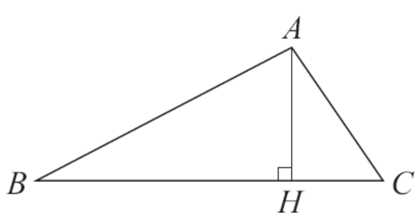
所以 △ABH≅△ACH (SAS 全等性質)

因此 $\overline{AB}=\overline{AC}$ (三角形全等性質)

P. 105 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，有一△ABC， $\overline{AH}\perp\overline{BC}$ 。



在下列的空格填入適當的算式，證明 $\overline{AB}+\overline{AC}>\overline{BC}$ 。

【證明】由於 $\overline{AB} > \underline{\overline{BH}}$ (直角三角形三邊以斜邊最長)

$\overline{AC} > \underline{\overline{HC}}$ (直角三角形三邊以斜邊最長)

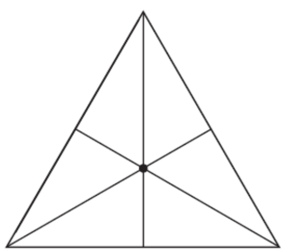
因此 $\overline{AB} + \overline{AC} > \underline{\overline{BC}}$ (不等式性質)

即 $\overline{AB} + \overline{AC} > \overline{BC}$ 。

P. 110 例 1

此題無法直接使用 Maxima 軟體

說明正三角形的內心、外心、重心是同一點。
如右圖，



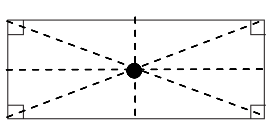
正三角形有三條對稱軸，就是各邊的垂直平分線，同時也是各內角的角平分線，因此這三條對稱軸的交點就是內心和外心。但因爲重心在對稱軸上，所以正三角形的重心、內心、外心是同一點。

P. 106 隨堂練習

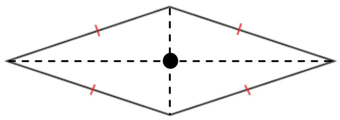
此題無法直接使用 Maxima 軟體

利用下列圖形的線對稱特性，找出其重心的位置。

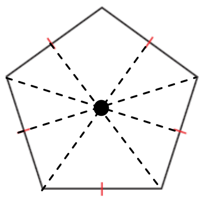
(1) 矩形



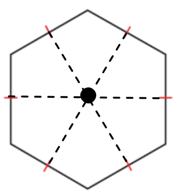
(2) 菱形



(3) 正五邊形



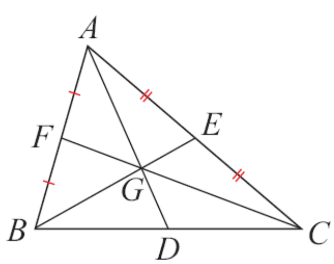
(4) 正六邊形



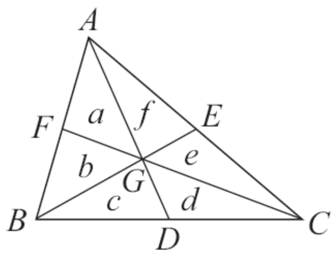
P. 112 例 2

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，中線 $\overline{BE}$ 與 $\overline{CF}$ 交於 G，連 $\overrightarrow{AG}$ 交 $\overline{BC}$ 於 D，證明 D 必爲 $\overline{BC}$ 的中點。

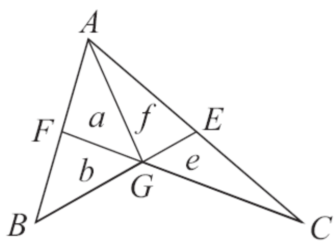


如右圖，將以 G 爲頂點之一的小三角形面積標爲 a、b、c、d、e、f，例如△GAF 的面積是 a。



底下我們將說明這些小三角形的面積有很好的性質，並以此說明 $\overline{BD}=\overline{DC}$ 。

(1)首先我們先說明 a=b=e=f。



由於 F 是 $\overline{AB}$ 的中點，$\overline{AF}=\overline{BF}$ ，且△GAF 中 $\overline{AF}$ 邊上的高等於△GBF 中 $\overline{BF}$ 邊上的高。

因此　a=b　(三角形面積=$\frac{1}{2}$×底×高)

同理　e=f

再利用三角形面積公式，由於 $\overline{AF}=\overline{BF}$ ，

因此　△AFC 面積=$\frac{1}{2}$△ABC 面積

同理　△ABE 面積=$\frac{1}{2}$△ABC 面積

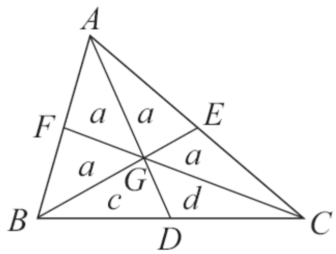
因此　b+a+f=e+f+a

故　b=e　(等量公理)

換句話說 a=b=e=f

(2)其次我們將證明 c=d。

由於 a=b=e=f，我們利用 a 表示這些面積，將上圖重新標示如右圖，



再一次運用三角形的面積公式，可知

$\overline{BD}$ ： $\overline{CD}$=△GBD 面積：△GCD 面積=△ABD 面積：△ACD 面積，

由第二個等號可得 c：d=(c+2a)：(d+2a)，
故得　d(c+2a)=c(d+2a)　(內項相乘等於外項相乘)
化簡得　dc+2ad=cd+2ac
再同除以 2a 得　c=d　(等量公理)

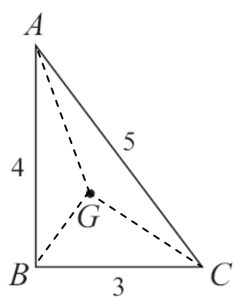
(3)利用 c=d 與三角形面積公式，可知 $\overline{BD}$ ： $\overline{CD}$=c：d=1：1，

即 $\overline{BD}=\overline{CD}$，所以 D 為 $\overline{BC}$ 的中點。

P. 113 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，△ABC 為一直角三角形，其三邊為 3、4、5，G 為重心。



(1)求△GAC 與△GBC 的面積。

△GAC=△GBC=$3\times4\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$=2 平方單位。

(%i1) 3*4*(1/2)*(1/3);　※直接輸入 3*4*(1/2)*(1/3) → ctrl+enter。
(%o1) 2

(2)求 G 到 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BC}$ 的距離。

$5 \times x \times \frac{1}{2} = 2$，

(%i2) solve([5*x*(1/2)=2], [x]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([5*x*(1/2)=2], [x]) → ctrl+enter。

(%o2) $[x=\frac{4}{5}]$

G 到 $\overline{AC}$ 距離=$\frac{4}{5}$，

$3 \times x \times \frac{1}{2} = 2$，

(%i3) solve([3*x*(1/2)=2], [x]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([3*x*(1/2)=2], [x]) → ctrl+enter。

(%o3) $[x=\frac{4}{3}]$

G 到 $\overline{BC}$ 距離=$\frac{4}{3}$。

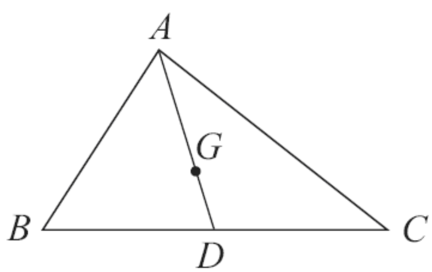
(3)G 是否爲△ABC 的內心？

否。

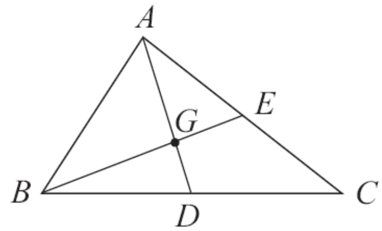
P. 114 例 3

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，G 爲△ABC 的重心，證明 $\overline{AG}$ ： $\overline{DG}$ =2：1。



如右圖，作中線 $\overline{BE}$，

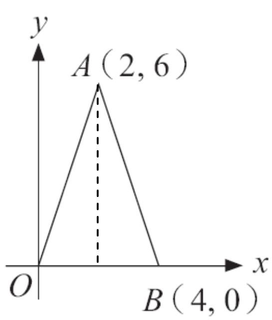


由上述可知△ABG 面積：△BDG 面積=2：1，但△ABG 在 $\overline{AG}$ 上的高等於△BDG 在 $\overline{DG}$ 上的高，因此，$\overline{AG}$ ： $\overline{DG}$ =△ABG 面積：△BDG 面積=2：1。

P. 114 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，坐標平面上有一等腰三角形 AOB，求重心 G 的坐標。



★三角形重心到頂點的距離，是過此頂點中線長的 $\frac{2}{3}$ 。

$6\times\frac{2}{3}=4$，

(%i1) 6*(2/3);　　※直接輸入 6*(2/3) → ctrl+enter。

(%o1) 4

6-4=2，

因此，G 的坐標為(2,2)。

P. 116 例 4

此題無法直接使用 Maxima 軟體

找出下面敘述的反例：

(1)康雄說，他從邊長 3、4、5 或 5、12、13 或 4、5、6 的三角形例子，發現一個定理：「三角形的兩邊乘積大於第三邊。」這個敘述對嗎？
(2)美蕙說，她發現一個質數的公式：n^2+n+1。因爲她試 n=1，結果是 3：n=2，結果是 7：n=5，結果是 31。所以她歸納出這個結果，你覺得正確嗎？

(1)我們懷疑康雄的說法，所以找邊長最簡單的正三角形來測式。取邊長是 $\frac{1}{2}$ 的正三角形，則兩邊乘積 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ 小於第三邊長 $\frac{1}{2}$。因此康雄的想法是錯的。康雄會這樣猜，可能是因爲平常課本上的例子，很多邊長都是整數的緣故。
(2)要測試美蕙的想法，最簡單的方式，就是有系統的表列出更完整的結果：

n	1	2	3	4	5	6	7	8
n^2+n+1	3	7	13	21	31	43	57	73

(%i1) f(n):=n^2+n+1; ※「f(變數):=函數式」指令表示定義函數式，輸入 f(n):=n^2+n+1 → ctrl+enter。
(%o1) f(n):=n^2+n+1
(%i2) f(1); ※「f(數值)」指令表示將數值代入函數式，輸入 f(1) → ctrl+enter。
(%o2) 3
(%i3) f(2); ※「f(數值)」指令表示將數值代入函數式，輸入 f(2) → ctrl+enter。
(%o3) 7
(%i4) f(3); ※「f(數值)」指令表示將數值代入函數式，輸入 f(3) → ctrl+enter。
(%o4) 13
(%i5) f(4); ※「f(數值)」指令表示將數值代入函數式，輸入 f(4) → ctrl+enter。
(%o5) 21
(%i6) f(5); ※「f(數值)」指令表示將數值代入函數式，輸入 f(5) → ctrl+enter。
(%o6) 31
(%i7) f(6); ※「f(數值)」指令表示將數值代入函數式，輸入 f(6) → ctrl+enter。
(%o7) 43
(%i8) f(7); ※「f(數值)」指令表示將數值代入函數式，輸入 f(7) → ctrl+enter。
(%o8) 57
(%i9) f(8); ※「f(數值)」指令表示將數值代入函數式，輸入 f(8) → ctrl+enter。
(%o9) 73
顯然。在 n=4 和 7 時，21 和 57 都有 3 的因數，因此美蕙的說法是錯的。

P. 116 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

找出下面敘述的反例：

(1)美蕙修正她的說法：「若 n^2+n+1 不是 3 的倍數，則 n^2+n+1 一定是質數。」你覺得美蕙新的說法對嗎？

(2)若一個圓有外切四邊形，則此四邊形一定是菱形。

(1)美蕙的說法還是錯的，因爲，在 n=4 和 7 時，21 和 57 都有 3 的因數。

(2)錯，有可能是正四邊形，菱形只是四邊的其中一種。

P. 117 例 5

此題無法直接使用 Maxima 軟體

判斷下列反過來的敘述是否正確：

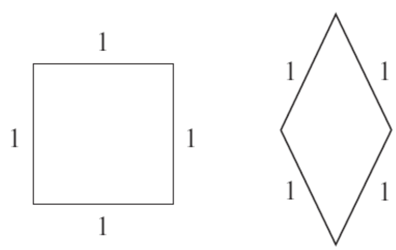
(1)已知「如果 a=1，則 $a^2=1$。」問敘述「如果 $a^2=1$，則 a=1。」是否正確。

(2)已知「若兩四邊形全等，則四對應邊相等。」問敘述「如果兩四邊形四對應邊相等，則此兩四邊形全等。」是否正確。

(1)a=-1 顯然是「$a^2=1$ 則 a=1」的反例，所以這敘述是錯的。

(2)敘述是錯的，我們可以找最熟悉的例子。

如右圖，邊長是 1 的正方形和邊長是 1 但不是正方形的菱形，就是明顯的反例。



P. 118 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

(1)已知「若兩四邊形相似，則四對應角相等。」問敘述「若兩四邊形四對應角相等，則此兩四邊形相似。」是否正確。

正確，角度相同此兩四邊形必爲相似。

(2)已知「如果 a=0，則 $a^2=0$。」問敘述「如果 $a^2=0$，則 a=0。」是否正確。

正確，0^2 永遠都是 0。

P. 120 2-4 自我評量

此題無法直接使用 Maxima 軟體

1.下面的敘述是錯誤的，試給出反例。

(1)若 a、b 是正數，則 ab>a。

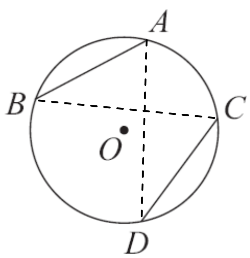
a=2、b=0.1 顯然是「ab>a」的反例，所以這敘述是錯的。

(2)若兩圓不相交，則這兩圓有外公切線和內公切線。

若其中一圓在一圓內，則就不會有外公切線和內公切線。

此題無法直接使用 Maxima 軟體

2.如右圖，圓 O 上 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，證明 $\overline{AB}=\overline{CD}$。



由題意可知 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，

而 ∠BAC=∠BCD (同為 $\overset{\frown}{BD}$)

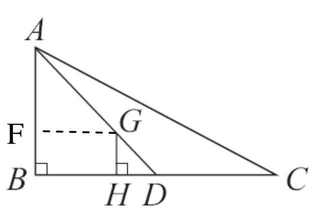
又因 ∠ABC=∠ADC (同為 $\overset{\frown}{AC}$)

