

## 高中數學與MAXIMA：

以下將依據教育部審核教科書內容，以MAXIMA軟體解答例題、隨堂練習及自我評量以供高中生參考

### 高三下數學

-目次-

#### 第一章 多項式函數的極限與導數

1-1 函數及其圖形

1-2 函數的極限

1-3 多項式函數的導數

#### 第二章 導函數的應用

2-1 多項式函數圖形的描繪

2-2 函數的極值

2-3 三次函數的圖形

2-4 極值的應用

#### 第三章 不等式

3-1 黎曼和與面積

3-2 定積分

3-3 定積分的應用

附錄一、微積分的基本定理

附錄二、牛頓法求平方根的近似值

附錄三、微分的乘法公式

附錄四、夾擠定理



- ※「plot2d ([方程式],[x,最小值,最大值],[y, 最小值,最大值])」; 指令表示繪出方程式之圖形,其中 x 軸刻度介於最小值~最大值之間、y 軸刻度介於最小值~最大值之間。
- ※「abs( 數值 )」指令表示絕對值。
- ※「solve([ 變數算式 ],[ 變數 ])」指令表示求解。
- ※「limit(變數算式, 變數, 變數值)」指令表示變數值帶入變數算式, 求得算式趨近值。
- ※「diff(多項式函數, 函數 ,n 次導數 )」指令表示對一多項式函數之中特定函數進行 n 階導數。
- ※「factor( 數值 )」指令表示求因式分解。
- ※「integrate (多項式函數, 函數, 函數起始值, 函數結束值) 」指令表示對一多項式函數之中特定函數進行積分, 積分範圍為函數起始值至函數結束值。
- ※「ratsimp ([ 算式 ] × [ 算式 ])」指令表示化簡算式。

## 運算簡介

+ : MAXIMA 以+表示。

- : MAXIMA 以-表示。

× : MAXIMA 以\*表示。

÷ : MAXIMA 以/表示。

$a^2$  : MAXIMA 以  $a^2$  表示。

$\sqrt{a}$  : MAXIMA 以  $a^{(1/2)}$  或  $\text{sqrt}(a)$  表示。

$\pi$  : MAXIMA 以 %pi 表示。

$i$  虛數 : MAXIMA 以 %i 表示。

## 第一章 多項式函數的極限與導數



## 1-1 函數及其圖形

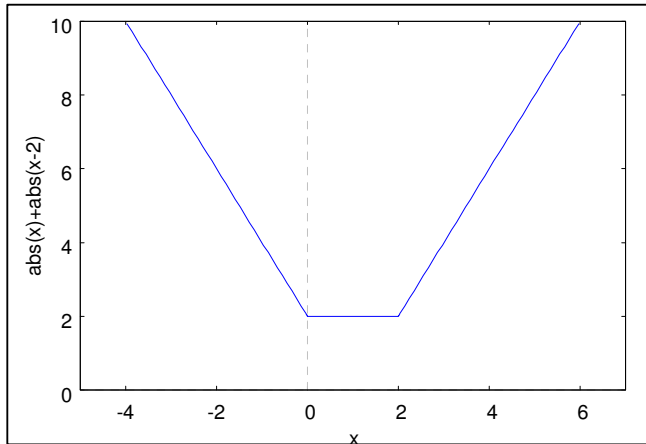
### P.7

**例題 1**：試描出函數  $y = |x| + |x-2|$  的圖形。

```
(%i1) plot2d([abs(x)+abs(x-2)],[x,-10,10]);
```

plot2d: some values were clipped.

```
(%o1)
```



※「plot2d([方程式],[x,最小值,最大值],[y, 最小值,最大值])」；指令表示繪出方程式之圖形，其中 x 軸刻度介於最小值~最大值之間、y 軸刻度介於最小值~最大值之間。

※「abs( 數值 )」指令表示絕對值。

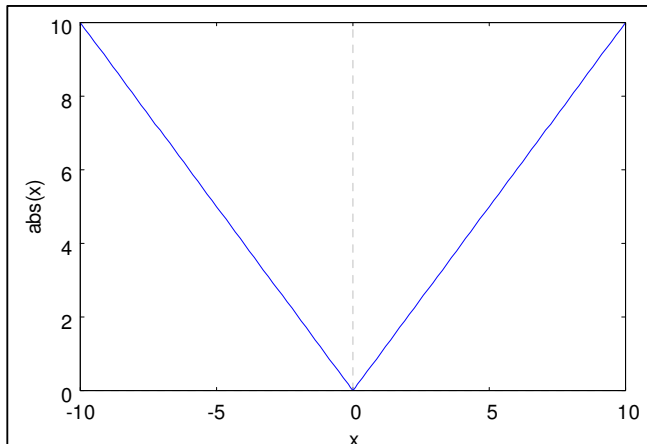
### P.8

**隨堂練習**：試描出函數  $y = |x|$  的圖形，並寫出折點的坐標。



```
(%i1) plot2d([abs(x)],[x,-10,10]);
```

```
(%o1)
```



※「`plot2d([方程式],[x,最小值,最大值],[y, 最小值,最大值])`」；指令表示繪出方程式之圖形，其中  $x$  軸刻度介於最小值~最大值之間、 $y$  軸刻度介於最小值~最大值之間。

※「`abs( 數值 )`」指令表示絕對值。

## P.9

**例題 2：**設  $f(x) = x + 1$ ， $g(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

(1) 求函數  $f(x)$  與  $g(x)$  的定義域，並問  $f(x)$  與  $g(x)$  是否相等？

(2) 描出  $y = f(x)$  與  $y = g(x)$  的圖形

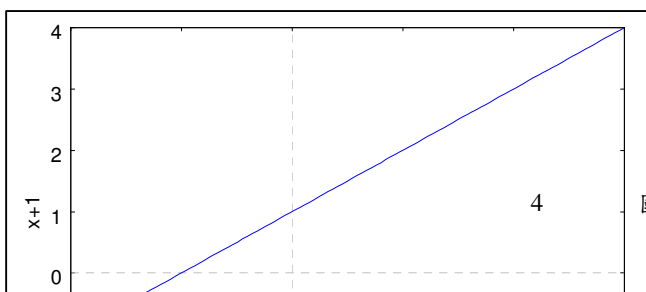
```
(%i1) f:x+1; g:(x^2-x-2)/(x-2);
```

```
(%o1) x+1
```

```
(%o2)  $\frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$ 
```

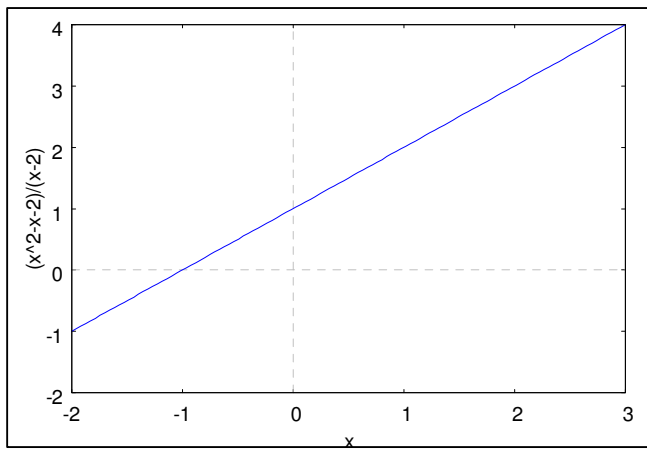
```
(%i3) plot2d([f],[x,-2,3],[y,-2,4]);
```

```
(%o3)
```



(%i4) plot2d([g],[x,-2,3],[y,-2,4]);

(%o4)



※「plot2d([方程式],[x,最小值,最大值],[y, 最小值,最大值])」；指令表示繪出方程式之圖形，其中 x 軸刻度介於最小值~最大值之間、y 軸刻度介於最小值~最大值之間。

### P.10

**隨堂練習：**例題二中所給的兩個函數， $f(x)=x+1$ ， $g(x)=\frac{x^2-x-2}{x-2}=\frac{(x-2)(x+1)}{x-2}$ ，若

$f(x)=x+1$ 之定義域限制在  $D=\{x|x\in R, x\neq 2\}$  內，此時  $f$  與  $g$  是否為同一個函數？

### P.11

**隨堂練習：**設  $G(x)=[x]$

(1) 求函數值  $\left[\frac{3}{2}\right]$ 、 $\left[-\frac{3}{2}\right]$ 、 $[0.99]$

(2) 若  $[x]=0$ ，則實數  $x$  取值的範圍為何？



(3)  $x$  在什麼條件下會滿足  $[x]=x$  ?

### P.12

**隨堂練習：**根據上面“車資  $f(x)$ ”表成“里程數  $x$ ”的式子，試求  $f(6)$  及  $f(6.2)$

**例題 3：**設甲地的計程車跑  $x$  公里，該付的車資為  $f(x)$  元(不計時)，其中

$$f(x) \begin{cases} 70 & (0 < x < 1.5) \\ 75 + 5 \left[ \frac{10}{3}x - 5 \right] & x \geq 1.5 \end{cases}, \text{ 若某人付計程車資 120 元, 請估計他搭乘計}$$

程車的里程數  $x$  約多少公里

### P.13

**例題 4：**已知自由落體下落  $t$  秒後的距離  $h(t)$  為  $h(t) = \frac{1}{2}gt^2$ ，其中  $g$  是重力加速度，

$$g \doteq 9.8 (\text{公尺/秒}^2),$$

(1) 證明：從物體下落開始，第 1 秒內、第 1 秒~第 2 秒、第 2 秒~第 3 秒、第 3 秒~

第 4 秒、...，物體落下的距離比為  $1 : 3 : 5 : 7 : \dots$

$$(\%i1) h(t) := 1/2 * g * t^2;$$

$$(\%o1) h(t) := \frac{1}{2}gt^2$$

$$(\%i2) h(1);$$

$$(\%o2) \frac{g}{2}$$

$$(\%i3) h(2)-h(1);$$

$$(\%o3) \frac{3g}{2}$$

$$(\%i4) h(3)-h(2);$$

$$(\%o4) \frac{5g}{2}$$

$$(\%i5) h(4)-h(3);$$



$$(\%o5) \frac{7g}{2}$$

\* 由上可知第 1 秒內-h(1);、第 1 秒~第 2 秒 h(2)-h(1)、第 2 秒~第 3 秒 h(3)-h(2)、第 3 秒~第 4 秒 h(4)-h(3)、...，物體落下的距離比為 1 : 3 : 5 : 7 : ...。

(2) 若有一物體，自地面高 490 公尺處自由落下，如果不計空氣阻力，該物體從落下至著地需經多少秒？

```
(%i6) solve([1/2*9.8*t^2=490],[t]);
```

rat: replaced 4.9 by 49/10 = 4.9

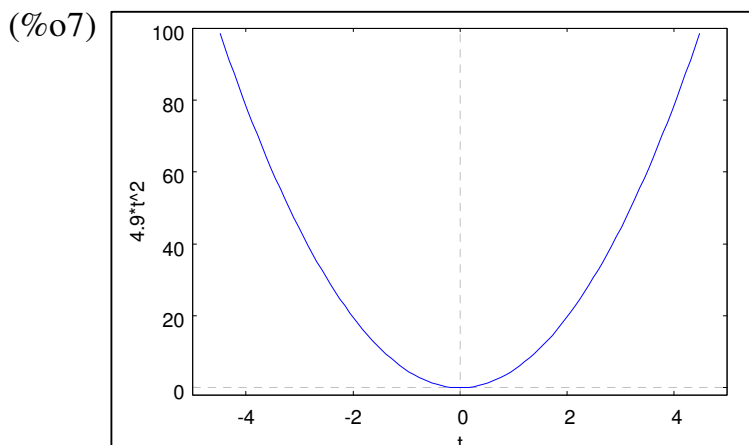
```
(%o6) [t=-10,t=10]
```

\* 自地面高 490 公尺處自由落下，該物體從落下至著地需經 10 秒。

(3) 試描出  $y = \frac{1}{2}gt^2$  的示意圖 ( $0 \leq t \leq 1$ )

```
(%i7) plot2d([1/2*9.8*t^2],[t,-5,5],[y,-2,100]);
```

plot2d: some values were clipped.