由此可知第三角必為相等，而在同一個圓中，三角相等，三邊長必為相等，

因此，$\overline{AB}=\overline{CD}$。

此題無法直接使用 Maxima 軟體

3.如右圖，G 為直角三角形 ABC 的重心，$\overline{GH}\perp\overline{BC}$，說明 $\overline{GH}=\frac{1}{3}\overline{AB}$。



由於三角形重心到頂點的距離，是過此頂點中線長的 $\frac{2}{3}$，

因此，G 為直角三角形 ABC 的重心，

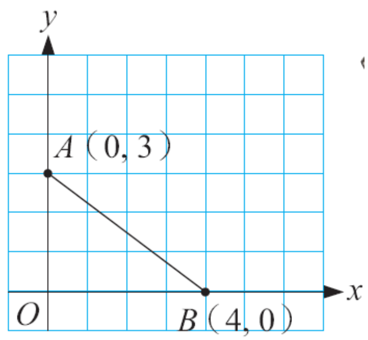
根據 AA 相似可知，
△ABD 和△GHD 相似，

$\overline{AG}$ ： $\overline{GD}$ =2：1 → $\overline{AF}$ ： $\overline{BF}$ =2：1 → $\overline{AB}$ ： $\overline{GH}$ =3：1，

因此，$\overline{GH}=\frac{1}{3}\overline{AB}$ 。

此題無法直接使用 Maxima 軟體

4.如右圖，坐標平面上有一直角三角形 AOB。



(1)求外心 J，內心 I，重心 G 的坐標。

斜邊= $\sqrt{3^2+4^2}$ =5，

(%i1) sqrt(3^2+4^2); ※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 sqrt(3^2+4^2) → ctrl+enter。

(%o1) 5

外心 J 為斜邊 $\overline{AB}$ 中點=$(\frac{0+4}{2},\frac{3+0}{2})=(2,\frac{3}{2})$，

(%i2) (0+4)/2; ※直接輸入(0+4)/2 → ctrl+enter。

(%o2) 2

(%i3) (3+0)/2; ※直接輸入(3+0)/2 → ctrl+enter。

(%o3) $\frac{3}{2}$

重心 G=$(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3})=(\frac{0+0+4}{3},\frac{0+3+0}{3})=(\frac{4}{3},1)$，

(%i4) (0+0+4)/3; ※直接輸入(0+0+4)/3 → ctrl+enter。

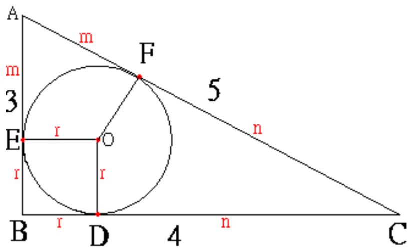
(%o4) $\frac{4}{3}$

(%i5) (0+3+0)/3; ※直接輸入(0+3+0)/3 → ctrl+enter。

(%o5) 1

內心 I 爲三角形的各邊角平分線，內心的坐標爲圓半徑，

如下圖所示，



2r+2n+2m=3+4+5 → 2(r+n+m)=12 → r+n+m=6，

m+n=5，所以，r=6-5=1，

因此內心 I(1,1)。

(2)J、I、G 三點共線嗎？

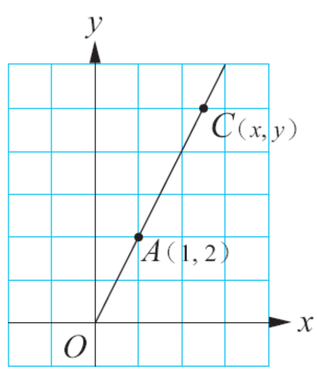
會。

第 3 章 二次函數 3-1 二次函數與圖形

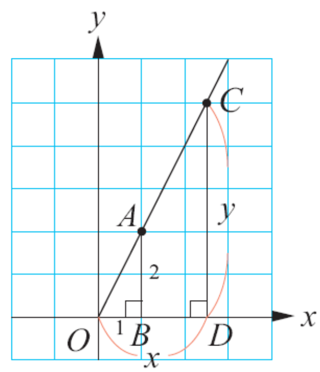
P. 123 例 1

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，A 的坐標爲(1,2)，在第一象限取$\overleftrightarrow{OA}$上任一點 C，設其坐標爲(x,y)，求 y 與 x 的關係。



如右圖，取 B(1,0)，D(x,0)。



則$\overline{OB}=1$，$\overline{AB}=2$，$\overline{OD}=x$，$\overline{CD}=y$。

由 AA 相似性質可知△COD~△AOB，

因此 $\overline{CD}：\overline{AB}=\overline{OD}：\overline{OB}$ (對應邊成比例)

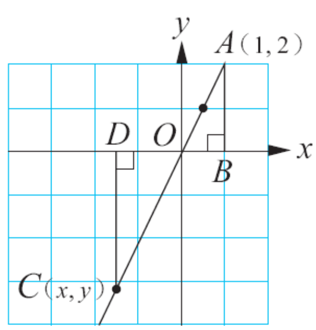
即 y：2=x：1

所以 y=2x。

P. 123 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，A 坐標為(1,2)，在第三象限取$\overleftrightarrow{OA}$上任一點 C，設其坐標為(x,y)，求 y 與 x 的關係。（注意：$\overline{OD}=-x$，$\overline{CD}=-y$）



$\overline{OB}=1$，$\overline{AB}=2$，$\overline{OD}=-x$，$\overline{CD}=-y$。

由 AA 相似性質可知△COD~△AOB，

因此 $\overline{CD}：\overline{AB}=\overline{OD}：\overline{OB}$ (對應邊成比例)

即　-y：2=-x：1
所以　y=2x。

P. 124 例 2

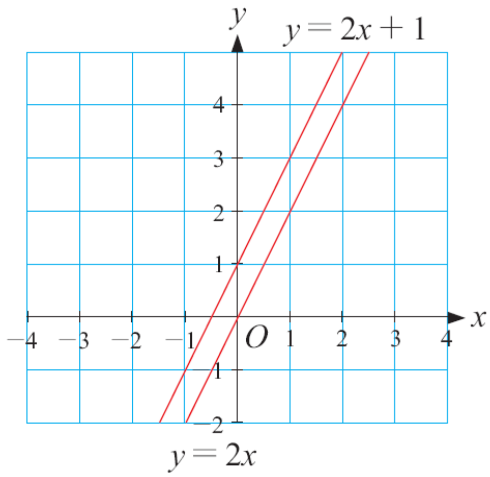
此題無法直接使用 Maxima 軟體

說明 y=2x+1 的圖形是一條直線。
要說明 y=2x+1 的圖形是直線，我們可以比較 y=2x+1 的圖形和另一個函數 y=2x 圖形的關係，如下表：

x	y=2x	y=2x+1 圖形的點
-2	(-2,-4)	(-2,-4+1)
-1	(-1,-2)	(-1,-2+1)
0	(0,0)	(0,0+1)
1	(1,2)	(1,2+1)
2	(2,4)	(2,4+1)

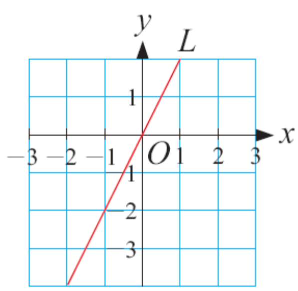
(%i1) f(x):=y=2*x;　※「f(變數):=函數式」指令表示定義函數式，輸入 f(x):=y=2*x → ctrl+enter。
(%o1) f(x):=y=2*x
(%i2) f(-2);　※「f(數值)」指令表示將數值代入函數式，輸入 f(-2) → ctrl+enter。
(%o2) y=-4
(%i3) f(-1);　※「f(數值)」指令表示將數值代入函數式，輸入 f(-1) → ctrl+enter。
(%o3) y=-2
(%i4) f(0);　※「f(數值)」指令表示將數值代入函數式，輸入 f(0) → ctrl+enter。
(%o4) y=0
(%i5) f(1);　※「f(數值)」指令表示將數值代入函數式，輸入 f(1) → ctrl+enter。
(%o5) y=2
(%i6) f(2);　※「f(數值)」指令表示將數值代入函數式，輸入 f(2) → ctrl+enter。
(%o6) y=4

由上面列表的方式，可以知道 y=2x+1 圖形上任一點，是由 y=2x 圖形上的一點上移一個單位，例如(1,2+1)是(1,2)往上移一個單位。因此 y=2x+1 的圖形是將 y=2x 的圖形上移一個單位。但例 1 已說明 y=2x 的圖形是一條通過(0,0)和(1,2)的直線。因此 y=2x+1 的圖形也是一條直線，如右圖：



P. 125 隨堂練習

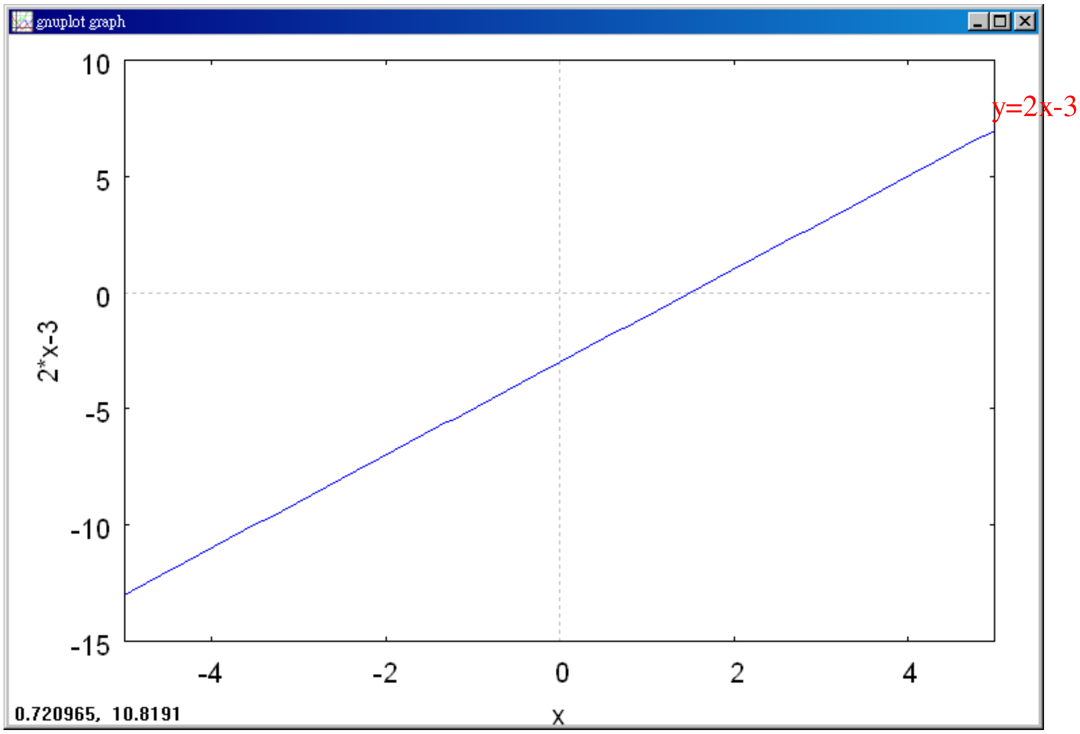
如右圖，直線 L 是函數 y=2x 的圖形，試利用 L 畫出 y=2x-3 的圖形。



(%i1) plot2d([2*x-3],[x,-5,5]);

※「plot2d([縱軸 y(函數)], [橫軸 x(x,x 值範圍最小值, x 值範圍最大值)])」指令表示畫 2d 坐標圖，輸入 plot2d([2*x-3],[x,-5,5]) → ctrl+enter。(註：x 自行取值即可。)

(%o1)

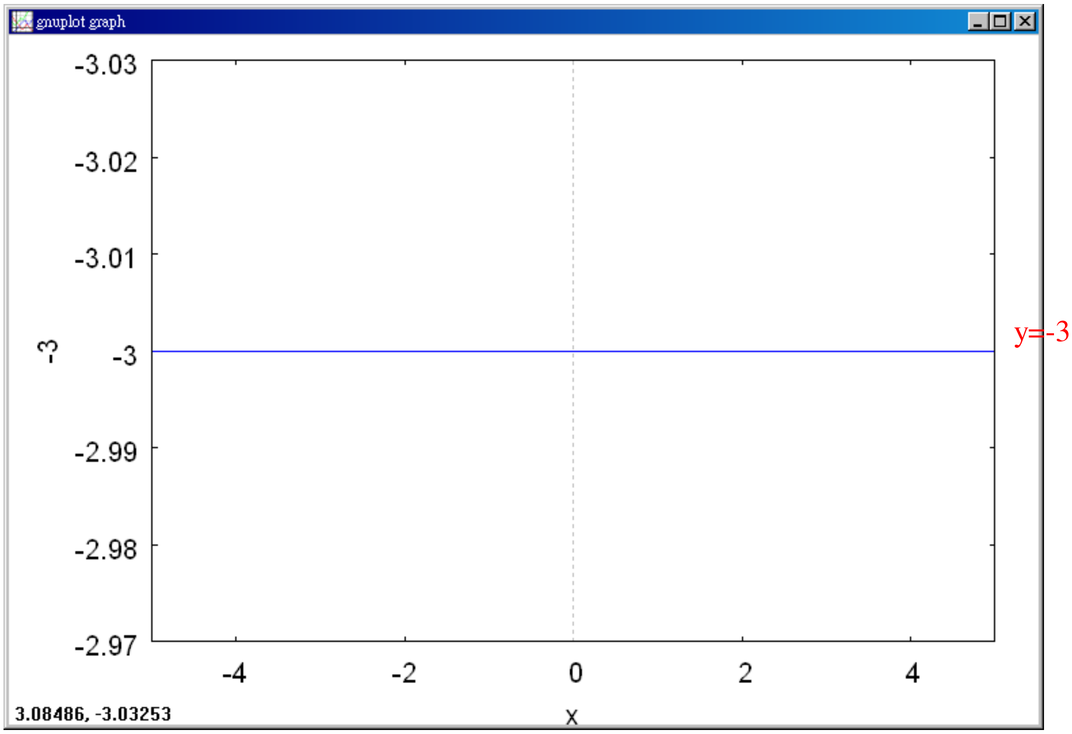


P. 125 隨堂練習

試在坐標平面上畫出 y=-3 的圖形。

(%i1) plot2d(-3,[x,-5,5]); ※「plot2d([縱軸 y(函數)], [橫軸 x(x,x 值範圍最小值, x 值範圍最大值)])」指令表示畫 2d 坐標圖，輸入 plot2d(-3,[x,-5,5]) → ctrl+enter。(註：x 自行取值即可。)