※ 「solve([ 變數算式 ],[ 變數 ])」指令表示求解。

※ 「plot2d ([方程式],[x,最小值,最大值],[y, 最小值,最大值])」; 指令表示繪出方程式之圖形,其中 x 軸刻度介於最小值~最大值之間、y 軸刻度介於最小值~最大值之間。



**P.15** **習題 1-1**

Part A

1. 描出下列各函數的圖形。

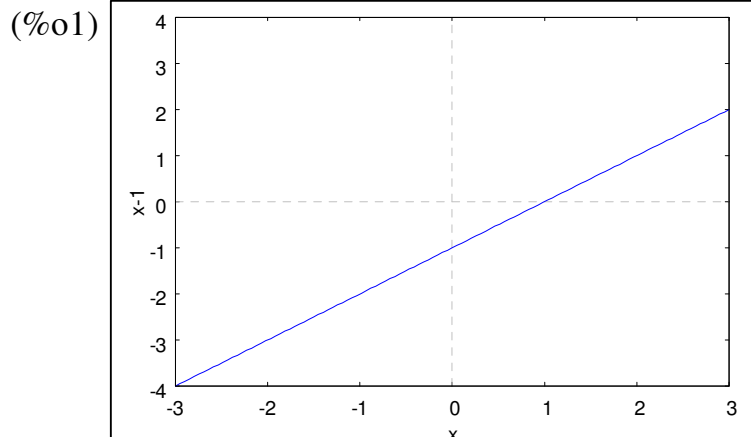
(1)  $y = x - 1$

(%i1) plot2d([x-1],[x,-3,3],[y,-4,4]);





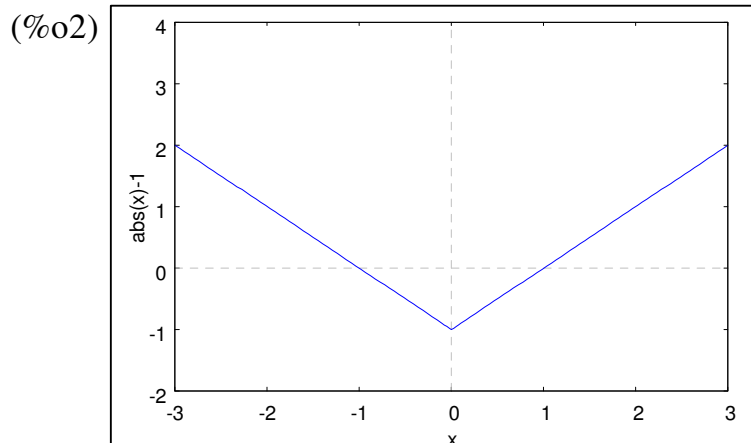
plot2d: some values were clipped.



(2)  $y = |x| - 1$

(%i2) plot2d([abs(x)-1], [x,-3,3],[y,-2,4]);

plot2d: some values were clipped.



※「plot2d ([方程式],[x,最小值,最大值],[y, 最小值,最大值])」; 指令表示繪出方程式之圖形,其中 x 軸刻度介於最小值~最大值之間、y 軸刻度介於最小值~最大值之間。

(3)  $y = [x] - 1$

(4)  $y = \frac{(1-x)^2}{x-1}$



2. 第一題的四個函數中，哪些是一次函數？哪些是  $\mathbb{R}$  上的遞增函數？
3. 甲、乙兩地相距 10 公里，阿寶騎摩托車以等速前進，由甲至乙花了 8 分鐘；阿明開車以等速行進，比阿寶晚 1 分鐘自甲出發，卻比阿寶提早 2 分鐘抵達乙地。
- (1) 請在圖上畫出阿明開車的“距離  $s$ -時間  $t$ ”圖，並寫出摩托車  $s=S_1(t)$  及  $s=S_2(t)$  的函數關係式。
- (2) 阿寶出發後，經多少分鐘後被阿明趕上？此時距甲地多少公里？
4. 已知自由落體下落  $t$  秒的距離(不計空氣阻力)為  $h(t)=\frac{1}{2}gt^2$  (單位：公尺)，其中  $g \doteq 9.8$  (公尺/秒<sup>2</sup>)，是重力加速度。試問：若有一物體從地面上高為 1960 公尺處落下(不計空氣阻力)，經多少秒後該物體會著地？

```
(%i1) solve([1/2*9.8*t^2=1960],[t]);
```

```
rat: replaced 4.9 by 49/10 = 4.9
```

```
(%o1) [t=-20,t=20]
```

\*自地面高 490 公尺處自由落下，該物體從落下至著地需經 20 秒。

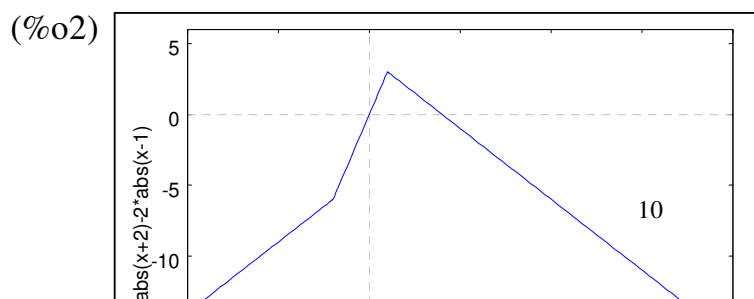
※「`solve([ 變數算式 ],[ 變數 ])`」指令表示求解。

## P.16

### Part B

1. 試描出  $y=|x+2|-2|x-1|$  的圖形，並寫出折點的坐標。

```
(%i2) plot2d([abs(x+2)-2*abs(x-1)], [x,-10,20],[y,-20,5]);
```



※「plot2d ([方程式],[x,最小值,最大值],[y, 最小值,最大值])」; 指令表示繪出方程式之圖形,其中 x 軸刻度介於最小值~最大值之間、y 軸刻度介於最小值~最大值之間。

※「abs( 數值 )」指令表示絕對值。

2. 設  $f(x)=2x$  與  $g(x)=2[x]$ , 其中  $[ ]$  為高斯符號。

(1) 在區間  $[-1, 2)$  內畫出  $y=f(x)$  與  $y=g(x)$  的圖形

(2) 寫出  $f(x)$  與  $g(x)$  的值域  $f(R)$ 、 $g(R)$

(3) 在  $R$  上,  $f(x)$  與  $g(x)$  是否相等?

3. 右圖為小明從家裡到學校騎自行車上學的”距離-時間”圖。圖中曾停下休息,然後加速前行,抵達學校總計花了 25 分鐘

(1) 用”分段定義”寫出”s-t”的函數關係。(s=S(t))

(2) 離家後,出發時前 10 分鐘為等速,其速度是多少(公里/分)?最後 5 分鐘也為等速,求其速度是多少(公里/分)?

(3) 離家後第 23 分鐘,距離學校尚有多少公里?

4. 設  $f(x) = x^2 - 4x + 3$

(1) 描出  $y=f(x)$  的圖形,標出對稱軸、頂點座標、圖形的 x 截距

(2) 求  $f(x)$  在閉區間  $[-1, 3]$  上的最大值與最小值



## 1-2 函數的極限

### P.18

隨堂練習：下表中，當 $\Delta t = -0.0001, 0.0001$ 時，求對應的平均速度 $\bar{v}$

時段 $3 \sim 3 + \Delta t$	3~2.9	3~2.99	3~2.999	...	3~3.001	3~3.01	3~3.1
時間差 $\Delta t$	-0.1	-0.01	-0.001	...	0.001	0.01	0.1
平均速度 $\bar{v} = 12 + 2\Delta t$	11.8	11.98	11.998	...	12.002	12.02	12.2



**P.20**

**隨堂練習：**設運動質點 P 之位移  $s$  與時間  $t$  之關係式為  $s=S(t)=t^2$  (位移單位：公尺；  
時間單位：秒)

- (1) 時間由  $t=3$  到  $t=5$ ，質點 P 之平均速度是多少？
- (2) 質點在  $t=4$  時的速度是多少？
- (3) 質點 P 的運動是否為等速運動？

**P.22**

**隨堂練習：**下表中，(1) 當  $\Delta x=-0.0001$ ，求  $0.0001$  時，求  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$   
(2) 當  $\Delta x=0.0001$ ，求  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

$\Delta x$	3~2.9	3~2.99	3~2.999	...	3~3.001	3~3.01	3~3.1
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 + \Delta x$	-0.1	-0.01	-0.001	...	0.001	0.01	0.1

**P.25**

**例題 1：**設  $f(x)=c$  ( $c$  是常數)，求  $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ 。

**例題 2：**設  $f(x)=x+1$ 、 $g(x)=\frac{x^2-x-2}{x-2}$ ，求  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  與  $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ 。

(%i1) f(x):=x+1;

(%o1) f(x):=x+1

(%i2) g(x):=(x^2-x-2)/(x-2);



$$(\%o2) \quad g(x) := \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$$

(%i3) limit(f(x),x,2);

(%o3) 3

(%i4) f(2);

(%o4) 3

(%i5) limit(g(x),x,2);

(%o5) 3

(%i6) g(2);

Division by 0

#0: g(x=2)

-- an error. To debug this try debugmode(true);

※ 「limit (變數算式, 變數, 變數值)」指令表示變數值帶入變數算式, 求得算式趨近值。

## P.26

隨堂練習：設  $f(x)=x-2$ 、 $g(x)=\frac{x^2-1}{x+2}$ ，求  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$  與  $\lim_{x \rightarrow -2} g(x)$ 。

(%i1) f(x):=x-2;

(%o1) f(x):=x-2

(%i2) g(x):=(x^2-1)/(x+2);

$$(\%o2) \quad g(x) := \frac{x^2 - 1}{x + 2}$$

(%i3) limit(f(x),x,-2);

(%o3) -4

(%i4) f(-2);

(%o4) -4



```
(%i5) limit(g(x),x,-2);
```

```
(%o5) infinity
```

```
(%i6) g(-2);
```

```
Division by 0
```

```
#0: g(x=-2)
```

```
-- an error. To debug this try debugmode(true);.
```

※ 「**limit** (變數算式, 變數, 變數值)」指令表示變數值帶入變數算式, 求得算式趨近值。

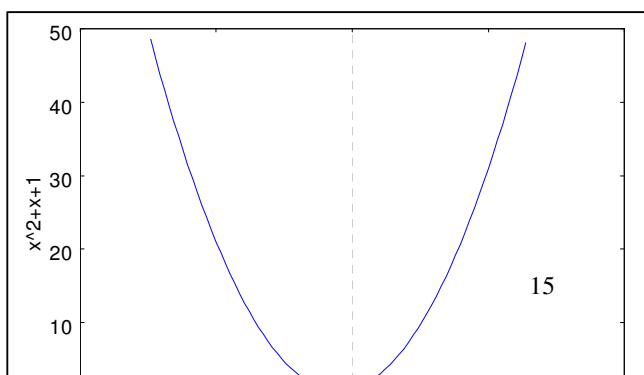
**例題 3** : 設  $f(x)=x^2+x+1$ 、 $g(x)=\frac{x^3-1}{x-1}$

(1) 概略描出  $y=f(x)$  的圖形, 並求  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

```
(%i1) plot2d([x^2+x+1], [x,-10,10],[y,0,50]);
```

```
plot2d: some values were clipped.
```

```
(%o1)
```



```
(%i2) f(x):=x^2+x+1;
```

```
(%o2) f(x):=x^2+x+1
```

```
(%i3) limit(f(x),x,1);
```

```
(%o3) 3
```

```
(%i4) f(1);
```

```
(%o4) 3
```

※ 「**limit** (變數算式, 變數, 變數值)」指令表示變數值帶入變數算式, 求得算式趨近值。

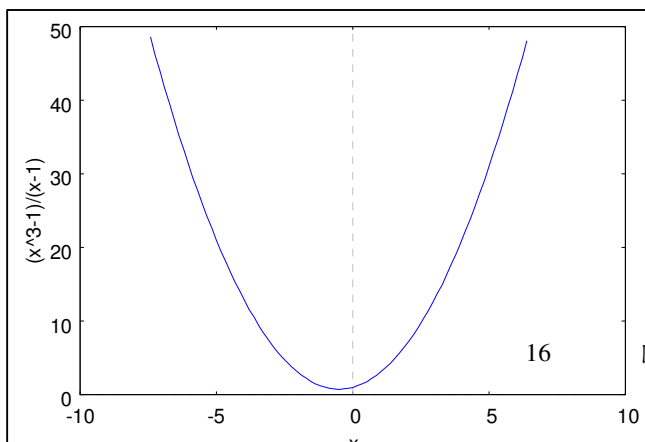
※ 「**plot2d** ([方程式],[x,最小值,最大值],[y, 最小值,最大值])」; 指令表示繪出方程式之圖形, 其中 x 軸刻度介於最小值~最大值之間、y 軸刻度介於最小值~最大值之間。

(2) 概略描出  $y=g(x)$  的圖形, 並求  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$

```
(%i5) plot2d([(x^3-1)/(x-1)], [x,-10,10],[y,0,50]);
```

plot2d: some values were clipped.

```
(%o5)
```





```
(%i6) g(x):=(x^3-1)/(x-1);
```

```
(%o6) g(x):=  $\frac{x^3-1}{x-1}$ 
```

```
(%i7) limit(g(x),x,1);
```

```
(%o7) 3
```

```
(%i8) g(1);
```

Division by 0

```
#0: g(x=1)
```

```
-- an error. To debug this try debugmode(true);
```

※ 「limit (變數算式, 變數, 變數值)」指令表示變數值帶入變數算式, 求得算式趨近值。

※ 「plot2d ([方程式],[x,最小值,最大值],[y, 最小值,最大值])」; 指令表示繪出方程式之圖形, 其中 x 軸刻度介於最小值~最大值之間、y 軸刻度介於最小值~最大值之間。

## P.27

**隨堂練習：**設  $f(x)=x^2+1$ 。在圖(a)中,  $f(x)$  在  $x=0$  處沒有定義; 在圖(b)中,  $f(x)$  在  $x=0$  處的定義改為  $f(0)=2$ ; 在圖(c)中,  $f(x)$  的定義域為  $\mathbb{R}$ ,  $y=f(x)$  的圖形是一條拋物線,  $f(0)=1$

(1) 在圖(a)中, 求  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  ( $f(0)$  沒有定義)

(2) 在圖(b)中, 求  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ , 並問  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$  是否成立?

(3) 在圖(c)中, 求  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ , 並問  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$  是否成立?



**P.28****例題 4：**

(1) 設  $f(x) \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases}$ ，試問：當  $x \rightarrow 0$  時， $f(x)$  之極限是否存在？

(2) 設  $h(x) \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases}$ ，試問：當  $x \rightarrow 0$  時， $h(x)$  之極限是否存在？

(3) 設  $g(x) = [x]$  (高斯函數)，試求  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} g(2 + \Delta x)$  及  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} g(2 + \Delta x)$

**P.31**

**例題 5：**設  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$  是  $n$  次多項式函數，證明： $\lim_{\Delta x \rightarrow c} p(x) = p(c)$

**隨堂練習：**求  $\lim_{x \rightarrow 1} (-2x^5 + 3x^4 - x^2 + 4x + 6)$

(%i1) limit(-2\*x^5+3\*x^4-x^2+4\*x+6,x,1);

(%o1) 10

※「limit (變數算式, 變數, 變數值)」指令表示變數值帶入變數算式，求得算式趨近值。

**P.32**

**例題 6：**求下列各式的極限值：

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^3 - 1}{x - 1} \right)$

(%i1) limit((x^3-1)/(x-1),x,0);

(%o1) 1

(2)  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{x^2 + x - 1}{x^3 + 1} \right)$

(%i2) limit((x^2+x-1)/(x^3+1),x,2);



$$(\%o2) \frac{5}{9}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x^3 - 1}{x - 1} \right)$$

$$(\%i3) \text{limit}((x^3-1)/(x-1),x,1);$$

$$(\%o3) 3$$

※ 「limit (變數算式, 變數, 變數值)」指令表示變數值帶入變數算式, 求得算式趨近值。

### P.33

**例題 7**：求下列各式的極限值：

$$(1) \lim_{x \rightarrow -2} (x^3 + 2x^2 - 5x - 6)$$

$$(\%i1) \text{limit}((x^3+2*x^2-5*x-6),x,-2);$$

$$(\%o1) 4$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -2} \left( \frac{x^2 + x - 2}{x + 2} \right)$$

$$(\%i2) \text{limit}((x^2+x-2)/(x+2),x,-2);$$

$$(\%o2) -3$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow -2} \left( x^3 + 2x^2 - 5x - 6 + \frac{x^2 + x - 2}{x + 2} \right)$$

$$(\%i3) \text{limit}((x^3+2*x^2-5*x-6)+ (x^2+x-2)/(x+2),x,-2);$$

$$(\%o3) 1$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow -2} \left[ (x^3 + 2x^2 - 5x - 6) \cdot \left( \frac{x^2 + x - 2}{x + 2} \right) \right]$$



(%i3) limit((x^3+2\*x^2-5\*x-6)\*(x^2+x-2)/(x+2),x,-2);

(%o3) -12

※「limit (變數算式, 變數, 變數值)」指令表示變數值帶入變數算式, 求得算式趨近值。

隨堂練習：求下列各式的極限值：

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 3x + 2)$

(%i1) limit((x^2-3\*x+2),x,0);

(%o1) 2

(2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^3 - 5x^2 + x}{x} \right)$

(%i2) limit((x^3-5\*x^2+x)/x,x,0);

(%o2) 1

(3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( x^2 - 3x + 2 - \frac{x^3 - 5x^2 + x}{x} \right)$

(%i3) limit((x^2-3\*x+2)-((x^3-5\*x^2+x)/x),x,0);

(%o3) 1

※「limit (變數算式, 變數, 變數值)」指令表示變數值帶入變數算式, 求得算式趨近值。



**P.34** **習題 1-2**

## Part A

1. 有一物體從地面上高為 25 呎處自由落下(只受地心引力作用，而不加任何外力)，

如果不計空氣阻力，那麼落下後  $t$  秒的高度為  $S(t) = -16t^2 + 25$ 。請計算：

(1) 時間從 1 秒到  $(1 + \Delta t)$  秒的平均速度  $\frac{\Delta s}{\Delta t}$  是多少？

(2) 物體自由落下後，” $t=1$  秒”之瞬時速度  $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$

2. 設  $f(x) = x^3$ ，點  $P(1, f(1))$  是  $y=f(x)$  之圖形  $\Gamma$  上一定點，通過  $P$  點作一割線與  $\Gamma$  交於另一點  $Q(1 + \Delta x, f(1 + \Delta x))$



(1) 計算  $\Delta y = f(5 + \Delta x) - f(1)$

(2) 計算割線 PQ 的斜率  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

(3) 當 Q 點沿著  $\Gamma$  趨近時，割線 PQ 的斜率  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  是否會趨近某一個定值？(計算  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ )

3. 求下列各式的極限：

(1)  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (5 + \Delta x)$

假設  $\Delta x$  為  $t$ ，進行計算

(%i1) limit(5+t,t,0);

(%o1) 5

(2)  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 7x - 3)$

(%i2) limit(x^2+7\*x-3,x,1);

(%o2) 5

(3)  $\lim_{x \rightarrow 0} (2x - 1)^5$

(%i3) limit((2\*x-1)^5,x,0);

(%o3) -1

4. 求下列各式的極限：

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$

(%i1) limit((x^2-1)/(x+1),x,0);

(%o1) -1



$$(2) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

(%i2) limit((x^2-1)/(x+1),x,-1);

(%o2) -2

※ 「limit (變數算式, 變數, 變數值)」指令表示變數值帶入變數算式, 求得算式趨近值。

5. 設  $4 - x^2 \leq f(x) \leq 4 + x^2$  ( $-2 < x < 2$ ), 求  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

### P.35

#### Part B

1. 設  $f(x) \begin{cases} 2x & (\text{if } x > 1) \\ x^2 + 1 & (\text{if } x < 1) \end{cases}$ , 之圖形如右, 試求:

(1)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$  及  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

(2)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  是否存在? 若極線存在, 其值為何?

2. 若  $g(x) = \frac{|x|}{x}$  ( $x \neq 0$ ), 試求:

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$  及  $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$

(2)  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  是否存在?

3. 設  $G(x) = [x]$  (高斯函數)

(1) 求  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} G(2 + \Delta x)$  及  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} G(2 + \Delta x)$

(2)  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} G(2 + \Delta x)$  是否存在?

(3) 求  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} G(2.5 + \Delta x)$



4. 如何選取常數  $a$ ，使得極限  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x + a}{x - 3}$  存在，並求此極限值

### 1-3 多項式函數的導數

#### P.37

**例題 1**：求函數  $f(x) = x^3$  在  $x=1$  處的導數  $f'(1)$ 。

(%i1) f(x):=x^3;

(%o1) f(x):=x<sup>3</sup>

(%i2) diff(f(x),x,1);

(%o2) 3x<sup>2</sup>

(%i3) x:1;

(%o3) 1





(%i4) 3\*x^2;

(%o4) 3

※「diff (多項式函數, 函數, n 次導數)」指令表示對一多項式函數之中特定函數進行 n 階導數。

隨堂練習：求函數  $g(x)=x^2$  在  $x=-1$  處的導數  $g'(-1)$ 。

(%i1) f(x):=x^2;

(%o1) f(x):=x<sup>2</sup>

(%i2) diff(f(x),x,1);

(%o2) 2x

(%i3) x:-1;

(%o3) -1

(%i3) 2\*x;

(%o3) -2

※「diff (多項式函數, 函數, n 次導數)」指令表示對一多項式函數之中特定函數進行 n 階導數。

### P.38

例題 2：試問：函數  $f(x)=|x|$  在  $x=0$  處的“導數”是否存在？

隨堂練習：函數  $f(x)=|x|$ ，在  $x=3$  的導數  $f'(3)$  是否存在？又在  $x=-2$  的導數  $f'(-2)$  是否存在？

### P.39

例題 3：證明：常數函數  $f(x)=c$  對任意一點  $x_0$  之導數  $f'(x_0)$



**例題 4：**

- (1) 試證：若函數  $f(x)$  在  $x=c$  處的”導數”存在，則函數  $f(x)$  在  $x=c$  處是”連續”
- (2) 並舉例說明：其逆敘述不為真