(%o1)



P. 126 例 3

此題無法直接使用 Maxima 軟體

下列各函數中，哪些是二次函數？

(1)y=x+1 (2)$y=-x^2$ (3)$y=(x-1)^2$ (4)$y=\frac{1}{x^2}$

(1)y 是 x 的一次函數，不是 x 的二次函數。
(2)因爲$-x^2$是 x 的二次多項式，所以 $y=-x^2$是 x 的二次函數。
(3)因爲$(x-1)^2$是 x 的二次多項式，所以 $y=(x-1)^2$是 x 的二次函數。
(4)當 $x\neq 0$ 時，符號$\frac{1}{x^2}$表示 $1\div x^2$。因爲$\frac{1}{x^2}$不是 x 的二次多項式，所以 $y=\frac{1}{x^2}$不是 x 的二次函數。

P. 126 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

下列各函數中，哪些是二次函數？

(1)$y=x-x^2$　(2)$y=3$　(3)$y=1-(x+2)^2$　(4)$y=\frac{1}{x}$

(1)因為$-x^2$是 x 的二次多項式，所以 $y=x-x^2$是 x 的二次函數。
(2)x=0，因此，y=3 不是二次函數。
(3)因為$-(x+2)^2$是 x 的二次多項式，所以 $y=1-(x+2)^2$是 x 的二次函數。
(4)當 $x\neq 0$ 時，符號$\frac{1}{x}$表示 $1\div x$。因為$\frac{1}{x}$不是 x 的二次多項式，所以 $y=\frac{1}{x}$不是 x 的二次函數。

P. 126 例 4

若 $y=(x-1)^2$，試完成下表：

x	-2	-1	0	1	2
y	9	4	1	0	1

(%i1) f(x):=y=(x-1)^2;　※「f(變數):=函數式」指令表示定義函數式，輸入 f(x):=y=(x-1)^2 → ctrl+enter。
(%o1) f(x):=y=(x-1)^2
(%i2) f(-2);　※「f(數值)」指令表示將數值代入函數式，輸入 f(-2) → ctrl+enter。
(%o2) y=9
(%i3) f(-1);　※「f(數值)」指令表示將數值代入函數式，輸入 f(-1) → ctrl+enter。
(%o3) y=4
(%i4) f(0);　※「f(數值)」指令表示將數值代入函數式，輸入 f(0) → ctrl+enter。
(%o4) y=1
(%i5) f(1);　※「f(數值)」指令表示將數值代入函數式，輸入 f(1) → ctrl+enter。
(%o5) y=0
(%i6) f(2);　※「f(數值)」指令表示將數值代入函數式，輸入 f(2) → ctrl+enter。
(%o6) y=1

P. 127 隨堂練習

在下列空格填入適當的數使得該數對滿足 $y=x^2+1$。
(%i1) f(x):=y=x^2+1;　※「f(變數):=函數式」指令表示定義函數式，輸入 f(x):=y=x^2+1 → ctrl+enter。
(%o1) f(x):=y=x^2+1
(1)(-1,_2_)
(%i2) f(-1);　※「f(數值)」指令表示將數值代入函數式，輸入 f(-1) → ctrl+enter。
(%o2) y=2

(2)(0,_1_)

(%i3) f(0); ※「f(數值)」指令表示將數值代入函數式，輸入 f(0) → ctrl+enter。

(%o3) y=1

(3)(1,_2_)

(%i4) f(1); ※「f(數值)」指令表示將數值代入函數式，輸入 f(1) → ctrl+enter。

(%o4) y=2

P. 127 例 5

若數對(1,-2)滿足 $y=-x^2+c$，求 c。

(%i1) solve([-2=-1^2+c], [c]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([-2=-1^2+c], [c]) → ctrl+enter。

(%o1) [c=-1]

P. 127 隨堂練習

若數對(0,2)和(1,-2)滿足 $y=ax^2+b$，求 a 和 b。

$$\begin{cases} 2=b \\ -2=a+b \end{cases}$$

(%i1) (%i1) solve([2=b,-2=a+b], [a,b]); ※「solve([變數算式,變數算式], [變數, 變數])」指令表示求解，輸入 solve([2=(a*0)^2+b,-2=(a*1)^2+b], [a,b]) → ctrl+enter。

(%o1) [[a=-4,b=2]];

P. 129 隨堂練習

若 $y=\frac{1}{2}x^2$，試完成下表，並畫出對應的折線圖。

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{9}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$

(%i1) f(x):=y=(1/2)*x^2; ※「f(變數):=函數式」指令表示定義函數式，輸入 f(x):=y=(1/2)*x^2 → ctrl+enter。

(%o1) f(x):=y=1/2*x^2

(%i2) f(-3); ※「f(數值)」指令表示將數值代入函數式，輸入 f(-3) → ctrl+enter。

(%o2) $y=\frac{9}{2}$

(%i3) f(-2); ※「f(數值)」指令表示將數值代入函數式，輸入 f(-2) → ctrl+enter。

(%o3) y=2

(%i4) f(-1); ※「f(數值)」指令表示將數值代入函數式，輸入 f(-1) → ctrl+enter。

(%o4) $y=\frac{1}{2}$

(%i5) f(0); ※「f(數值)」指令表示將數值代入函數式，輸入 f(0) → ctrl+enter。

(%o5) y=0

(%i6) f(1); ※「f(數值)」指令表示將數值代入函數式，輸入 f(1) → ctrl+enter。

(%o6) $y=\frac{1}{2}$

(%i7) f(2); ※「f(數值)」指令表示將數值代入函數式，輸入 f(2) → ctrl+enter。

(%o7) y=2

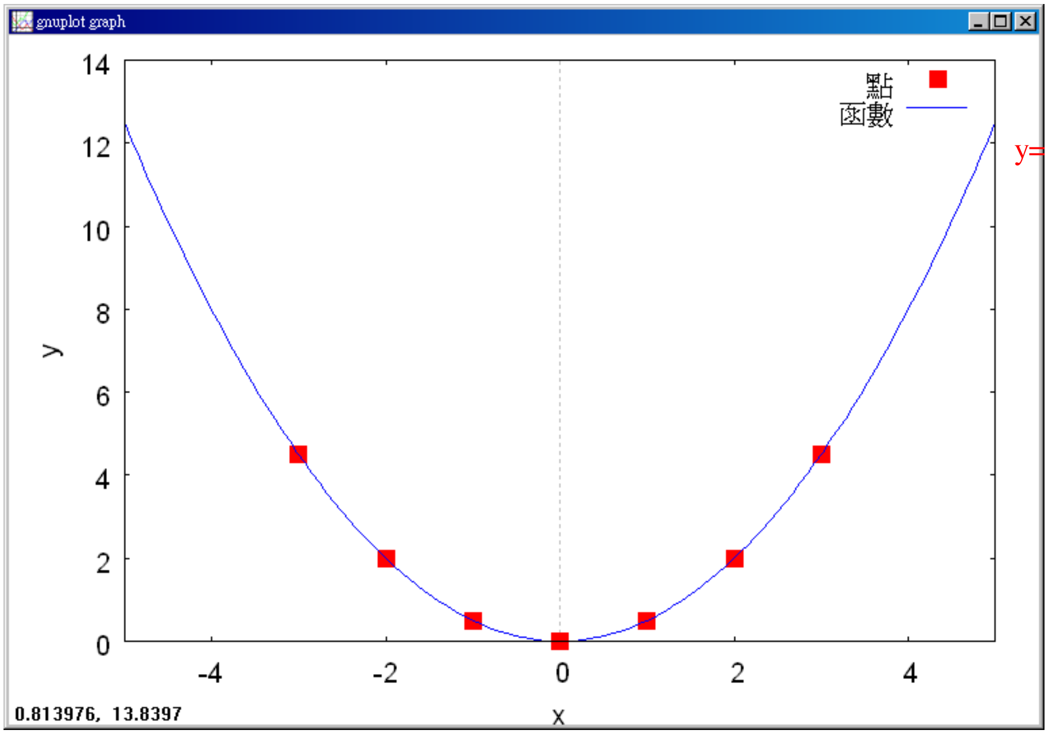
(%i8) f(3); ※「f(數值)」指令表示將數值代入函數式，輸入 f(3) → ctrl+enter。

(%o8) $y=\frac{9}{2}$

```
(%i1) plot2d([[discrete,xy:[[-3,9/2],[-2,2],[-1,1/2],[0,0],[1,1/2],[2,2],[3,9/2]]],
(1/2)*x^2], [x,-5,5],
        [style, [points,5,2,6], [lines,1,1]],
        [legend,"點","函數"],
        [xlabel,"x"], [ylabel,"y"]);
```

※「plot2d([[discrete,xy [(各點坐標)[坐標 1],[坐標 2],[坐標 3]]], 函數式], [橫軸 x(x,x 值範圍最小值, x 值範圍最大值)], [style, [(點的格式)points,大小,顏色,形狀], [(線的格式)lines,粗細,顏色]],[(命名)legend, "對點的命名","對線的命名"],[xlabel, "x 軸命名"][ylabel, "y 軸命名"])」指令表示畫 2d 坐標圖，輸入 plot2d([[discrete,xy:[[-3,9/2],[-2,2],[-1,1/2],[0,0],[1,1/2],[2,2],[3,9/2]]], (1/2)*x^2], [x,-5,5],[style, [points,5,2,6], [lines,1,1]],[legend,"點","函數"],[xlabel,"x"], [ylabel,"y"])。(註：x 自行取值即可。)

(%o1)



$y=\frac{1}{2}x^2$

P. 129 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

(1)$y=\frac{1}{2}x^2$ 上的點$(\frac{1}{2},\frac{1}{8})$對 y 軸的對稱點坐標是多少？這個點在 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的圖形上嗎？

$(\frac{1}{2},\frac{1}{8})$對 y 軸的對稱點坐標爲$(-\frac{1}{2},\frac{1}{8})$。這個點會在 $y=\frac{1}{2}x^2$ 圖形上。

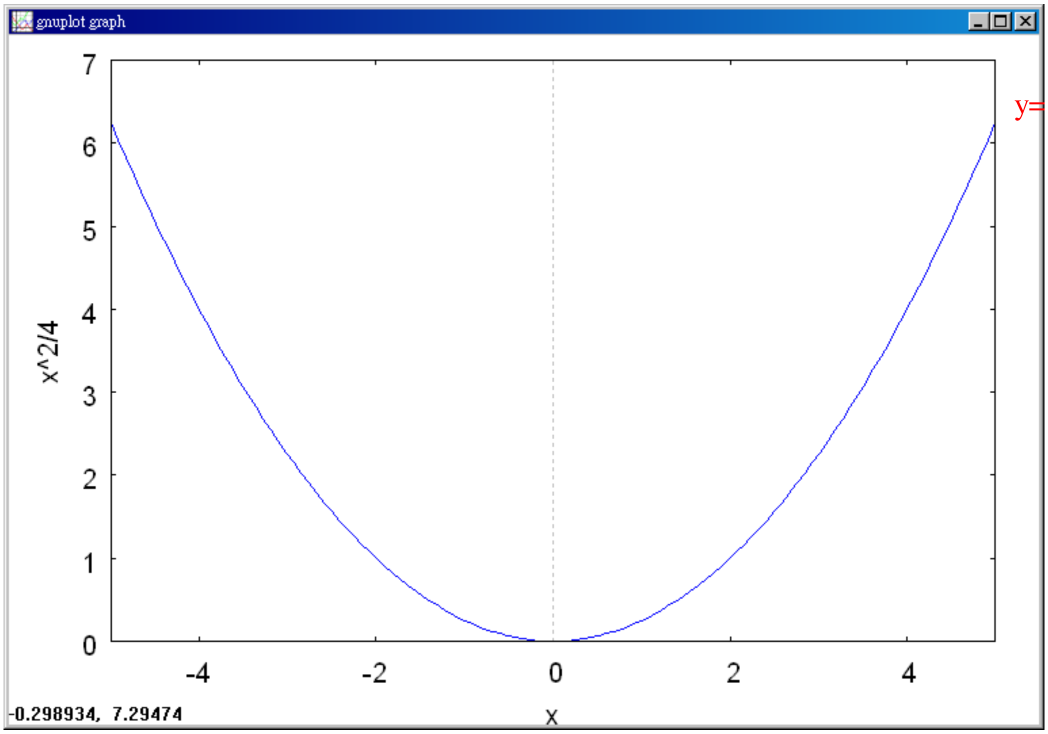
P. 131 例 6

畫出 $y=\frac{1}{4}x^2$ 的圖形。

(%i1) plot2d([(1/4)*x^2],[x,-5,5]);

※「plot2d([縱軸 y(函數)], [橫軸 x(x,x 值範圍最小值, x 值範圍最大值)])」指令表示畫 2d 坐標圖，輸入 plot2d([(1/4)*x^2],[x,-5,5]) → ctrl+enter。(註：x 自行取值即可。)

(%o1)