**P.41**

**隨堂練習：**已知函數  $y=f(x)$  的圖形在  $x=2$  處的切線方程式為  $y+3=-5(x-2)$ ，試求：

(1)  $f(2)$  及  $f'(2)$

(%i1)  $f(x)=-5*(x-2)-3;$

(%o1)  $f(x)=(-5)*(x-2)-3$

(%i2)  $f(2);$

(%o2)  $-3$

(%i3)  $\text{diff}(f(x),x,1);$

(%o3)  $-5$

(%i4)  $x:2;$

(%o4)  $2$

(%i5)  $-5$

(%o5)  $-5$

※「diff (多項式函數, 函數, n 次導數)」指令表示對一多項式函數之中特定函數進行 n 階導數。

(2) 函數  $y=f(x)$  的圖形在  $x=2$  處的法線方程式

**例題 5：**已知點  $P(2, \frac{8}{3})$  在函數  $y=\frac{1}{3}x^3$  的圖形  $\Gamma$  上，試求  $\Gamma$  上：



- (1) 以 P 為切點之切線斜率  $m$  及切線方程式
- (2) 通過 P 點知法線方程式

**P.39**

**隨堂練習：**在函數  $f(x)=x^2$  圖形  $\Gamma$  上，試求：

- (1) 過頂點  $O(0, 0)$  之切線方程式。
- (2) 過點  $P(-1, 1)$  之切線方程式。

**例題 6：**設函數  $f(x)=x^2+x$  的圖形為  $\Gamma$ ，試求通過  $\Gamma$  外一點  $Q(1, 1)$  且與  $\Gamma$  相切的直線方程式。

**P.43**

**隨堂練習：**試求通過  $Q(0, -1)$  且與函數  $y=x^2$  之圖形相切的直線方程式，並求出對應的切點座標(有兩解)

**例題 7：**設  $\Gamma: y=\frac{1}{4}x^2$ ，點  $P(2, 1)$  在拋物線  $\Gamma$  上

- (1) 試求  $\Gamma$  的焦點  $F$ 。
- (2) 求通過  $P(2, 1)$  之切線  $L$  的方程式。
- (3) 說明：由焦點  $F$  發出的光線，經  $P$  點反射後，必與對稱軸( $y$  軸平行)。

**P.46**

**例題 8：**有一物體從高為 25 呎處自由落下，經過  $t$  秒後的高度是  $S(t)=-16t^2+25$ ，試問：  
當  $t=\frac{1}{2}$ (秒)時，該自由落體的速度？

(%i1)  $s(t)=-16*t^2+25;$

(%o1)  $s(t)=-16t^2+25;$



(%i2) diff(s(t),t,1);

(%o2) -32t

(%i3) t:1/2;

(%o3)  $\frac{1}{2}$

(%i4) -32\*t;

(%o4) -16

※「diff(多項式函數, 函數, n 次導數)」指令表示對一多項式函數之中特定函數進行 n 階導數。

**隨堂練習：**自由落體落下 t 秒後的距離為  $h(t) = \frac{1}{2}gt^2$ ，(g 是重力加速度)

(1) 試求自由落體在 t=2 秒的速度？

(%i1) h(t):=1/2\*g\*t^2;

(%o1)  $h(t) := \frac{1}{2}gt^2$

(%i2) diff(h(t),t,1);

(%o2) gt

(%i3) t:2;

(%o3) 2

(%i4) g\*t;

(%o4) 2g

(2) 試求落體在 t=2 秒的加速度？

(%i5) t:1;

(%o5) 1

(%i6) g\*t;



(%o6) g

t=2 秒的加速度為 2 秒時的加速度減 1 秒時的加速度

(%i7) 2\*g-g

(%o7) g

※「diff(多項式函數, 函數, n 次導數)」指令表示對一多項式函數之中特定函數進行 n 階導數。

### P.49

隨堂練習：利用定理及微分公式(一)，求下列多項式函數的導函數

(1)  $f(x) = x^3$

(%i1) diff(x^3,x,1);

(%o1)  $3x^2$

(2)  $g(x) = 5x^3$

(%i2) diff(5\*x^3,x,1);

(%o2)  $15x^2$

(3)  $p(x) = 5x^3 - 4x$

(%i3) diff(5\*x^3-4\*x,x,1);

(%o3)  $15x^2 - 4$

※「diff(多項式函數, 函數, n 次導數)」指令表示對一多項式函數之中特定函數進行 n 階導數。

例題 9：設  $f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 5x + 3$



(1) 試求  $f'(x)$  及  $f'(1)$

(%i1)  $f(x) := x^4 - 2x^3 - x^2 + 5x + 3;$

(%o1)  $f(x) := x^4 - 2x^3 - x^2 + 5x + 3$

(%i2)  $\text{diff}(f(x), x, 1);$

(%o2)  $4x^3 - 6x^2 - 2x + 5$

(%i3)  $x:1;$

(%o3) 1

(%i4)  $4x^3 - 6x^2 - 2x + 5;$

(%o4) 1

(2) 試求  $f''(x)$  及  $f''(1)$

(%i5)  $\text{kill}(\text{all});$

(%o5) done

(%i6)  $f(x) := x^4 - 2x^3 - x^2 + 5x + 3;$

(%o6)  $f(x) := x^4 - 2x^3 - x^2 + 5x + 3$

(%i7)  $\text{diff}(f(x), x, 2);$

(%o7)  $12x^2 - 12x - 2$

(%i8)  $x:1;$

(%o8) 1

(%i9)  $12x^2 - 12x - 2;$

(%o9) -2

※ 「diff (多項式函數, 函數, n 次導數)」指令表示對一多項式函數之中特定函數進行 n 階導數。



**P.50**

隨堂練習：設  $P(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 5$ ，試求：

(1)  $P'(x)$  及  $P'(0)$

(%i1) p(x):= (1/3)\*x^3 +x^2-3\*x+5;

(%o1) p(x):= $\frac{1}{3}x^3+x^2+(-3)x+5$

(%i2) diff(p(x),x,1);

(%o2)  $x^2+2x-3$

(%i3) x:0;

(%o3) 0

(%i4) x^2+2\*x-3;

(%o4) -3

(2)  $P''(x)$  及  $P''(1)$

(%i5) kill(all);

(%o5) done

(%i6) p(x):= (1/3)\*x^3 +x^2-3\*x+5;

(%o6) p(x):= $\frac{1}{3}x^3+x^2+(-3)x+5$

(%i7) diff(p(x),x,2);

(%o7)  $2x+2$

(%i8) x:1;

(%o8) 1

(%i9) 2\*x+2

(%o9) 4

※「diff (多項式函數, 函數, n 次導數)」指令表示對一多項式函數之中特定函數進



行  $n$  階導數。

**例題 10**：設  $f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$  之圖形為  $\Gamma$ ，試求的水平切線及對應的切點坐標。

## P.51

**隨堂練習**：設二次函數  $f(x)=x^2-4x+7$  之圖形為  $\Gamma$  (拋物線)

- (1) 求的水平切線及對應的切點。
- (2) 試問：水平切線對應的切點是否為拋物線的頂點？

## P.51 習題 1-3

Part A

1. 設  $f(x)=x^3$ ，請按下列程序求出導數  $f'(2)$

(1) 求出  $y$  差量  $\Delta y = f(2+\Delta x) - f(2)$  ( $\Delta x \neq 0$ )

(2) 化簡差商  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x}$

(3) 求出極限  $f'(2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x}$

2. 計算下列各函數在  $x=3$  的導數

(1)  $f(x)=5$





(%i1) diff(5,x,1);

(%o1) 0

(%i2) x:3;

(%o2) 3

(%i3) 0

(%o3) 0

(2)  $g(x) = -7x + 2$

(%i4) kill(all);

(%o4) done

(%i5) diff(-7\*x+2,x,1);

(%o5) -7

(%i6) x:3;

(%o6) 3

(%i7) -7;

(%o7) -7

(3)  $h(x) = x^2 - 2x$

(%i8) kill(all);

(%o8) done

(%i9) diff(x^2-2\*x,x,1);

(%o9) 2x-2

(%i10) x:3

(%o10) 3



(%i11) 2\*x-2;

(%o11) 4

※「diff (多項式函數, 函數, n 次導數)」指令表示對一多項式函數之中特定函數進行 n 階導數。

3. 於下列所給的函數  $y=f(x)$  的圖形  $\Gamma$  上, 試求  $\Gamma$  於  $x=1$  處的切點  $P(1, f(1))$ , 切線斜率  $f'(1)$  及切線方程式  $y-f(1)=f'(1)(x-1)$

(1)  $f(x)=-x^2+2$

(2)  $f(x)=\frac{1}{2}x^2+x$

4. 已知函數  $y=g(x)$  的圖形在  $x=3$  處之法線方程式為  $y-5=-\frac{2}{3}(x-3)$

(1) 求  $g(3)$  及  $g'(3)$

(%i1)  $g(x):=(-2/3)*(x-3)+5;$

(%o1)  $g(x):=-\frac{2}{3}(x-3)+5$

(%i2)  $g(3);$

(%o2) 5

(%i3)  $\text{diff}(g(x),x,1);$

(%o3)  $-\frac{2}{3}$

(%i4)  $x:3;$

(%o4) 3

(%i5)  $-2/3;$

(%o5)  $-\frac{2}{3}$

※「diff (多項式函數, 函數, n 次導數)」指令表示對一多項式函數之中特定函數進行 n 階導數。



(2)  $y=g(x)$ 之圖形在  $x=3$  處的切線方程式

5. 有一個質點 P 在直線上運動，其位移  $s$  與時間  $t$  之函數關係為  $S(t)=t^3-t$ ，試求：

(1) 質點 P 在  $t=2$  至  $t=4$  之間的平均速度

(%i1)  $s(t):=t^3-t$ ;

(%o1)  $s(t):=t^3-t$

(%i2)  $(s(4)-s(2))/(4-2)$ ;

(%o2) 27

(2) 質點 P 在  $t=2$  的(瞬時)速度及加速度

(%i3)  $\text{diff}(s(t),t,1)$ ;

(%o3)  $3t^2-1$

(%i4)  $\text{diff}(s(t),t,2)$ ;

(%o4)  $6t$

(%i5)  $t:2$ ;

(%o5) 2

(%i6)  $3*t^2-1$ ;

(%o6) 11

(%i7)  $6*t$ ;

(%o7) 12

※「diff(多項式函數, 函數, n 次導數)」指令表示對一多項式函數之中特定函數進行 n 階導數。



6. 利用”n 次多項式函數  $P(x)$  之導函數公式”，求導函數  $P'(x)$ 、 $P''(x)$  與導數  $P'(1)$ 、 $P''(1)$

(1)  $P(x) = x^6 - x^4 + 2x - 3$

(a)  $P'(x)$

(%i1) p(x):=x^6-x^4+2\*x-3;

(%o1) p(x):=x^6-x^4+2x-3

(%i2) diff(p(x),x,1);

(%o2)  $6x^5-4x^3+2$

(b)  $P''(x)$

(%i3) diff(p(x),x,2);

(%o3)  $30x^4-12x^2$

(c)  $P'(1)$

(%i4) x:1;

(%o4) 1

(%i5) 6\*x^5-4\*x^3+2;

(%o5) 4

(d)  $P''(1)$

(%i6) 30\*x^4-12\*x^2

(%o6) 18

(2)  $P(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 5$

(a)  $P'(x)$

(%i8) kill(all);



(%o8) done

(%i9)  $p(x):=(1/4)*x^4+(1/3)*x^3-(1/2)*x^2+x-5;$

(%o9)  $P(x):=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+(-\frac{1}{2})x^2+x-5$

(%i10)  $\text{diff}(p(x),x,1);$

(%o10)  $x^3+x^2-x+1$

(b)  $P''(x)$

(%i11)  $\text{diff}(p(x),x,2);$

(%o11)  $3x^2+2x-1$

(c)  $P'(1)$

(%i12)  $x:1;$

(%o12) 1

(%i13)  $x^3+x^2-x+1;$

(%o13) 2

(d)  $P''(1)$

(%i14)  $3*x^2+2*x-1;$

(%o14) 4

※「diff (多項式函數, 函數, n 次導數)」指令表示對一多項式函數之中特定函數進行 n 階導數。

## P.53

### Part B

1. 試求通過曲線  $\Gamma: y=x^3+1$  外一點  $P(0, 3)$  與曲線  $\Gamma$  相切的直線方程式, 並求切點



Q 的坐標。

2. 已知  $Q(1, -3)$  在曲線  $\Gamma: y = x^3 - 4x$ ，以點  $Q(1, -3)$  為切點之切線為  $L$ ，試求：

(1)  $L$  的斜率

(2)  $L$  的方程式

(3)  $L$  與  $\Gamma$  之所有交點坐標

## 第一章 綜合練習

### P.54

#### Part A

1. 下圖為阿寶騎摩托車旅的”距離  $S$ -時間  $T$ ”的關係圖

(1) 上午 8 點離家至下午 2 點抵達目的，一共騎了多少公里？

(2) 第一次停駛休息是離家多遠時？休息時間多久？

(3) 第二次停駛(午餐、休息)，共花多久時間？

(4) 哪一個時段之”平均速度”最快？停駛除外，哪一個時段之平均速度最慢？

(5) 上午 9 點 10 分時，離家多遠？



- (6) 摩托車從家行駛至下列距離時，是什麼時間？
- (7) 計算摩托車”全部行駛時間”(停駛時間除外)的平均速度

### P.55

2. 有 A、B 兩座米倉，分別儲米 50 公噸、30 公噸，從 A 倉運米到 C、D 兩村其運費分別為 20 元/公噸、26 元/公噸；從 B 倉運米至 C、D 兩村其運費分別為 18 元/公噸、22 元/公噸。現已知 C 村需米 35 公噸、D 村需米 45 公噸，試算出如何配送運米費用最低？

- (1) 設 A 倉運米  $x$  公噸至 C 地，則 A 倉運米至 D 地多少公噸？B 倉運米至 C 地多少公噸？B 倉運米至 D 地多少公噸？
- (2) 運費  $f(x) = ?$  (以  $x$  的函數表示)
- (3) 當  $x = a$  公噸時，運費  $f(a)$  最小，求  $a$  及  $f(a)$
- (4) 畫出  $y = f(x)$  的圖形

### Part B

1. 有一個儲水槽，附有進水、出水的水龍頭，每單位時間進水量、出水量皆為固定的。從某一時刻(計作 0)開始，前 4 分鐘內，只進水不出水，第 4 分到 12 分既進水也出水，得到”水量  $y$ -時間  $x$ ”的關係圖：

- (1) 當，將  $y$  表示成  $x$  的函數。
- (2) 前 4 分鐘，每分鐘進水多少公升？
- (3) 當時，計算每分鐘放水多少公升？
- (4) 若從第 12 分鐘後，只出水不進水，求  $y$  與  $x$  的關係式，並圖示



2. 求下列函數的極限

(1)  $\lim_{x \rightarrow -2} x^3 + 3x + 5$

(%i1) limit(x^3+3\*x+5,x,-2);

(%o1) -9

(2)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3}$

(%i2) limit((x^3-27)/(x-3),x,3);

(%o2) 27

(3)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$

(%i3) limit((1/(1-x))-(3/(1-x^3)),x,1);

(%o3)

※ 「limit (變數算式, 變數, 變數值)」指令表示變數值帶入變數算式, 求得算式趨近值。

### P.56

3. 若極限  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - ax - 4}{x - 2}$  存在, 試求 a 值及極限值

4. 設  $y = x^3 - 3x$  之圖形為  $\Gamma$ , 求  $\Gamma$  的水平切線及對應的切點坐標

5. 設  $y = x^3 - 3x + 5$  之圖形為  $\Gamma$ , 求”斜率為 1 且與  $\Gamma$  相切”的切線方程式及對應的切點坐標。

6. 設  $f(x) = x^5$ , 試用導函數的定義:  $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ ; 證明:  $f'(x) = 5x^4$





## 第二章 導函數的應用

### 2-1 多項式函數圖形的描繪

#### P.61

**例題 1：**試討論函數  $f(x) = x^3 - 3x + 1$  的遞增與遞減的區間。

#### P.62

**隨堂練習：**試討論函數  $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$  的遞增與遞減的區間。

**例題 2：**設函數  $f(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 1$



- (1) 討論函數  $f(x)$  的遞增與遞減的區間。
- (2) 找出函數  $f(x)$  圖形遞增、遞減變化的轉折點。
- (3) 根據(1)與(2)的結果，描繪  $f(x)$  在區間  $[-2, 4]$  的大略圖形。

**P63**

**例題 3：**設函數  $f(x) = x^3 + ax^2 + ax + 2$  在實數  $R$  上為遞增函數，試求  $a$  值的範圍。

**P64**

**隨堂練習：**承接例題 3. 當函數  $f(x) = x^3 + ax^2 + ax + 2$  在實數  $R$  上為遞增函數時，則下列哪些圖形可能為函數  $y = f(x)$  的部分圖形。

**P66**

**例題 4：**討論函數  $f(x) = x^4 - 6x^2 + 3$  圖形的遞增、遞減與凹向性。

**P68**

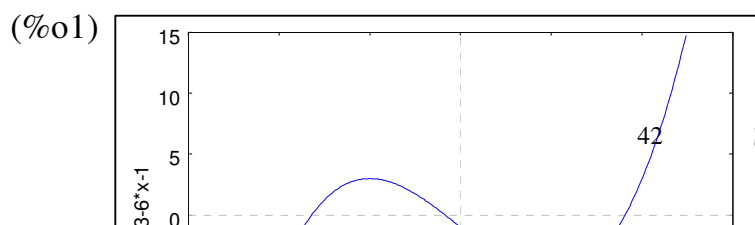
**隨堂練習：**延續例題 2，討論函數  $f(x) = x^4 - 6x^2 + 3$  圖形的凹向性，並求函數圖形的反曲點。

**P69**

**例題 5：**試利用微分方程描繪函數  $f(x) = 2x^3 - 6x - 1$  的圖形。

```
(%i1) plot2d([2*x^3-6*x-1],[x,-3,3],[y,-15,15]);
```

plot2d: some values were clipped.



※「plot2d ([方程式],[x,最小值,最大值],[y, 最小值,最大值])」; 指令表示繪出方程式之圖形, 其中 x 軸刻度介於最小值~最大值之間、y 軸刻度介於最小值~最大值之間。

## P69

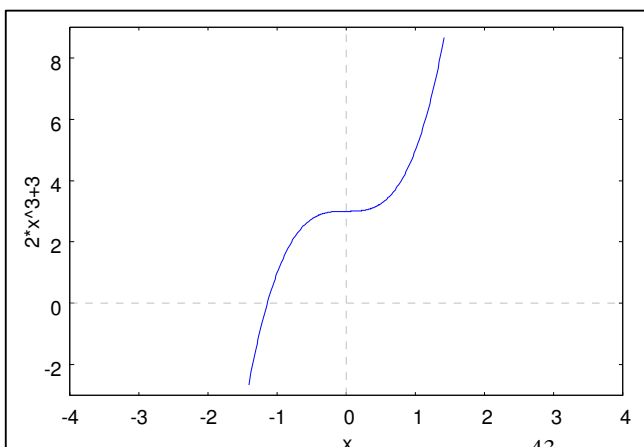
### 例題 6 :

(1) 描繪函數  $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 3$  , 並標示函數圖形的反曲點及過反曲點的切線。

```
(%i1) plot2d([2*x^3-6*x+6*x+3],[x,-4,4],[y,-3,9]);
```

plot2d: some values were clipped.

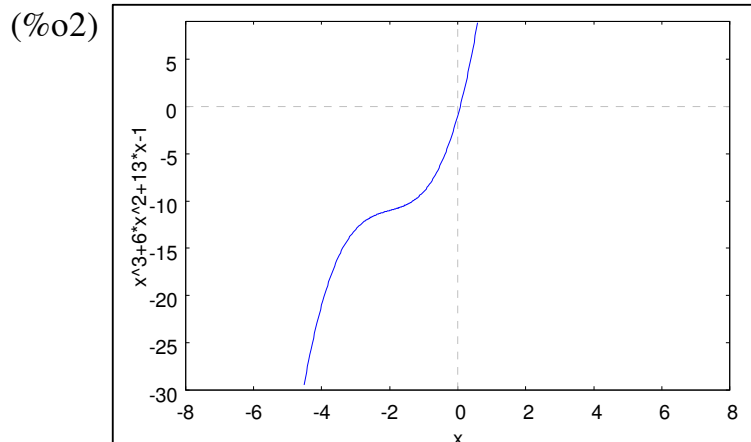
```
(%o1)
```



(2) 描繪函數  $g(x) = x^3 + 6x^2 + 13x - 1$ ，並標示函數圖形的反曲點及過反曲點的切線。

```
(%i2) plot2d([x^3+6*x^2+13*x-1],[x,-8,8],[y,-30,9]);
```

plot2d: some values were clipped.



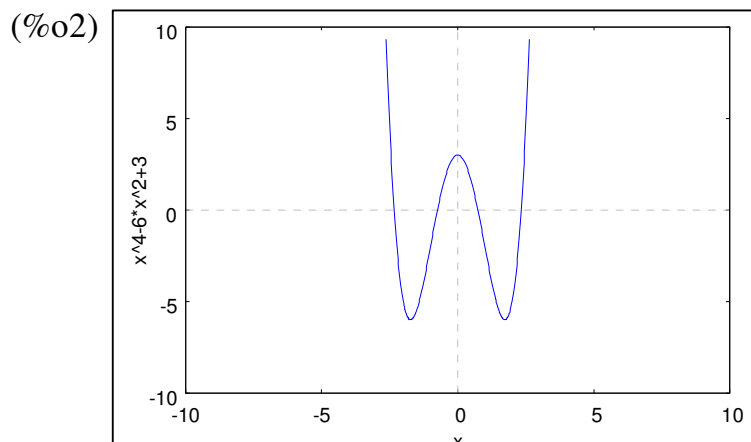
※「plot2d([方程式],[x,最小值,最大值],[y, 最小值,最大值])」；指令表示繪出方程式之圖形，其中 x 軸刻度介於最小值~最大值之間、y 軸刻度介於最小值~最大值之間。

## P68

**隨堂練習：**延續例題 4，得知的訊息，描繪函數  $f(x) = x^4 - 6x^2 + 3$  的圖形。

```
(%i2) plot2d([x^4-6*x^2+3],[x,-10,10],[y,-10,10]);
```

plot2d: some values were clipped.