$y=\frac{1}{4}x^2$

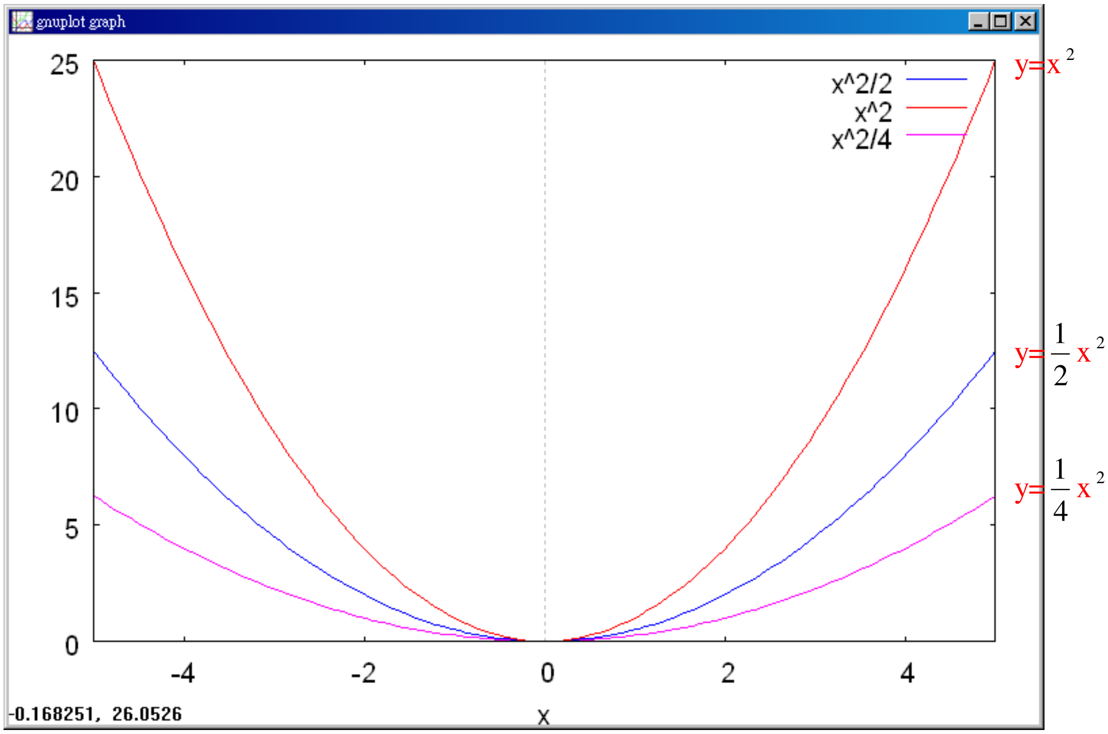
P. 132 隨堂練習

在下麵的坐標平面上，畫出 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的圖形，並和 $y=x^2$、$y=\frac{1}{4}x^2$ 的圖形做比較。

(%i1) plot2d([(1/2)*x^2,x^2,(1/4)*x^2],[x,-5,5]);

※「plot2d([(直接輸入三個 y 函數)縱軸 y1(函數),縱軸 y2(函數),縱軸 y3(函數)], [橫軸 x(x,x 值範圍最小值, x 值範圍最大值)])」指令表示畫 2d 坐標圖，輸入 plot2d([(1/2)*x^2,x^2,(1/4)*x^2],[x,-5,5]) → ctrl+enter。(註：x 自行取值即可。)

(%o1)



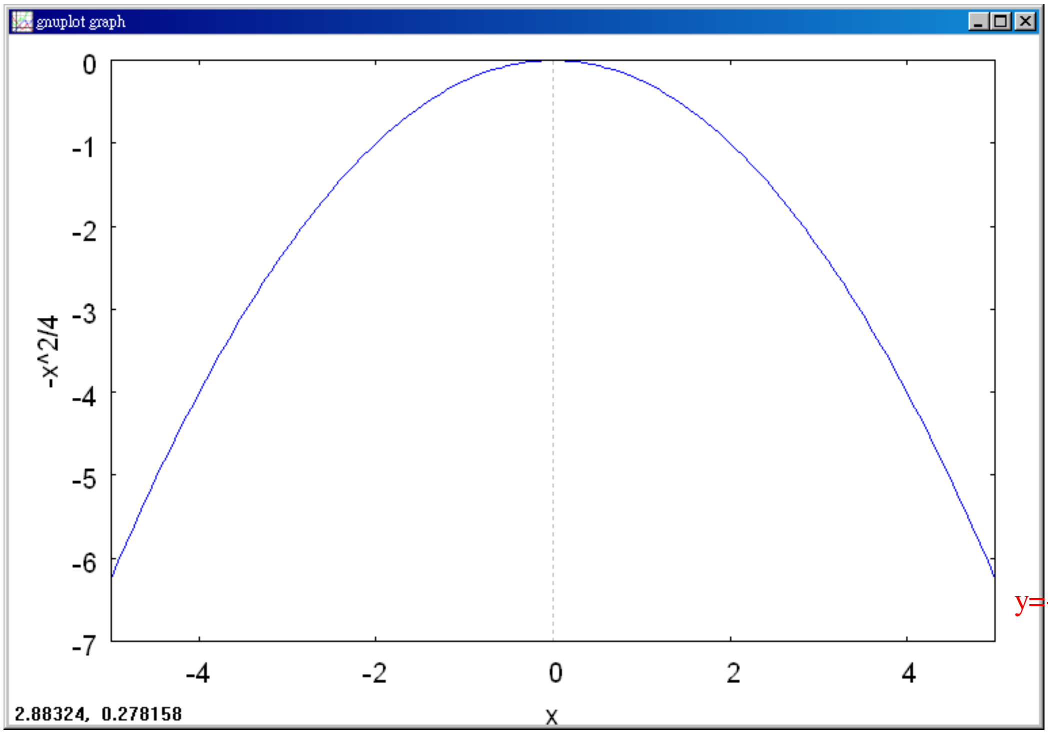
P. 133 例 7

畫出 $y=-\frac{1}{4}x^2$ 的圖形。

(%i1) plot2d([-(1/4)*x^2],[x,-5,5]);

※「plot2d([縱軸 y(函數)], [橫軸 x(x,x 值範圍最小值, x 值範圍最大值)])」指令表示畫 2d 坐標圖，輸入 plot2d([-(1/4)*x^2],[x,-5,5]) → ctrl+enter。(註：x 自行取值即可。)

(%o1)



$y=-\frac{1}{4}x^2$

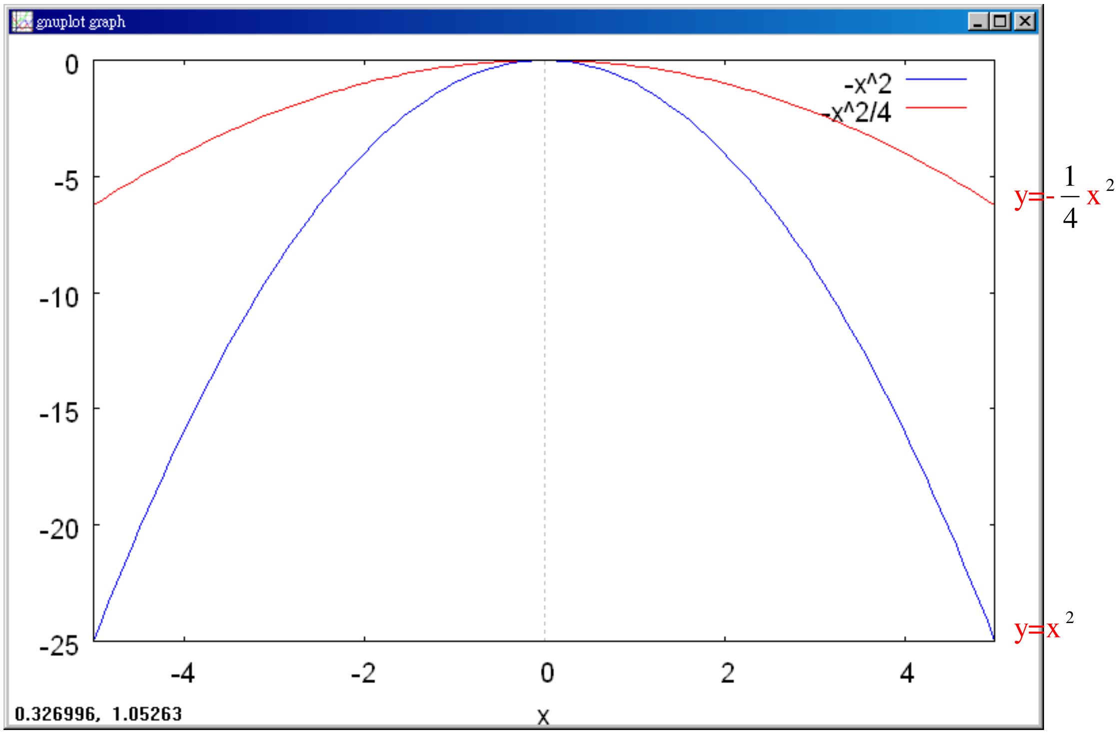
P. 133 隨堂練習

在右邊的坐標平面上，畫出 $y=-x^2$ 的圖，並和 $y=-\frac{1}{4}x^2$ 的圖形做比較。

(%i1) plot2d([-x^2,-(1/4)*x^2],[x,-5,5]);

※「plot2d([(直接輸入兩個 y 函數)縱軸 y1(函數),縱軸 y2(函數)], [橫軸 x(x,x 值範圍最小值, x 值範圍最大值)])」指令表示畫 2d 坐標圖，輸入 plot2d([-x^2,-(1/4)*x^2],[x,-5,5]) → ctrl+enter。(註：x 自行取值即可。)

(%o1)



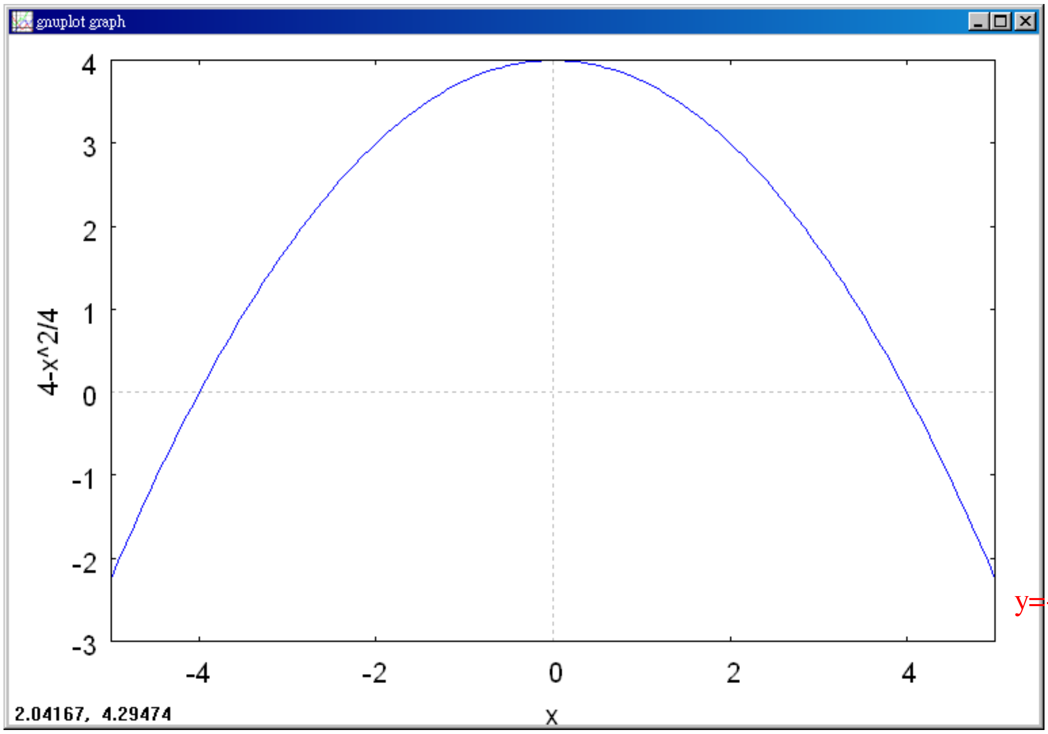
P. 134 例 8

畫出 $y=-\frac{1}{4}x^2+4$ 的圖形。

(%i1) plot2d([-(1/4)*x^2+4],[x,-5,5]);

※「plot2d([縱軸 y(函數)], [橫軸 x(x,x 值範圍最小值, x 值範圍最大值)])」指令表示畫 2d 坐標圖，輸入 plot2d([-(1/4)*x^2+4],[x,-5,5]) → ctrl+enter。(註：x 自行取值即可。)

(%o1)



$y=-\frac{1}{4}x^2+4$

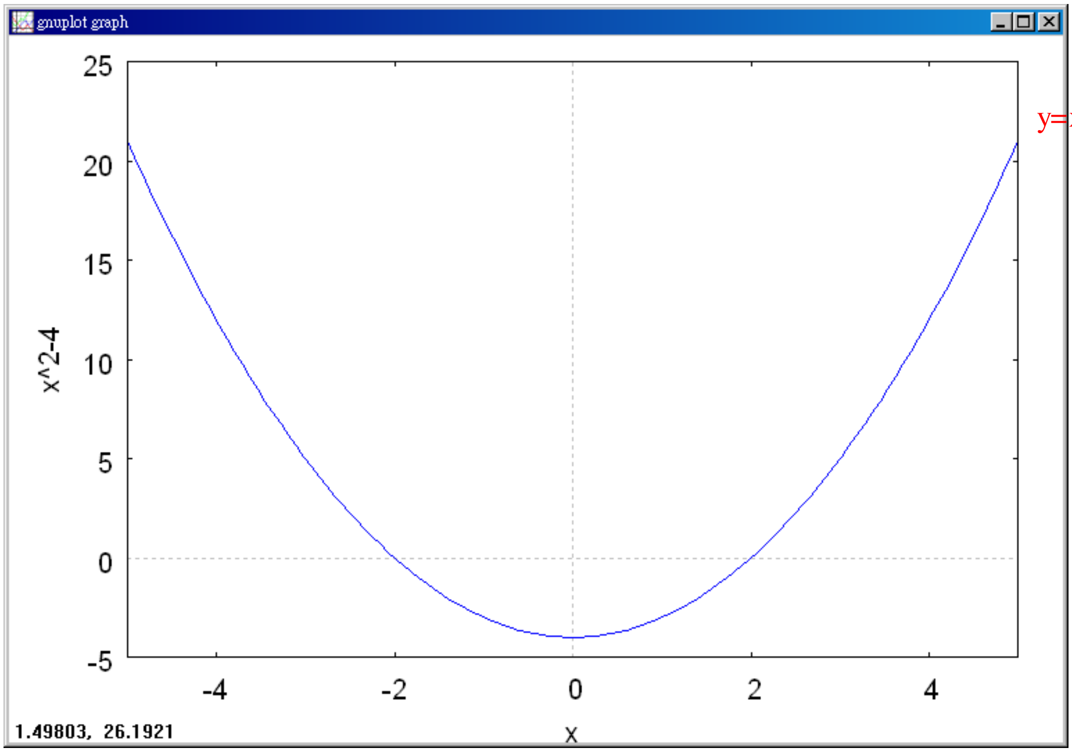
P. 136 隨堂練習

畫出 $y=x^2-4$ 的圖形，並求其最低點的坐標。

(%i1) plot2d([x^2-4],[x,-5,5]);

※「plot2d([縱軸 y(函數)], [橫軸 x(x,x 值範圍最小值, x 值範圍最大值)])」指令表示畫 2d 坐標圖，輸入 plot2d([x^2-4],[x,-5,5]) → ctrl+enter。(註：x 自行取值即可。)

(%o1)



$y=x^2-4$

最低點坐標令 x=0，

(%i1) f(x):=y=x^2-4; ※「f(變數):=函數式」指令表示定義函數式，輸入 f(x):=y=x^2-4 → ctrl+enter。

(%o1) f(x):=y=x^2-4

(%i2) f(0); ※「f(數值)」指令表示將數值代入函數式，輸入 f(0) → ctrl+enter。

(%o2) y=-4

因此，最低點坐標為(0,-4)。

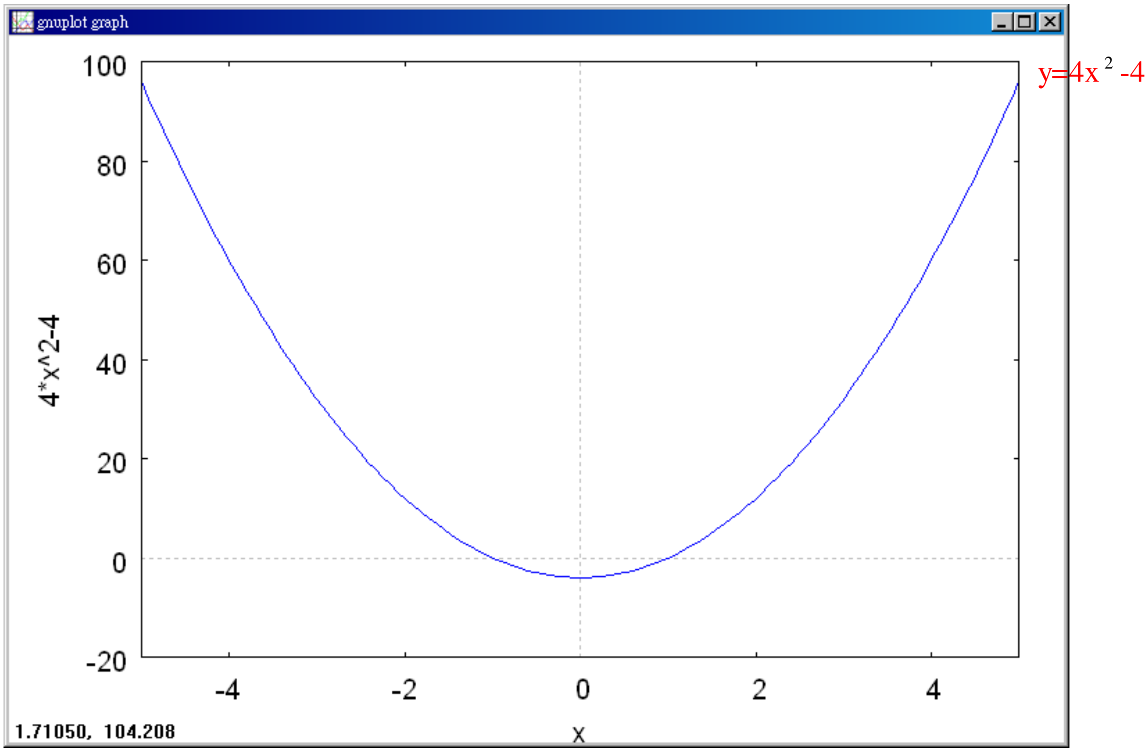
P. 136 隨堂練習

試求出下列二次函數的最高點或最低點的坐標。

(1)$y=4x^2-4$

(%i1) plot2d([4*x^2-4],[x,-5,5]); ※「plot2d([縱軸 y(函數)], [橫軸 x(x,x 值範圍最小值, x 值範圍最大值)])」指令表示畫 2d 坐標圖，輸入 plot2d([4*x^2-4],[x,-5,5]) → ctrl+enter。(註：x 自行取值即可。)

(%o1)



此圖有最低點坐標，最低點坐標令 x=0，

(%i1) f(x):=y=4*x^2-4;　※「f(變數):=函數式」指令表示定義函數式，輸入 f(x):=y=4*x^2-4 → ctrl+enter。

(%o1) f(x):=y=4*x^2-4

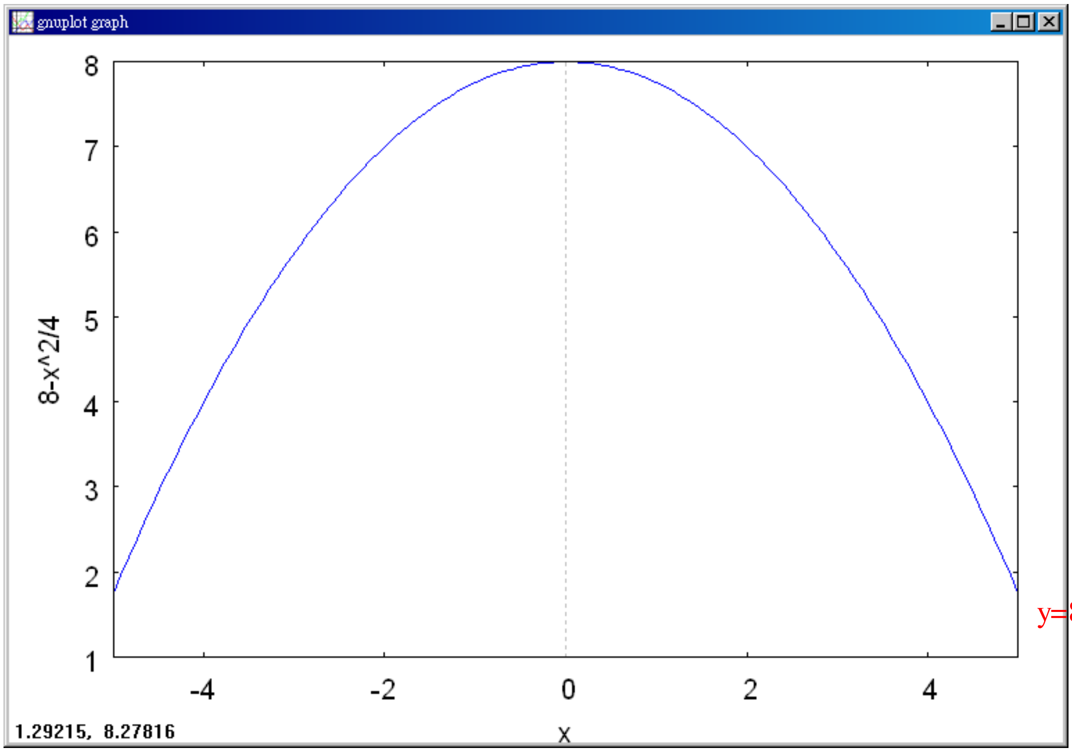
(%i2) f(0);　※「f(數值)」指令表示將數值代入函數式，輸入 f(0) → ctrl+enter。

(%o2) y=-4

(2)y=8-$\frac{x^2}{4}$

(%i1) plot2d([8-x^2/4],[x,-5,5]);　※「plot2d([縱軸 y(函數)], [橫軸 x(x,x 值範圍最小值, x 值範圍最大值)])」指令表示畫 2d 坐標圖，輸入 plot2d([8-x^2/4],[x,-5,5]) → ctrl+enter。(註：x 自行取值即可。)

(%o1)



$y=8-\dfrac{x^2}{4}$

此圖有最高點，最高點坐標令 x=0，

(%i1) f(x):=y=8-(x^2/4); ※「f(變數):=函數式」指令表示定義函數式，輸入 f(x):=y=8-(x^2/4) → ctrl+enter。

(%o1) f(x):=y=8-x^2/4

(%i2) f(0); ※「f(數值)」指令表示將數值代入函數式，輸入 f(0) → ctrl+enter。

(%o2) y=8

P. 137 例 9

圖 3-4 中的籃球軌跡可以用 $y=-\dfrac{1}{4}x^2+4$ 來表示。

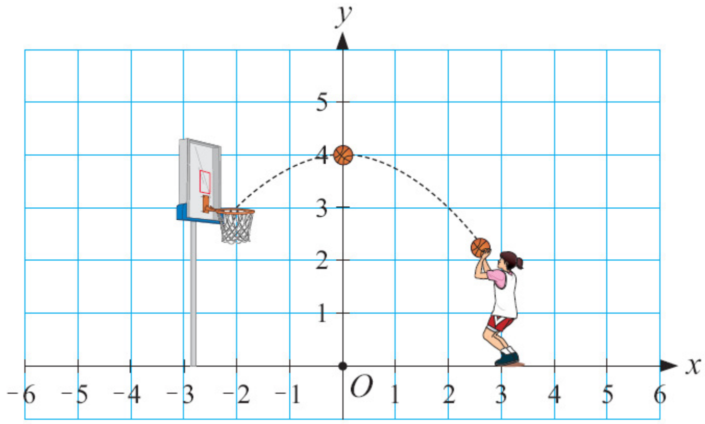


圖 3-4

(1)若 x=$\frac{1}{2}$，求此時籃球的高度。

(%i1) solve([y=-1/4*(1/2)^2+4], [y]);

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([y=-1/4*(1/2)^2+4], [y]) → ctrl+enter。

(%o1) [y=$\frac{63}{16}$]

(2)當籃球高度為$3\frac{1}{2}$時，求 x。

(%i2) solve([3+1/2=-1/4*x^2+4], [x]);

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([3+1/2=-1/4*x^2+4], [x]) → ctrl+enter。

(%o2) [x=-$\sqrt{2}$,x=$\sqrt{2}$]

P. 138 隨堂練習

有一二次函數 y=2x^2+1，

(1)若 x=-$\frac{1}{3}$，求 y。

(%i1) solve([y=2*(-1/3)^2+1], [y]);

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([y=2*(-1/3)^2+1], [y]) → ctrl+enter。

(%o1) [y=$\frac{11}{9}$]

(2)若 y=4，求 x。

(%i2) solve([4=2*x^2+1], [x]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([4=2*x^2+1], [x]) → ctrl+enter。

(%o2) $[x=-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}},x=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}]$

P. 138 例 10

應用問題 Maxima 軟體無法直接解

圖 3-5 是美華和廷聰打排球時，排球過網的路徑圖，並畫在坐標平面上。

(1)求排球在行進中的最高點坐標。

(2)若此拋物線是 $y=ax^2+6$ 的圖形，求 a。

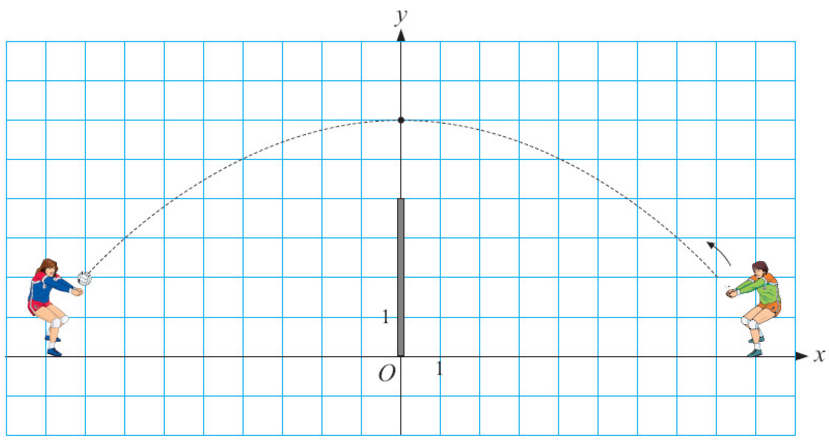


圖3-5

(1)由圖 3-5 可知，排球在行進中最高的點是(0,6)。

(2)由圖 3-5，排球是在(8,2)點擊出，代入 $y=ax^2+6$，得 $2=a\cdot 8^2+6$，

(%i1) solve([2=a*8^2+6], [a]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([2=a*8^2+6], [a]) → ctrl+enter。

(%o1) $[a=-\frac{1}{16}]$

P. 139 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

若某拋物線是 $y=ax^2+c$ 的圖形，且其最低點是(0,5)，並通過(2,10)，求 a 和 c。

$$\begin{cases} 5=a\cdot 0^2+c \\ 10=a\cdot 2^2+c \end{cases}$$

(%i1) solve([5=a*0^2+c,10=a*2^2+c], [a,c]);

※「solve([變數算式,變數算式], [變數,變數])」指令表示求解，輸入 solve([5=a*0^2+c,10=a*2^2+c], [a,c]) → ctrl+enter。

(%o1) [[a=$\frac{5}{4}$,c=5]]

P. 141 3-1 自我評量

此題無法直接使用 Maxima 軟體

1.下列敘述，將正確的打「○」，錯誤的打「X」。

(X)(1)因爲 y=$\frac{1}{x^2+1}$中有二次多項式，所以 y=$\frac{1}{x^2+1}$是二次函數。

(○)(2)y=2x-1-x^{2}不是二次函數。

(X)(3)y=x^2+10 的圖形有最高點，其坐標爲(0,10)。

(X)(4)y=-4x^2-1 的圖形有最低點，其坐標爲(0,-1)。

(X)(5)y=x^2+4 的圖形是對稱於 y 軸的線對稱圖形。

(○)(6)y=-x^{2}的圖形是對稱於 x 軸的線對稱圖形。

此題無法直接使用 Maxima 軟體

2.(1)求 y=8 與 y=2x^{2}圖形交點 A、B 的坐標，並求 $\overline{AB}$ 。

$$\begin{cases} y=8 \\ y=2x^2 \end{cases}$$

(%i1) solve([y=8,y=2*x^2], [x,y]);

※「solve([變數算式,變數算式], [變數,變數])」指令表示求解，輸入 solve([y=8,y=2*x^2], [x,y]) → ctrl+enter。

(%o1) [[x=2,y=8],[x=-2,y=8]]

交點分別爲 A(2,8)與 B(-2,8)，

$\overline{AB}=\sqrt{(2-(-2))^2+(8-8)^2}$ =4

(%i2) sqrt((2-(-2))^2+(8-8)^2);

※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 sqrt((2-(-2))^2+(8-8)^2) → ctrl+enter。