※「plot2d ([方程式],[x,最小值,最大值],[y, 最小值,最大值])」; 指令表示繪出方程式之圖形,其中 x 軸刻度介於最小值~最大值之間、y 軸刻度介於最小值~最大值之間。

## P.72 習題 2-1

### Part A

1. 試討論下列各函數的遞增與遞減區間：

(1)  $f(x) = x^2 - 2x + 4$

(2)  $g(x) = -x^3 - 6x^2 + 15x - 7$

(3)  $h(x) = x^4 - 2x^3 + 2x + 1$

2. 試討論下列各函數的凹向性，並求其反曲點：

(1)  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x$

(2)  $g(x) = x^4 - 4x^3 + x + 5$

(3)  $h(x) = x^5 - 5x^4$



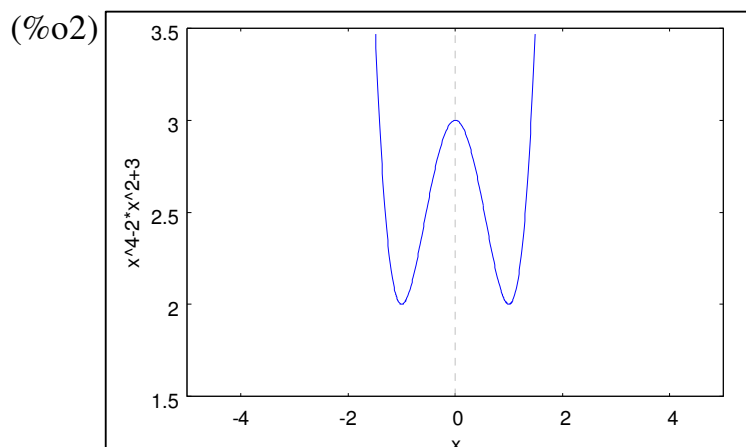
3. 某產品生產  $x$  單位所需成本為  $C(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 50$  (萬元)，其中  $x \geq 1$ ，求生產成本在何種範圍內為遞增。

4. 設函數  $f(x) = -x^3 - 2x^2 + ax + 3$  在實數  $\mathbb{R}$  上為遞減函數，試求  $a$  值的範圍。

5. 描繪函數  $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$  的圖形。

```
(%i2) plot2d([x^4-2*x^2+3],[x,-5,5],[y,1.5,3.5]);
```

plot2d: some values were clipped.



※「plot2d([方程式],[x,最小值,最大值],[y, 最小值,最大值])」；指令表示繪出方程式之圖形，其中  $x$  軸刻度介於最小值~最大值之間、 $y$  軸刻度介於最小值~最大值之間。



## Part B

1. 已知函數僅在區間 $[-1, 3]$ 上為遞減函數，試求函數圖形 $y=f(x)$ 的反曲點坐標
2. 試證：當 $x \geq 0$ 時，函數 $f(x)=x^3$ 的圖形恆在函數 $g(x)=3x^2-4x-1$ 圖形的上方。(提示：令 $h(x)=f(x)-g(x)$ ，證明當 $x \geq 0$ 時， $h(x) > 0$ 恆成立)
3. 試證：三次函數 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ， $a \neq 0$ 在實數 $\mathbb{R}$ 上為遞增函數的充要條件為 $a > 0$ 且 $b^2-3ac \leq 0$ 。

## 2-2 函數的極限

## P74

**隨堂練習：**試討論下列函數的極大值與極小值

- (1)  $f(x)=3$
- (2)  $g(x)=2x-1$
- (3)  $h(x)=2x-1, (1 \leq x \leq 5)$
- (4)  $p(x)=x^2-1$
- (5)  $q(x)=x^2-1, (1 \leq x \leq 5)$

## P.77

**例題 1：**試求函數 $f(x)=x^3-6x+9x+4, x \in [-1, 4]$ 的最大值與最小值。

**隨堂練習：**試求下列函數最大值與最小值：



(1)  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1, x \in [-1, 2]$

(2)  $f(x) = x^3, x \in [-2, 2]$

### P.78

**例題 2：**試求函數  $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 4$  在區間  $[-3, 2]$  的極大值、極小值、最大值與最小值。

### P.79

**隨堂練習：**試求函數  $f(x) = -x^4 + 2x^2 - 1$  在區間  $[-2, 2]$  的極大值、極小值、最大值與最小值。

### P.80

**例題 3：**延續例題 2，試用極值的二階檢定法，求函數  $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 4$  的極大值與極小值。

### P.81

**隨堂練習：**試求函數  $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 1$  的極大值與極小值。

**例題 4：**試求函數  $f(x) = x^5 - 10x^3 - 20x^2 - 15x + 150$  的極大值與極小值。

### P.82

**隨堂練習：**求下列函數的極大值與極小值。

(1)  $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 1$

(2)  $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$





**例題 5：**設函數  $f(x)=x^3+ax^2+bx-c$ ，其中  $a$ 、 $b$ 、 $c$  為常數。若  $f(x)$  在  $x=-1$  處有極值 2，且在  $x=3$  處也有極值，試求  $a$ 、 $b$ 、 $c$  之值。

**隨堂練習：**設函數  $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ ，其中  $a$ 、 $b$ 、 $c$  為常數。若  $f(x)$  在  $x=1$  處有極值 2，且在  $x=-2$  處也有極大值，試求  $a$ 、 $b$ 、 $c$  之值。

### P.83 習題 2-2

#### Part A

1. 試求下列各函數的極大值與極小值：

(1)  $f(x)=-x^3+3x^2-4x+5$

(2)  $g(x)=4x^3+3x^2-36x+5, x \in [-2, 2]$

(3)  $h(x)=x^4-4x^3+16x+5$

(4)  $p(x)=(x^2+x-1)^2, x \in [0, 4]$

2. 若函數  $f(x)=x^3-ax^2+(a+6)x+2$  沒有極值，則  $a$  的範圍為何？

3. 設函數  $f(x)=ax^3+x^2+bx+c$ ，其中  $a$ 、 $b$ 、 $c$  為常數。若  $f(x)$  在  $x=1$  處有極小值 3，在  $x=-2$  處有極大值，試求  $a$ 、 $b$ 、 $c$  之值。



4. 經市場調查，某商品每件成本 48 元，其售價為 120 元，每月平均可銷售出 700 件；  
若每件每次降價 3 元，則每月就可多銷售 35 件，試求：
- (1) 售價定為多少元時，每月總收入為最多？
  - (2) 售價定為多少元時，每月的利潤為最多？
5. 已知一矩形土地的周長為 60 公尺，欲使其長與寬的比值不大於 4 且不小於 2，則此矩形土地面積最大值為多少？

## Part B

1. 已知曲線  $y = x^3 + ax^2 + 4x + b$ ，以  $P(2, -3)$  為切點的切線斜率為最小，試求  $a$ 、 $b$  之值？
2. 已知  $P(x, y)$  為橢圓  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  上的一個動點，試求  $6x^2 + 3xy^2 + 4x$  的最大值與最小值

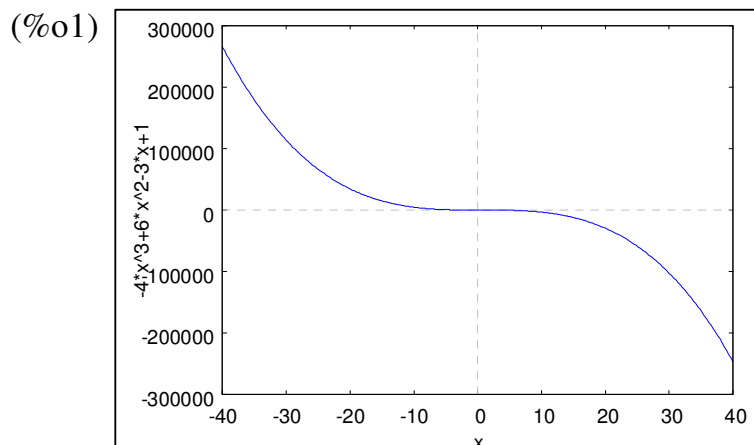
## 2-3 三次函數的圖形

## P88

## 隨堂練習：

- (1) 試描繪函數  $f(x) = -4x^3 + 6x^2 - 3x + 1$  的圖形

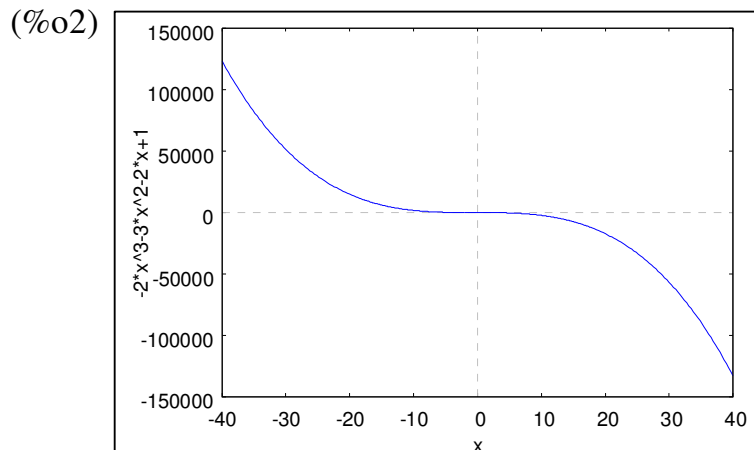
```
(%i1) plot2d([-4*x^3+6*x^2-3*x+1],[x,-40,40]);
```



- (2) 試描繪函數  $g(x) = -2x^3 - 3x^2 - 2x + 1$  的圖形



```
(%i2) plot2d([-2*x^3-3*x^2-2*x+1],[x,-40,40]);
```



※「plot2d([方程式],[x,最小值,最大值],[y, 最小值,最大值])」; 指令表示繪出方程式之圖形,其中 x 軸刻度介於最小值~最大值之間、y 軸刻度介於最小值~最大值之間。

### P89

**隨堂練習：**仿照上述的方式，整理出三次函數  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ( $a < 0$ ) 圖形的可能情形。

### P.90

**例題 1：**已知正數  $\alpha$  為三次方程式  $x^3 - x^2 - 8x + k = 0$  (其中  $k$  為定數) 的二重根，試求  $\alpha$ 、 $k$  及另一根。

令  $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + k$ ，求其導函數

```
(%i1) f(x):=x^3-x^2-8*x+k;
```

```
(%o1) f(x):=x^3-x^2+(-8)x+k
```

```
(%i2) diff(f(x),x,1);
```

```
(%o2) 3x^2-2x-8
```

```
(%i3) factor(3*x^2-2*x-8);
```

```
(%o3) (x-2)*(3*x+4)
```

$\alpha$  為  $f(x)=0$  之二重根，又  $\alpha$  為正數，故取  $\alpha=2$ ，代回  $f(x)$



(%i4) solve([f(2)=0],[k]);

(%o4) [k=12]

可知 k 為 12

(%i5) k:12;

(%o5) 12

(%i6) x^3-x^2-8\*x+k;

(%o6) x^3-x^2-8x+12

(%i7) factor(x^3-x^2-8\*x+12);

(%o7) (x-2)^2 (x+3)

\*故可知  $f(x)=0$  的另一根為-3

※「diff(多項式函數, 函數, n 次導數)」指令表示對一多項式函數之中特定函數進行 n 階導數。

※「factor( 數值 )」指令表示求因式分解。

※「solve([ 變數算式 ], [ 變數 ])」指令表示求解。

## P91

**隨堂練習：**設為實係數三次多項式，試利用微分的乘法公式證明下列的重根定理：

有重根  $\alpha$ ，即  $(x-\alpha)^2 \mid f(x) \Leftrightarrow f(\alpha)=0$  且  $f'(\alpha)=0$ 。

## P.92

**例題 2：**設  $f(x)=x^3-3x^2-9x+k$ ，試求滿足下列各條件之 k 值：

(1)  $f(x)=0$  有三相異實根。

(2)  $f(x)=0$  有一實根與二虛根。

(3)  $f(x)=0$  有二正根與一負根。



**P.93**

**隨堂練習：**設  $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x + k$ ，試求滿足下列各條件之  $k$  值：

- (1)  $f(x) = 0$  有三相異實根。
- (2)  $f(x) = 0$  有一實根與二虛根。
- (3)  $f(x) = 0$  有二負根與一正根。