(%o2) 4

(2)求 y=8 與 y=$\frac{1}{2}x^2$ 圖形交點 C、D 的坐標，並求 $\overline{CD}$。

$$\begin{cases} y=8 \\ y=\frac{1}{2}x^2 \end{cases}$$

(%i1) solve([y=8,y=(1/2)*x^2], [x,y]); ※「solve([變數算式,變數算式], [變數,變數])」指令表示求解，輸入 solve([y=8,y=(1/2)*x^2], [x,y]) → ctrl+enter。

(%o1) [[x=-4,y=8],[x=4,y=8]]

交點分別爲 C(-4,8)與 D(4,8)，

$\overline{CD}=\sqrt{(-4-4)^2+(8-8)^2}$ =8

(%i2) sqrt((-4-4)^2+(8-8)^2); ※「sqrt(算式)」指令表示求開根號，輸入 sqrt((-4-4)^2+(8-8)^2) → ctrl+enter。

(%o2) 8

(3)比較 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 的大小。

$\overline{AB}$ =4； $\overline{CD}$ =8，

(%i1) compare(4,8); ※「compare(數值,數值)」指令表示展開算式，輸入 compare(4,8) → ctrl+enter。

(%o1) <

因此，$\overline{AB}<\overline{CD}$。

此題無法直接使用 Maxima 軟體

3.求下列各點對 y 軸的對稱點。

(1)A(2,2)

A(2,2)對 y 軸的對稱點爲(-2,-2)。

(2)B(-3,-3)

B(-3,-3)對 y 軸的對稱點爲(3,3)。

(3)C(a,b)

C(a,b)對 y 軸的對稱點爲(-a,-b)。

第 3 章 二次函數 3-2 配方法與拋物線

P. 142 隨堂練習

當 x=4、2、0 時，求出滿足 $y=-\frac{1}{4}(x-2)^2+4$ 的數對，這些數對會落在圖 3-6 的拋物線上嗎？

(%i1) f(x):=y=(-1/4)*(x-2)^2+4; ※「f(變數):=函數式」指令表示定義函數式，輸入 f(x):=y=(-1/4)*(x-2)^2+4 → ctrl+enter。

(%o1) f(x):=y=(-1)/4*(x-2)^2+4

(%i2) f(4); ※「f(數值)」指令表示將數值代入函數式，輸入 f(4) → ctrl+enter。

(%o2) y=3

(%i3) f(2); ※「f(數值)」指令表示將數值代入函數式，輸入 f(2) → ctrl+enter。

(%o3) y=4

(%i4) f(0); ※「f(數值)」指令表示將數值代入函數式，輸入 f(0) → ctrl+enter。

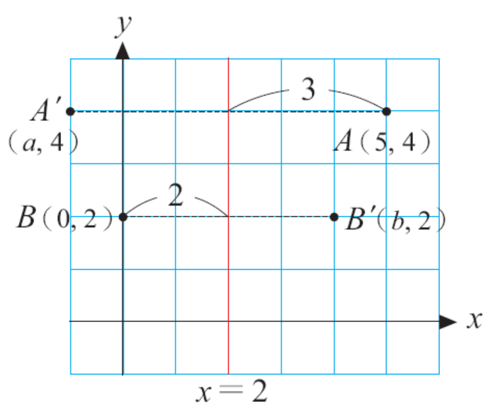
(%o4) y=3

P. 143 例 1

此題無法直接使用 Maxima 軟體

求下列各點對 x=2 的對稱點坐標。

(1)A(5,4) (2)B(0,2)



(1)如圖，因爲是對 x=2 對稱，因此對稱點 A’的 y 坐標和 A 的 y 坐標一樣都等於 4。設 A’坐標爲(a,4)，由於 A’位於 x=2 的左側，故 a<2。由於 A、A’互爲對稱點，因此 A 到 x=2 的距離等於 A’到 x=2 的距離，

所以 5-2=2-a，

(%i1) solve([5-2=2-a], [a]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([5-2=2-a], [a]) → ctrl+enter。

(%o1) [a=-1]

因此，A’爲(-1,4)。
(2)如圖，設 B(0,2)對 x=2 的對稱點爲 B’(b,2)，其中 b>2。
由於 B 到 x=2 的距離等於 B’到 x=2 的距離，
所以 2-0=b-2，
(%i2) solve([2-0=b-2], [b]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([2-0=b-2], [b]) → ctrl+enter。
(%o2) [b=4]
因此，B’爲(4,2)。

P. 143 隨堂練習

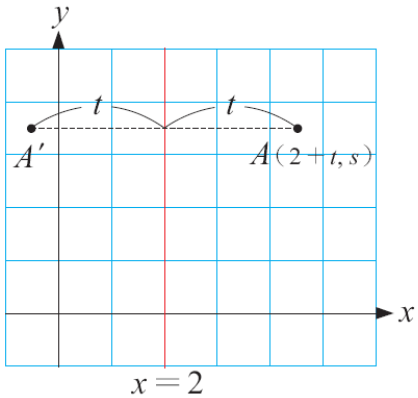
此題無法直接使用 Maxima 軟體

求下列各點對 x=-3 的對稱點坐標。
A(5,4)
因爲是對 x=-3 對稱，因此對稱點 A’的 y 坐標和 A 的 y 坐標一樣都等於 4。
設 A’坐標爲(a,4)，由於 A’位於 x=-3 的左側，故 a<-3。
由於 A、A’互爲對稱點，因此 A 到 x=-3 的距離等於 A’到 x=-3 的距離，
所以 5-(-3)=-3-a，
(%i1) solve([5-(-3)=-3-a], [a]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([5-(-3)=-3-a], [a]) → ctrl+enter。
(%o1) [a=-11]
B(0,3)
因爲是對 x=-3 對稱，因此對稱點 A’的 y 坐標和 A 的 y 坐標一樣都等於 3。
設 B’坐標爲(b,3)，由於 B’位於 x=-3 的左側，故 a<-3。
由於 B、B’互爲對稱點，因此 B 到 x=-3 的距離等於 B’到 x=-3 的距離，
所以 0-(-3)=-3-b，
(%i2) solve([0-(-3)=-3-b], [b]); ※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([0-(-3)=-3-b], [b]) → ctrl+enter。
(%o2) [b=-6]

P. 144 例 2

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如右圖，若 t 爲正數，求 A(2+t,s)對 x=2 的對稱點 A’的坐標。



因為 A'的 y 坐標和 A 的 y 坐標相等，所以可設 A'的坐標為(a,s)。
由於 t>0，所以 A 在 x=2 的右側，因此 A'在 x=2 的左側，得到 a<2。
由於 A 和 A'到 x=2 的距離相等，所以 2+t-2=2-a，得 a=2-t，
因此 A(2+t,s)對 x=2 的對稱點為 A'(2-t,s)。

P. 144 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

試求下列各點對 x=2 的對稱點。

(1)A(8,2)

A'(2-6,2)即(-4,2)。

(2)B($2\frac{1}{2}$,-1)

B'($2-\frac{1}{2}$,-1)即($1\frac{1}{2}$,-1)。

P. 145 例 3

此題無法直接使用 Maxima 軟體

說明 x=2 是 $y=-\frac{1}{4}(x-2)^2$ 圖形的對稱軸。

由於對 x=2 對稱的點，可以寫成(2+t,s)和(2-t,s)的樣子。我們先作一個表觀察一下：

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
x	2-4	2-3	2-2	2-1	2	2+1	2+2	2+3	2+4
y	$-\frac{4^2}{4}$	$-\frac{3^2}{4}$	$-\frac{2^2}{4}$	$-\frac{1^2}{4}$	0	$-\frac{1^2}{4}$	$-\frac{2^2}{4}$	$-\frac{3^2}{4}$	$-\frac{4^2}{4}$

對於一般的情況，

若 x=2+t，則 $y=-\frac{1}{4}((2+t)-2)^2=-\frac{t^2}{4}$ ；

若 x=2-t，則 $y=-\frac{1}{4}((2-t)-2)^2=-\frac{(-t)^2}{4}=-\frac{t^2}{4}$ 。

因此對任意的 t，$(2+t,-\frac{t^2}{4})$和其對稱點$(2-t,-\frac{t^2}{4})$總是落在 $y=-\frac{1}{4}(x-2)^2$ 的圖形上。所以 $y=-\frac{1}{4}(x-2)^2$ 的圖形對稱於 x=2。

也就是說，x=2 爲此圖形的對稱軸。

P. 146 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

仿照上例，說明 x=1 是 $y=(x-1)^2+1$ 圖形的對稱軸。

由於對 x=1 對稱的點，可以寫成(1+t,s)和(1-t,s)的樣子。我們先作一個表觀察一下：

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
x	1-4	1-3	1-2	1-1	1	1+1	1+2	1+3	1+4
y	17	10	5	2	1	2	5	10	17

對於一般的情況，

若 x=1+t，則 $y=((1+t)-1)^2+1=t^2+1$；

若 x=1-t，則 $y=((1-t)-1)^2+1=-(t)^2+1=t^2+1$。

因此對任意的 t，$(1+t,t^2+1)$和其對稱點$(1-t,t^2+1)$總是落在 $y=(x-1)^2+1$ 的圖形上。

所以 $y=(x-1)^2+1$ 的圖形對稱於 x=1。

也就是說，x=1 爲此圖形的對稱軸。

P. 146 例 4

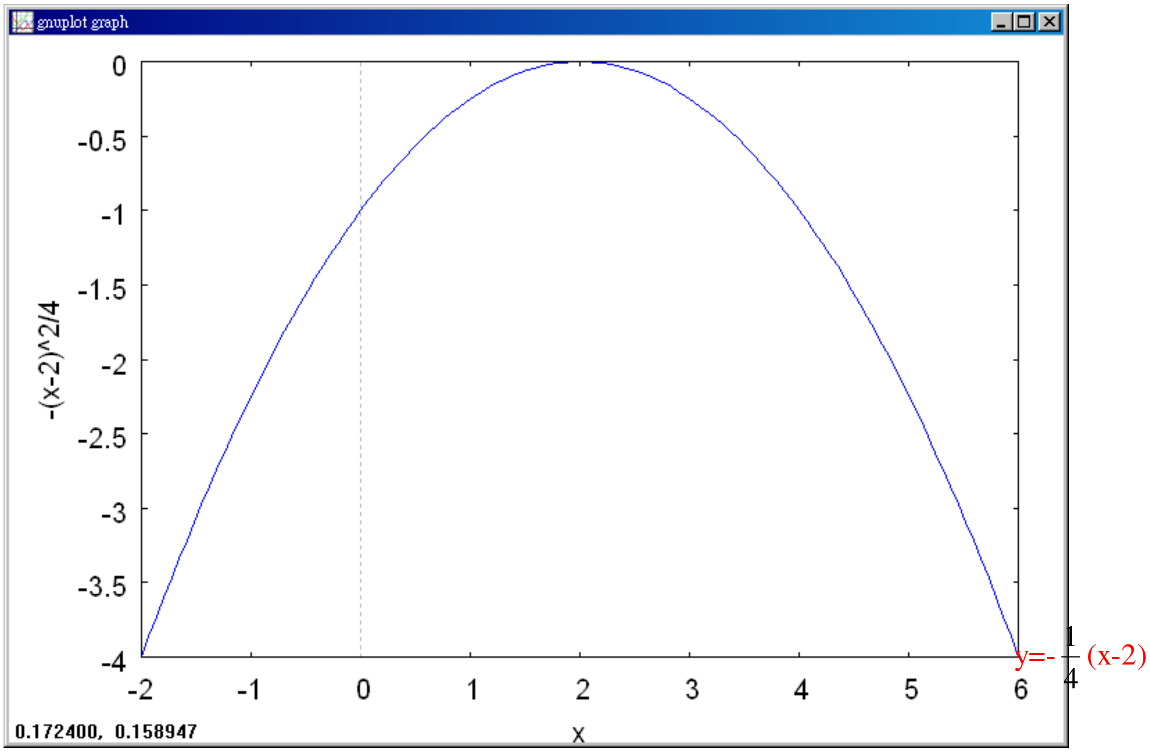
畫出 $y=-\frac{1}{4}(x-2)^2$ 的圖形。

(%i1) plot2d([(-1/4)*(x-2)^2],[x,-2,6]);

※「plot2d([縱軸 y(函數)], [橫軸 x(x,x 值範圍最小值, x 值範圍最大值)])」指令表示畫 2d 坐標圖，輸入 plot2d([(-1/4)*(x-2)^2],[x,-2,6]) → ctrl+enter。(註：x 自行取值即可。)

(%o1)

因此，對稱軸爲 2。



P. 147 隨堂練習

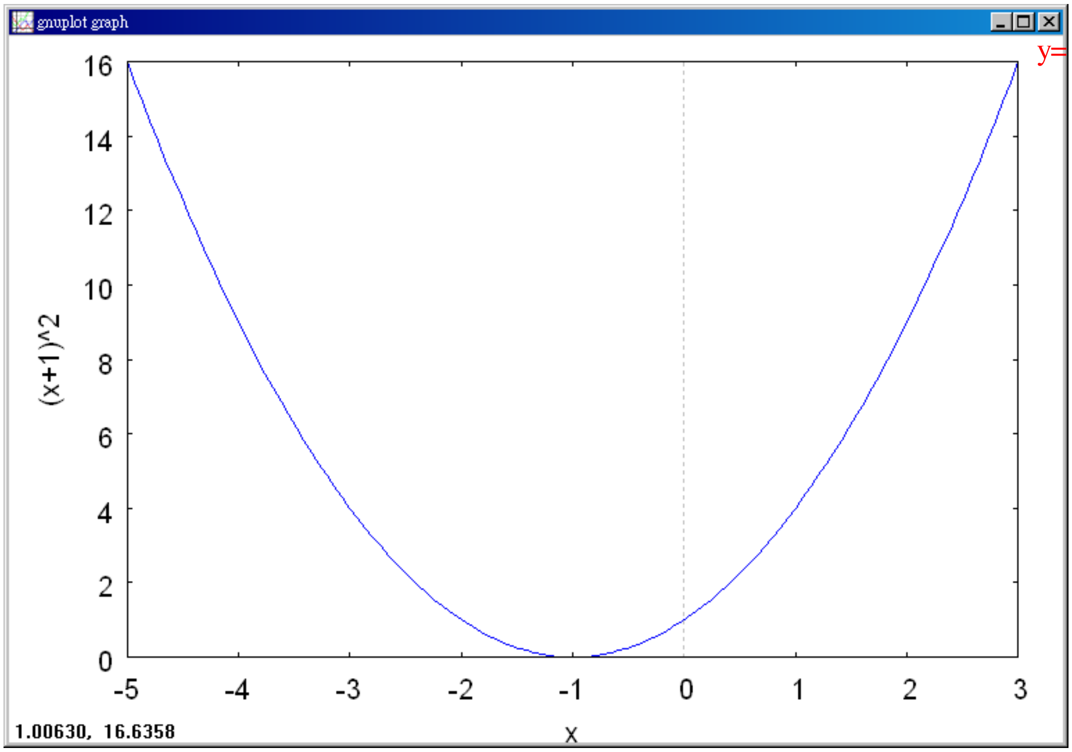
求二次函數 $y=(x+1)^2$ 圖形的對稱軸，並畫出此函數的圖形。

(%i1) plot2d([(x+1)^2],[x,-5,3]);

※「plot2d([縱軸 y(函數)], [橫軸 x(x,x 值範圍最小值, x 值範圍最大值)])」指令表示畫 2d 坐標圖，輸入 plot2d([(x+1)^2],[x,-5,3]) → ctrl+enter。(註：x 自行取值即可。)

(%o1)

因此，對稱軸爲-1。



y= $(x+1)^2$

P. 147 例 5

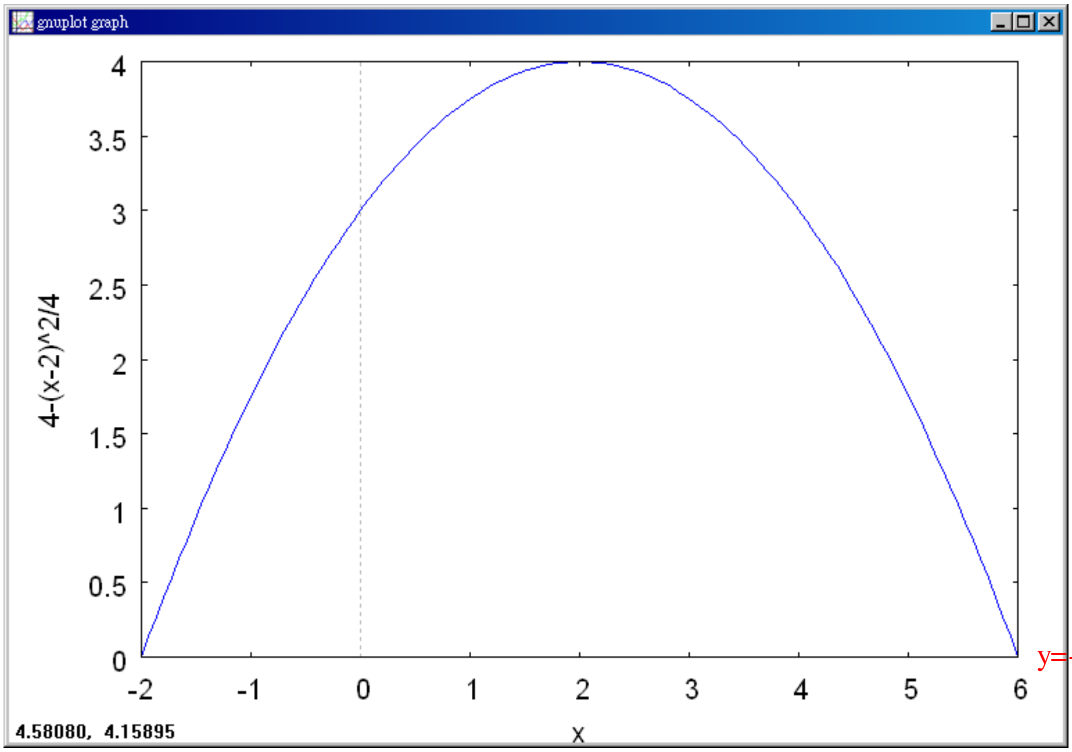
畫出 y=$-\frac{1}{4}(x-2)^2+4$ 的圖形。

(%i1) plot2d([(-1/4)*(x-2)^2+4],[x,-2,6]);

※「plot2d([縱軸 y(函數)], [橫軸 x(x,x 值範圍最小值, x 值範圍最大值)])」指令表示畫 2d 坐標圖，輸入 plot2d([(-1/4)*(x-2)^2+4],[x,-2,6]) → ctrl+enter。(註：x 自行取值即可。)

(%o1)

因此，對稱軸為 2。



$y=-\frac{1}{4}(x-2)^2+4$

P. 148 隨堂練習

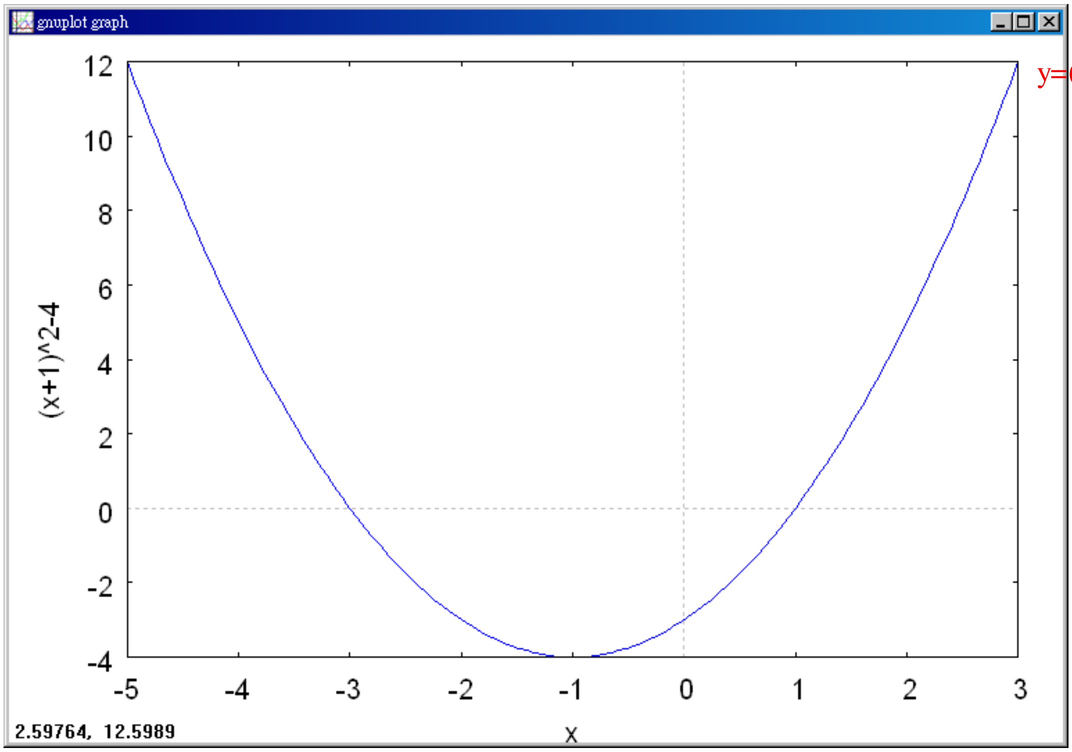
畫出 $y=(x+1)^2-4$ 的圖形。

(%i1) plot2d([(x+1)^2-4],[x,-5,3]);

※「plot2d([縱軸 y(函數)], [橫軸 x(x,x 值範圍最小值, x 值範圍最大值)])」指令表示畫 2d 坐標圖，輸入 plot2d([(x+1)^2-4],[x,-5,3]) → ctrl+enter。(註：x 自行取值即可。)

(%o1)

因此，對稱軸為-1。



$y=(x+1)^2-4$

P. 149 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

★當 a>0 時， $y=a(x-h)^2+k$ 的最低點是(h,k)
★當 a<0 時， $y=a(x-h)^2+k$ 的最高點是(h,k)

(1)求 $y=3(x-\frac{1}{2})^2+5$ 的最低點。

最低點是$(\frac{1}{2},5)$。

(2)求 $y=-100(x+4)^2-10$ 的最高點。
最高點是(-4,-10)

P. 150 例 6

此題無法直接使用 Maxima 軟體

★當 a>0 時， $y=a(x-h)^2+k$ 有最小值 k，此時 x=h。
★當 a<0 時， $y=a(x-h)^2+k$ 有最大值 k，此時 x=h。
試判斷下列函數是否有最大值或最小值，並求其值。

(1)$y=-3(x+\frac{1}{2})^2-5$

有最大值為-5。

(2)$y=\frac{1}{6}(x-2)^2+\frac{3}{4}$

有最小值$\frac{3}{4}$。

P. 150 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

試判斷下列函數是否有最大值或最小值，並求其值。

(1)$y=-\frac{1}{2}(x+\frac{3}{2})^2+2$

有最大值為 2。

(2)$y=4(x-7)^2+\frac{1}{2}$

有最小值為$\frac{1}{2}$。

P. 151 例 7

此題無法直接使用 Maxima 軟體

配方法求解。

(1)求 $y=2x^2+4x+10$ 的最小值及其圖形的對稱軸與最低點。

(2)求 $y=-3x^2+6x+10$ 的最大值及其圖形的對稱軸與最高點。

(1)

$y=2x^2+4x+10$

$=2(x^2+2x)+10$

$=2(x^2+2\cdot 1\cdot x+1^2-1^2)+10$

$=2((x+1)^2-1)+10$

$=2(x+1)^2-2+10$

$=2(x+1)^2+8$

所以 $y=2x^2+4x+10$ 的最小值為 8，而圖形的對稱軸為 $x=-1$，且最低點為$(-1,8)$。

(2)

$y=-3x^2+6x+10$

$=-3(x^2-2x)+10$
$=-3(x^2-2\cdot 1\cdot x+1^2-1^2)+10$
$=-3((x-1)^2-1)+10$
$=-3(x-1)^2+3+10$
$=-3(x-1)^2+13$

所以 $y=-3x^2+6x+10$ 的最大值是 13，而且圖形的對稱軸為 $x=1$，且最高點為(1,13)。

P. 151 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

配方法求解。

(1)求 $y=2x^2+6x$ 的最小值；及其圖形的對稱軸與最低點。

$y=2x^2+6x$
$=2(x^2+3x)$
$=2(x^2+2\cdot\frac{3}{2}\cdot x+\frac{3}{2}^2-\frac{3}{2}^2)$
$=2((x+\frac{3}{2})^2-\frac{3}{2}^2)$
$=2(x+\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4}$

所以 $y=2x^2+6x$ 的最小值是$-\frac{9}{4}$，而且圖形的對稱軸為 $x=-\frac{3}{2}$，且最高點為$(-\frac{3}{2},-\frac{9}{4})$。

(2)求 $y=-2x^2-4x-6$ 的最大值；及其圖形的對稱軸與最高點。

$y=-2x^2-4x-6$
$=-2(x^2+2x)-6$
$=-2(x^2+2\cdot 1\cdot x+1^2-1^2)-6$
$=-2((x+1)^2-1)-6$
$=-2(x+1)^2+2-6$
$=-2(x+1)^2-4$

所以 $y=-2x^2-4x-6$ 的最大值是-4，而且圖形的對稱軸為 $x=-1$，且最高點為(-1, -4)。

P. 152 例 8

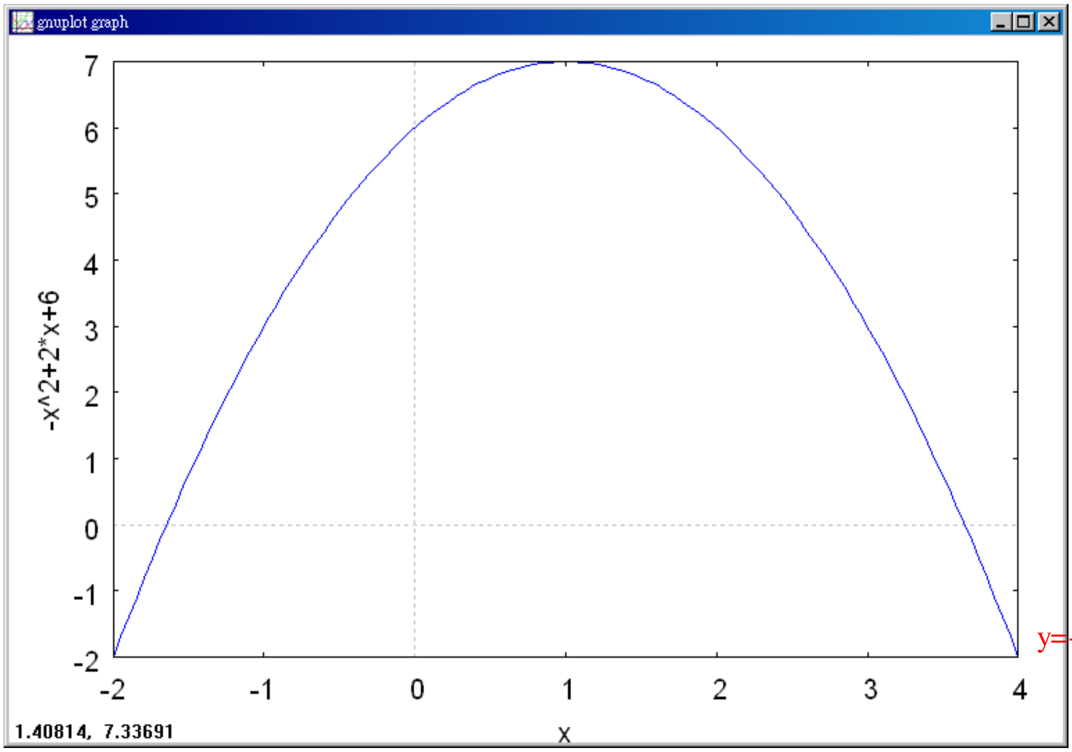
畫出 $y=-x^2+2x+6$ 的圖形。

(%i1) plot2d([-x^2+2*x+6],[x,-2,4]);

※「plot2d([縱軸 y(函數)], [橫軸 x(x,x 值範圍最小值, x 值範圍最大值)])」指令表示畫 2d 坐標圖，輸入

plot2d([-x^2+2*x+6],[x,-2,4]) →
ctrl+enter。(註：x 自行取值即可。)