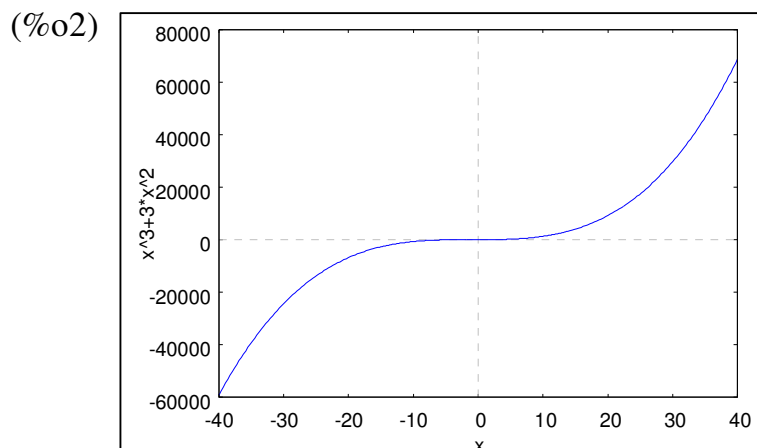
**P.93 習題 2-3**

## Part A

1. 試描繪下列各函數的大略圖形

(1)  $f(x) = x^3 + 3x^2$

(%i2) plot2d([x^3+3\*x^2],[x,-40,40]);

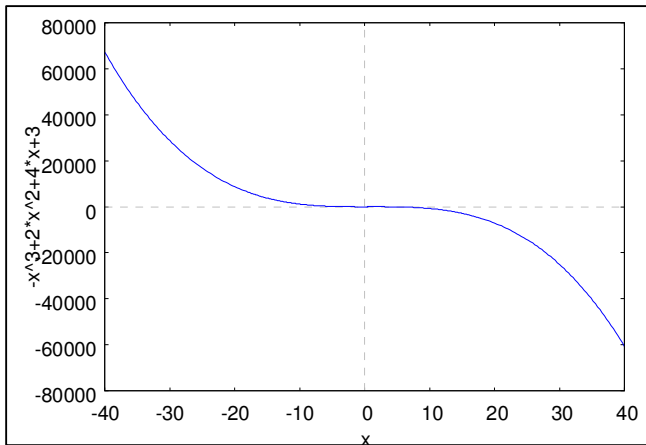


(2)  $g(x) = -x^3 + 2x^2 + 4x + 3$

(%i2) plot2d([-x^3+2\*x^2+4\*x+3],[x,-40,40]);



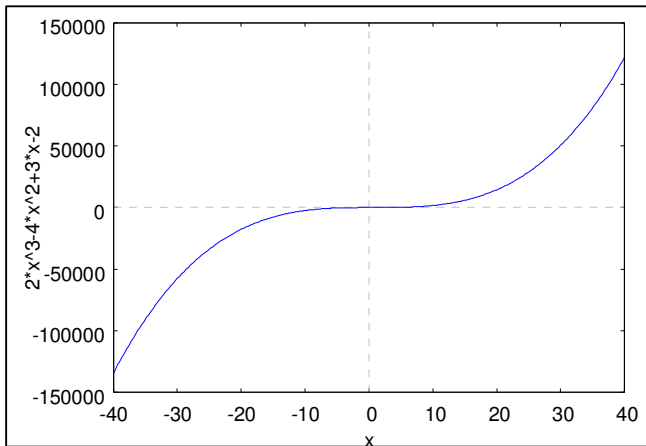
(%o2)



(3)  $h(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x - 2$

```
(%i2) plot2d([2*x^3-4*x^2+3*x-2],[x,-40,40]);
```

(%o2)



※「plot2d ([方程式],[x,最小值,最大值],[y, 最小值,最大值])」; 指令表示繪出方程式之圖形,其中 x 軸刻度介於最小值~最大值之間、y 軸刻度介於最小值~最大值之間。

2. 函數  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  的大略圖形, 試判別 a、b、c、d 之正負值



3. 若方程式  $x^3 - 3x^2 - 45x + a = 0$  有二正根與一負根，試求  $a$  值的範圍
4. 設函數  $f(x) = x^3 - 3kx^2 + k$ ，求分別滿足下列條件之  $k$  值：
- (1)  $f(x) = 0$  有三相異實根。
- (2)  $f(x) = 0$  有二負根與一正根。
5. 設  $f(x)$  是一個首項係數為 1 的實係數三次多項式， $k$  是一個常數，已知當  $k < 0$  或  $k > 4$  時， $f(x) - k = 0$  只有一個實根；當  $0 < k < 4$  時， $f(x) - k = 0$  有三個相異實根，請選出正確選項：(多選)
- (1)  $f(x) - 4 = 0$  和  $f'(x)$  有共同實根
- (2)  $f(x) = 0$  和  $f'(x)$  有共同實根
- (3)  $f(x) + 3 = 0$  的任一實根大於  $f(x) - 6 = 0$  的任一實根
- (4)  $f(x) + 5 = 0$  的任一實根小於  $f(x) - 2 = 0$  的任一實根

### Part B

1. 試證：三次方程式  $x^3 + ax + b = 0$  有三個不等實根的充要條件為  $4a^3 + 27b^2 < 0$ 。
2. 設函數  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  在  $x=1$  處有極大值 7，而  $(-1, -9)$  是其圖形的一個反曲點，試求函數  $f(x)$ 。
3. 若過原點  $O(0, 0)$  恰有兩條直線與  $f(x) = x^3 + kx^2 + 1$  的圖形相切，則  $k$  值為何？



## 2-4 極值的應用

### P.95

**例題 1：**甲船從碼頭東方駛離時，乙船恰在碼頭北方 7 公里處，正駛向碼頭。今已知甲、乙兩船的航速分別為每小時 60 公里與 30 公里，試問經過多少分鐘後，兩船相距最近？又最近距離是多少？

### P96

**隨堂練習：**求函數  $f(x) = \sqrt{(x-1)^2 + (x+3)^2 + (x-8)^2}$  的最小值。

### P97

**例題 2：**用一塊寬 3 公尺、長 8 公尺的白鐵板，先再四個角各截去相同大小的正方形，然後摺起四邊焊接起來，形成一個無蓋的長方體蓄水箱，試問在各角截去的正方形邊長應為多少，才能使水箱的容積(鐵板厚度不計)為最大？又其最大容積為多少？





**P98**

**隨堂練習：**假設有一邊長為 24 公分正方形硬紙，若要從四個角各截去相同大小的正方形，以便摺成一個紙盒，試問應如何截法，才能使紙盒的容積最大？又其容積最大為何？

**例題 3：**已知球體之半徑為  $R$ ，求其內接直圓錐的最大體積。(直圓錐的體積等於  $\frac{1}{3} \times$  底圓面積  $\times$  高)

**P99**

**隨堂練習：**承接例題 3，當球之內接直圓錐的體積最大時，求球半徑與直圓錐之底圓半徑之比例。

**P100**

**例題 4：**設  $P(0, 1)$  及曲線  $\Gamma : y = x^2 - x$ ，試在  $\Gamma$  上找一點  $Q$  使  $\overline{PQ}$  為最小。

**P101**

**隨堂練習：**設  $P(-3, 0)$  及拋物線  $\Gamma : y = x^2$ ，試在  $\Gamma$  上找一點  $Q$  使  $\overline{PQ}$  為最小。

**例題 4：**學校要製作一面等腰梯形的大型廣告看板，上底長為 14 公尺，兩腰長各為 4 公尺，若欲使其面積為最大時，其高度應為多少公尺？



**P.103** **習題 2-4**

## Part A

1. 求函數  $f(x) = (x-1)^2 + (x-2)^2 + (x-3)^2 + (x+7)^2 + (x+8)^2 + (x+9)^2$  的最小值。
2. 某大飯店有 150 間客房，每間房客住宿費若定為 2000 元時，則全數客滿；若住宿費每提高 100 元，就會多出兩間空房，假如每間客房的服務成本為 500 元，試問每間客房的住宿費定為多少元時，才能有最大的利潤？
3. 設  $P(7, 0)$  及雙區線  $\Gamma: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ ，試在  $\Gamma$  上找一點  $Q$  使  $\overline{PQ}$  為最小。
4. 假設某地區蚊子的數量與降雨量  $x$  的關係為函數  $f(x) = -x^3 + 15x^2 - 48x + 65$ ，其中  $0 \leq x \leq 10$ ，試求造成蚊子最少時的降雨量與造成蚊子最多時的降雨量？(降雨量以公厘(mm)為單位，蚊子數量以千隻為單位)。
5. 已知一球體之半徑為  $R$ ，試求其內接直圓柱的最大體積，並求當內接直圓柱有最



大體積時的高。

6. 設  $m$  為實數，已知四次方程式  $3x^4 - 4mx^3 + 1 = 0$  無實數根，求  $m$  的範圍。

### Part B

1. 半徑為 1 的圓，切掉一個圓心角為  $\theta$  的扇形後，將剩下的部分圍成一直圓錐，試求當  $\theta$  為多少時，直圓錐有最大的體積，並求此最大體積。

2. 設一直圓錐高為  $h$ ，底半徑為  $r$ ，有一直圓柱內接於此直圓錐，令直圓柱之底半徑為  $x$ ，若直圓柱之體積為  $f(x)$ ，試求：

(1) 函數  $f(x)$

(2) 直圓柱之最大體積



## 第二章 綜合練習

### P.105

#### Part A

- 右圖為  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  的大略圖形，試問下列選項何者正確？(複選)  
(1)  $a > 0$    (2)  $b > 0$    (3)  $c > 0$    (4)  $d > 0$    (5)  $b^2 - 3ac > 0$
- 某市公車票價為 15 元，每月乘客平均為 30 萬人次，為因應油價上漲，擬調整票價，經市場調查，若將票價調漲  $x\%$  時，每月乘客將減少現有人次的  $0.5x\%$ ，試問票價調整為多少元時，可使公車處每月營收最高？
- 為了刺激消費意願，某知名飯店推出自助餐每客 199 元可吃到飽的活動，一推出 800 個座位供不應求，根據問卷調查顯示，若餐費每客提高 10 元，則會流失 10 個顧客，試問餐廳欲達最高營收，每客自助餐應定為多少元？(以元為單位)
- 若函數  $f(x) = x^4 + 4kx^3 + 2x^2 + 1$  在  $x < 0$  時為遞減，在  $x > 0$  時為遞增，試求實數常數  $k$



的範圍。

5. 設  $f(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x$ ，當  $0 \leq x \leq 2$  時，試求：

(1)  $f(x)$  的極大值與極小值

(2)  $f(x)$  的最大值與最小值

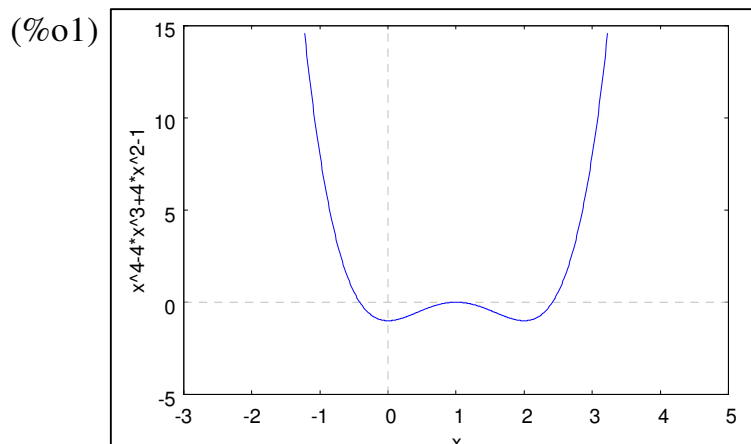
6. 設  $x \geq 0$ 、 $y \geq 0$  且  $2x + y = 1$ ，則  $2x^3 + y^3$  的最大值與最小值分別為何？