(%o1)



y=-x^2+2x+6

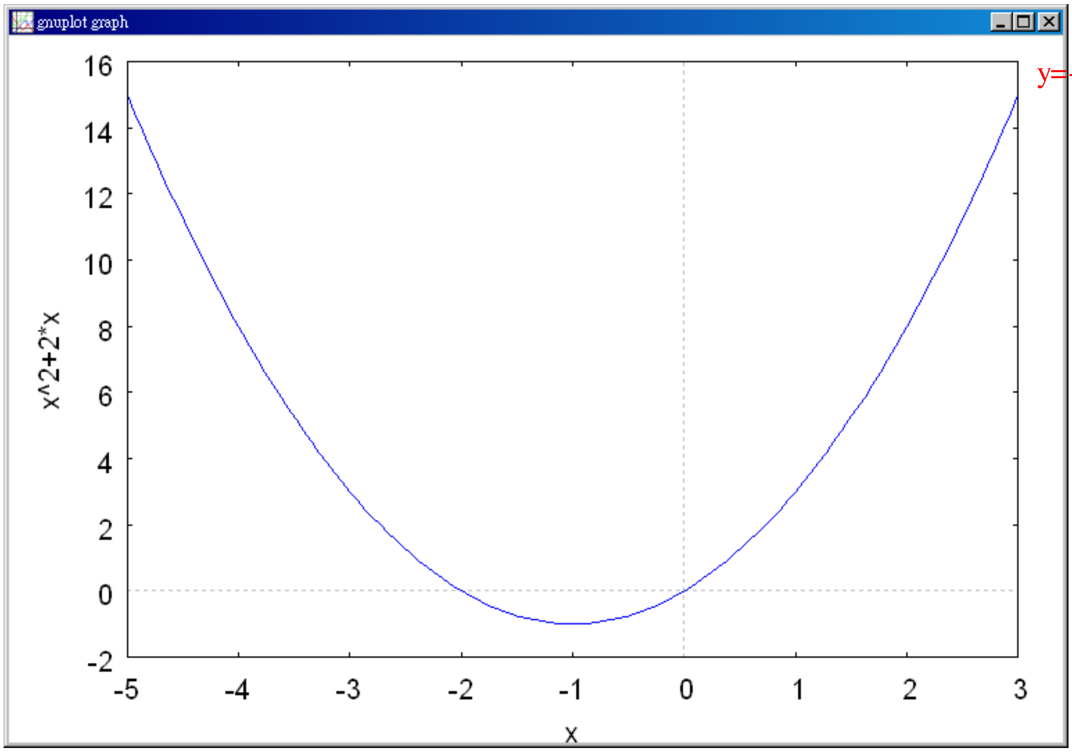
P. 152 隨堂練習

畫出 y=x^2+2x 的圖形。

(%i1) plot2d([x^2+2*x],[x,-5,3]);

※「plot2d([縱軸 y(函數)], [橫軸 x(x,x 值範圍最小值, x 值範圍最大值)])」指令表示畫 2d 坐標圖，輸入 plot2d([x^2+2*x],[x,-5,3]) → ctrl+enter。(註：x 自行取值即可。)

(%o1)



$y=-x^2+2x$

P. 153 例 9

此題無法直接使用 Maxima 軟體

若某二次函數圖形對稱於 x=-1，且通過(0,6)、(2,-10)，求此函數。

★ $y=a(x-h)^2+k$

因爲此二次函數對稱於 x=-1，所以此二次函數可以寫成 $y=a(x+1)^2+k$，

$$\begin{cases} 6=a(0+1)^2+k \\ -10=a(2+1)^2+k \end{cases}$$

(%i1) solve([6=a*(0+1)^2+k,-10=a*(2+1)^2+k], [a,k]);

※「solve([變數算式,變數算式], [變數,變數])」指令表示求解，輸入 solve([6=a*(0+1)^2+k,-10=a*(2+1)^2+k], [a,k]) → ctrl+enter。

(%o1) [[a=-2,k=8]]

因此，此二次函數爲 $y=-2(x+1)^2+8$。

P. 154 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

若某二次函數圖形對稱於 x=1，且通過(2,-1)、(3,8)，求此函數。

★ $y = a(x-h)^2 + k$

因爲此二次函數對稱於 x=-1，所以此二次函數可以寫成 y=a(x-1)^2+k，

$$\begin{cases} -1 = a(2-1)^2 + k \\ 8 = a(3-1)^2 + k \end{cases}$$

(%i1) solve([-1=a*(2-1)^2+k,8=a*(3-1)^2+k], [a,k]);

※「solve([變數算式,變數算式], [變數,變數])」指令表示求解，輸入 solve([-1=a*(2-1)^2+k,8=a*(3-1)^2+k], [a,k]) → ctrl+enter。

(%o1) [[a=3,k=-4]]

因此，此二次函數爲 y=3(x-1)^2-4。

P. 154 例 10

此題無法直接使用 Maxima 軟體

若某二次函數圖形的最低點是(-1,-4)，且通過(0,2)，求此二次函數。

因爲最低點爲(-1,-4)，所以函數圖形的對稱軸是 x=-1，

因此該函數可以寫成 y=a(x+1)^2-4，

(%i1) solve([2=a*(0+1)^2-4], [a]);

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([2=a*(0+1)^2-4], [a]) → ctrl+enter。

(%o1) [a=6]

因此，此二次函數爲 y=6(x+1)^2-4。

P. 154 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

若某二次函數圖形的最高點是(5,2)，且通過(4,-8)，求此二次函數。

因爲最高點爲(5,2)，所以函數圖形的對稱軸是 x=5，

因此該函數可以寫成 $y=a(x-5)^2+2$，

(%i1) solve([-8=a*(4-5)^2+2], [a]);

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([-8=a*(4-5)^2+2], [a]) → ctrl+enter。

(%o1) [a=-10]

因此，此二次函數為 $y=-10(x-5)^2+2$。

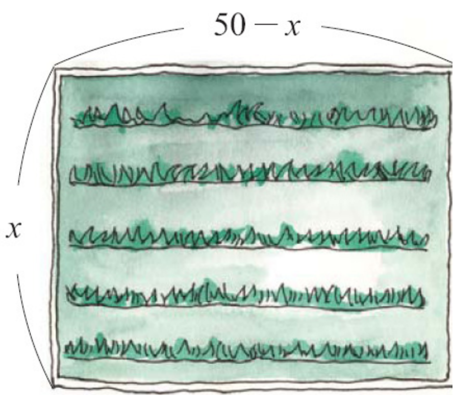
P. 155 例 11

應用問題 Maxima 軟體無法直接解

有一位農夫想用 100 公尺的籬笆圍成一個矩形的菜園，問如何圍出最大面積的菜園？並求出此面積。

配方法求解。

如右圖，設農夫所圍成矩形菜園的一邊長為 x 公尺。



由題意知另一邊長為(50-x)公尺。因此菜園的面積為

$x(50-x)=50x-x^2=-(x^2-50x)=-(x^2-2\cdot25\cdot x+25^2-25^2)=-(x-25)^2+625$，

因此當 x=25 時，面積有最大值 625。

此時菜園的一邊長為 25 公尺，另一邊長為 50-25=25 公尺，也就是說當此菜園是正方形時，其面積最大，且面積為 625 平方公尺。

P. 155 隨堂練習

此題無法直接使用 Maxima 軟體

如果例 11 中，農夫改用 120 公尺的籬笆，答案是什麼？配方法求解。

由題意知另一邊長為(60-x)公尺。因此菜園的面積為

$x(60-x)=60x-x^2=-(x^2-60x)=-(x^2-2\cdot30\cdot x+30^2-30^2)=-(x-30)^2+900$，

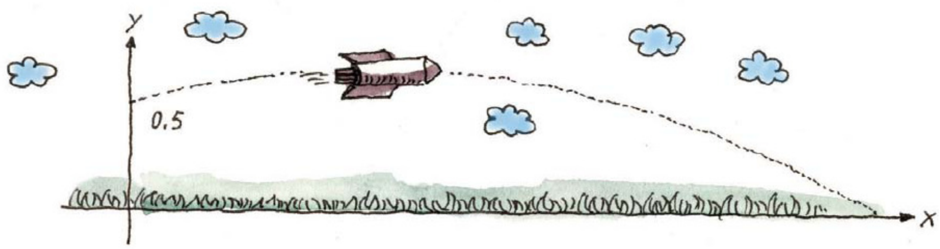
因此當 x=30 時，面積有最大值 900。

此時菜園的一邊長爲 30 公尺，另一邊長爲 60-30=30 公尺，也就是說當此菜園是正方形時，其面積最大，且面積爲 900 平方公尺。

P. 156 例 12

應用問題 Maxima 軟體無法直接解

小明參加創意科學營，製作了一個小火箭，完成後拿到操場試射。假設小火箭沿二次函數 $y=-\frac{1}{100}x^2+\frac{2}{5}x+5$ 的軌跡飛行，如下圖：



其中 x 公尺爲火箭飛行的水平距離，y 公尺則爲火箭距地面高度，發射點在(0.5)的位置。試回答下列問題：

(1)火箭從發射到落地時，飛行的水平距離爲多少公尺？

(2)在飛行過程中，火箭離地面的高度最高爲多少公尺？

(1)

我們必須知道火箭落地的位置。當火箭落地時，高度爲 0，即 y=0，所以可得一元二次方程式：

$-\frac{1}{100}x^2+\frac{2}{5}x+5=0$，求 x，

(%i1) solve([-(1/100)*x^2+(2/5)*x+5=0], [x]);

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([-(1/100)*x^2+(2/5)*x+5=0], [x]) → ctrl+enter。

(%o1) [x=50,x=-10]

負不符所求，因此，火箭落地的地點到發射點的水平距離爲 50-0=50 公尺。

(2)配方法求解。

因爲 y 公尺表示火箭的飛行高度，火箭離地面最高的高度即爲函數

$y=-\frac{1}{100}x^2+\frac{2}{5}x+5$ 的最大值，所以，可將此函數配方而得到：

$y=-\frac{1}{100}x^2+\frac{2}{5}x+5$

$=-\frac{1}{100}(x^2-40x)+5$

$=-\frac{1}{100}(x^2-2\cdot 20\cdot x+20^2-20^2)+5$

$=-\frac{1}{100}(x-20)^2+4+5$

$=-\frac{1}{100}(x-20)^2+9$

因此，當 x=20 時，y=9 為最大值，也就是說，飛行過程中火箭離地面最高的高度為 9 公尺。

P. 159 3-2 自我評量

此題無法直接使用 Maxima 軟體

1.下列敘述，將正確的打「○」，錯誤的打「X」。

(○)(1)$y=x^2+bx+c$ 的圖形一定是線對稱圖形。

(X)(2)若 $y=x^2+bx+c$ 的圖形對稱於 x=4，則 b=8。

(○)(3)$y=x^2+4x$ 的最小值是 0。

(X)(4)$y=4x-x^2$ 的最大值是 0。

(X)(5)因為 $x^2+8x+100=0$ 沒有解，所以 $y=x^2+8x+100$ 沒有最大值，也沒有最小值。

此題無法直接使用 Maxima 軟體

2.若直線 y=10 與 $y=x^2+bx+c$ 的圖形相交於(5,10)與(-5,10)。

(1)求此二次函數圖形的對稱軸。

x=0。

(2)求 b。

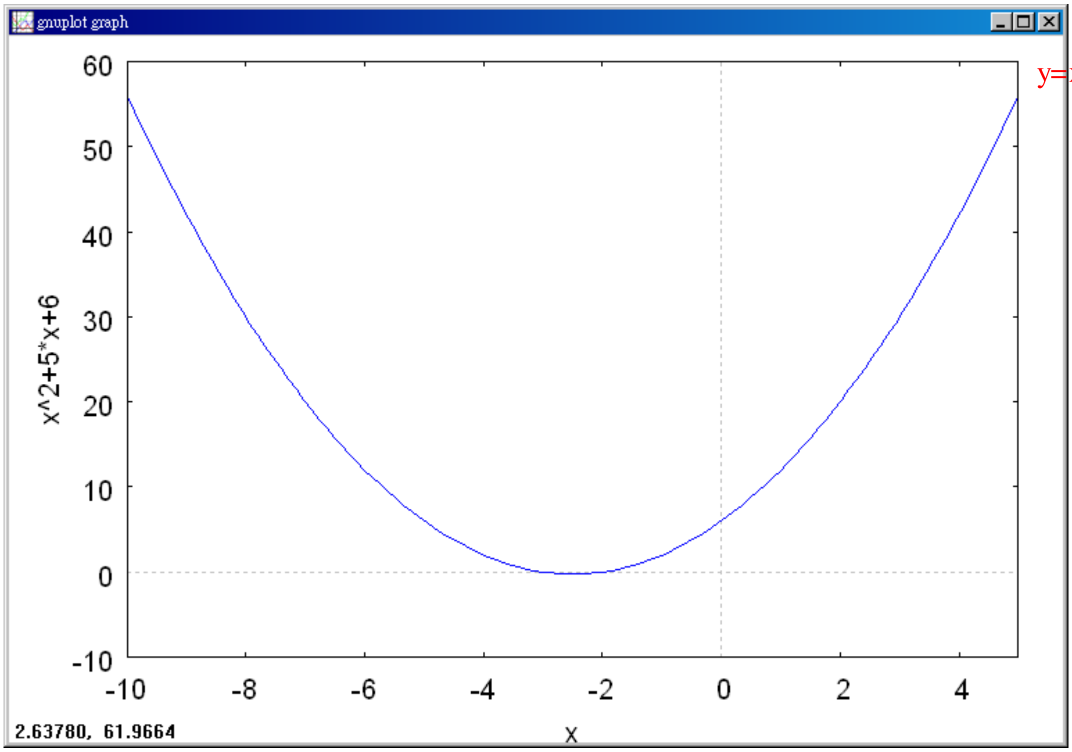
b=0。

此題無法直接使用 Maxima 軟體

3.求二次函數 $y=x^2+5x+6$ 的圖形與 x 軸的交點。

(%i1) plot2d([x^2+5*x+6],[x,-10,5]);

(%o1)



$y=x^2+5x+6$

與 x 軸的交點，令 y=0，

(%i1) solve([0=x^2+5*x+6], [x]);

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解，輸入 solve([0=x^2+5*x+6], [x]) → ctrl+enter。

(%o1) [x=-3,x=-2]