7. 設  $P(7, 1)$  且  $Q$  為曲線  $\Gamma: y = x^2 + x - 4$  上的一動點，試求  $Q$  點使  $\overline{PQ}$  為最小，此時  $\overline{PQ}$  長度為多少？

### P.106

8. 描繪  $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 1$  函數的大略圖形

(%i1) plot2d([x^4-4\*x^3+4\*x^2-1],[x,-3,5],[y,-5,15]);



※「plot2d([方程式],[x,最小值,最大值],[y, 最小值,最大值])」；指令表示繪出方程式之圖形，其中 x 軸刻度介於最小值~最大值之間、y 軸刻度介於最小值~最大值之間。



9. 設函數  $f(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x$ ，滿足下列條件之  $k$  值：

(1)  $f(x)$  沒有極限

(2)  $f(x) = 0$  沒有虛根

### Part B

1. 試利用導數的方法，證明下列伯努利不等式：設  $n$  為正整數且  $x > -1$ ，則  $(1+x)^n \geq$

$$1+nx$$

2. 設三次函數  $f(x)$  的圖形在  $x=1$  處的切線方程式為  $y=4x-3$ ，且在  $x=-1$  處有極小值 7，

試求函數  $f(x)$ 。

3. 小明為般極競賽設計看板，在一根長 3 公尺的竹竿頂端  $C$ 、平地上一點  $P$  及高牆上一點  $Q$ ，架設一個直角三角型看板， $\overline{AC} = 3$ 、 $\overline{AB} \perp \overline{AC}$ 、 $\overline{AB}$  垂直直線  $L$ ，且  $\angle CPQ = 90^\circ$ ，若竹竿與高牆相距 14 公尺(即  $\overline{AB} = 14$ )，試求可架設的直角三角形看板之最大面積為何？(選取適當的點  $P$  及  $Q$  使  $CPQ$  之面積最大)，[提示：利用  $\sin(\angle APC) = \sin(\angle PQB)$ ，求出  $\overline{PQ}$ ]



### 第三章 多項式函數的積分

#### 3-1 黎曼和與面積

##### P.114

**例題 1：**若  $f(x)=3x-2$  的圖形與直線  $x=1$ 、 $x=3$  及  $x$  軸所圍成的圖形區域為  $R$ ，將  $[1, 3]$  平分成  $n$  等分，求  $f(x)$  在  $[1, 3]$  上的上黎曼和與下黎曼和，並求區域  $R$  的面積。

##### P.115

**隨堂練習：**在  $x$  軸上，將  $[0, 2]$  平分成  $n$  等分，利用分割逼近的方法求  $f(x)=2x+3$  的圖形與直線  $x=0$ ， $x=2$  及  $x$  軸所圍成的圖形面積。

##### P.118

**例題 2：**利用“分割求近似和”與“逼近求極限值”的方法，求函數  $f(x)=x^3$  的圖形與直線  $x=0$ 、 $x=2$  及  $x$  軸所圍成區域的面積。

**例題 3：**已知圓  $x^2+y^2=a^2$ ，其面積為  $\pi a^2$ ，試利用“黎曼和”求橢圓  $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$  的面積(其



中  $a>0$ 、 $b>0$ )。

### P.119

**隨堂練習：** 求出橢圓  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  的面積。

### P.122

**例題 4：** 設  $f(x) = x^2 - 4$  多項式函數， $0 \leq x \leq 3$

- (1) 將  $[0, 3]$  平分分成 6 等分，分割： $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_6 = 3$ ，在每一小段  $[x_{i-1}, x_i]$  中取  $t_i = x_i$ ，試求  $f(x)$  在  $[0, 3]$  對於分割的黎曼和。
- (2) 將  $[0, 3]$  平分分成  $n$  等分，分割： $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 3$ ，在每一小段  $[x_{i-1}, x_i]$  中取  $t_i = x_i$ ，試求  $f(x)$  在  $[0, 3]$  對於分割的黎曼和  $(R_n)$ 。
- (3) 試求  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n$  之值，並說明其意義。





**P.123** **習題 3-1**

## Part A

1. 對於  $f(x)=x^2$  的圖形與直線  $x=2$ ， $x=4$  及  $x$  軸所圍成的區域。

(1) 將區間  $[2, 4]$  分成 4 等分，試求其上黎曼與下黎曼和。

(2) 將區間  $[2, 4]$  分成 4 等分，分割： $2=x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4=4$ ，取  $t_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$ ， $i=1, 2, 3, 4$ ，試求黎曼和  $\sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x$  的值。

(3) 將區間  $[2, 4]$  分成  $n$  等分，分割： $2=x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4=4$ ，取  $t_i=x_i$ ， $i=1, 2, \dots, n$ ，試求黎曼和  $\sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x$

(4) 求區域的面積

2. 利用”分割求近似和”與”逼近求極限值”的方法，求函數  $f(x)=2x^2$  的圖形與直線  $x=1$ 、 $x=2$  及  $x$  軸所圍成區域的面積。

3. 設  $f(x)$  為  $[a, b]$  上的多項函數，平分  $[a, b]$  成  $n$  等分，分割：

$a=x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n=b$ ，取  $t_i=x_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ )，設  $R_n(f)$  代表在  $[a, b]$  上的黎曼和； $y=f(x)$  的圖形與直線  $x=a$ 、 $x=b$  及  $x$  軸所圍成的區域被  $x$  軸分成三個部分，設



三個區域分別為  $R_1$ 、 $R_2$ 、 $R_3$ ，令區域  $R_1$ 、 $R_2$ 、 $R_3$  的面積分別為  $m$ 、 $n$ 、 $k$ ，試用  $m$ 、 $n$ 、 $k$  來表示  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(f)$  的值。

### P.124

#### Part B

1. 設多項式函數  $f(x) = x^2 - 9$ ， $0 \leq x \leq 4$

(1) 將  $[0, 4]$  平分成 8 等分，分割： $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_8 = 4$ ，在每一小段  $[x_{i-1}, x_i]$  中取  $t_i = x_i$ ， $i = 1, 2, \dots, n$ ，試求  $f(x)$  在  $[0, 4]$  對於分割的黎曼和。

(2) 將  $[0, 4]$  平分成  $n$  等分，分割： $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 4$ ，在每一小段  $[x_{i-1}, x_i]$  中取  $t_i = x_i$ ， $i = 1, 2, \dots, n$ ，試求  $f(x)$  在  $[0, 4]$  對於分割的黎曼和  $\sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \cdot \frac{4}{n}$ 。

(3) 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \cdot \frac{4}{n}$ ，並解釋這個極限值的意義。

2. 已知在圓  $x^2 + y^2 = 25$  內含一橢圓  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ，設圓內部在兩直線  $x=1$  及  $x=2$  之間面積為  $R_1$ ，而橢圓內部在此兩直線之間的面積為  $R_2$ ，則  $\frac{R_1}{R_2}$  的值為何？



### 3-2 定積分

#### P.127

##### 例題 1：

1. 利用定積分的符號來表示圖中上半圓區域的面積。
2. 用定積分與面積的關係求  $\int_0^2 (3x-2)dx$  的值。

(%i1) integrate(3\*x-2,x,0,2);

(%o1) 2

※「integrate (多項式函數, 函數, 函數起始值, 函數結束值)」指令表示對一多項式函數之中特定函數進行積分, 積分範圍為函數起始值至函數結束值。

#### P.128

##### 隨堂練習：

1. 已知半徑等於  $r$  的圓面積為  $\pi r^2$ , 試利用這個結果計算  $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$  的值。

(%i1) integrate(sqrt(1-x^2),x,0,1);

(%o1)  $\frac{\pi}{4}$



2. 用定積分與面積的關係求  $\int_0^3 (2x-4)dx$  的值。

(%i1) integrate(2\*x-4,x,0,3);

(%o1) -3

※「integrate (多項式函數, 函數, 函數起始值, 函數結束值)」指令表示對一多項式函數之中特定函數進行積分, 積分範圍為函數起始值至函數結束值。

### 例題 2 :

1. 設  $f(x)=x^2-2x$  是定義域在區間  $[0, 3]$  上的多項函數, 將  $[0, 3]$  平分成 6 等分, 即 :

$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_6 = 3$ , 取  $t_i = x_i$  為  $[x_{i-1}, x_i]$  的右端點  $x_i$ , 試求黎曼和  $\sum_{i=1}^6 f(t_i) \cdot \Delta x$  的值。

2. 試求  $\int_0^3 (x^2 - 2x)dx$  的值。

### P.130

#### 隨堂練習 :

1. 例題 2 中, 若  $t_i$  取左端點  $x_{i-1}$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ , 計算黎曼和  $\sum_{i=1}^n f(t_i) \cdot \Delta x$

2. 試求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(t_i)$  的值並與例題 2 的結果比較。

例題 3 : 試求  $\int_0^b x^2 dx$  的值, 其中  $b > 0$ 。

### P.131

#### 隨堂練習 : 試求下列的值 :

1.  $\int_0^b 1 dx$ , ( $b > 0$ )。

2.  $\int_0^b x dx$ , ( $b > 0$ )。



**P.134**

**例題 4：**利用定積分的性質，計算下列定積分的值：

1.  $\int_0^5 (4+3x^2)dx$

(%i1) integrate(4+3\*x^2,x,0,5);

(%o1) 145

2.  $\int_3^0 x^2 dx$

(%i1) integrate(x^2,x,3,0);

(%o1) -9

※ 「integrate (多項式函數, 函數, 函數起始值, 函數結束值)」指令表示對一多項式函數之中特定函數進行積分，積分範圍為函數起始值至函數結束值。

**隨堂練習：**設  $f(x)$  與  $g(x)$  為多項式，已知  $\int_0^5 f(x)dx=15$  且  $\int_0^5 g(x)dx=4$ ，試求

$$\int_0^5 [2f(x)-3g(x)]dx \text{ 的值。}$$

**例題 5：**設  $f(x)$  為一個多項式函數，且在  $[0, 7]$  中的值大於 0，已知定積分  $\int_0^7 f(x)dx=15$ ，

$$\int_0^3 f(x)dx=8，\text{ 試求 } \int_3^7 f(x)dx \text{ 的值。}$$

**P.135**

**隨堂練習：**設  $f(x)$  為多項式，已知  $\int_1^5 f(x)dx=m$  且  $\int_4^5 f(x)dx=n$ ，試求的值  $\int_1^4 f(x)dx$ 。

**P.142**

**例題 6：**試求定積分  $\int_1^3 (2x^3+4x^2-x+5)dx$  的值。



(%i1) integrate(2\*x^3+4\*x^2-x+5,x,1,3);

(%o1)  $\frac{242}{3}$

※ 「integrate (多項式函數, 函數, 函數起始值, 函數結束值)」指令表示對一多項式函數之中特定函數進行積分, 積分範圍為函數起始值至函數結束值。

**隨堂練習：**試求定積分的值。

(1)  $\int_{-1}^2 (x^3 - 2x + 5) dx$

(%i1) integrate(x^3-2\*x+5,x,-1,2);

(%o1)  $\frac{63}{4}$

(2)  $\int_3^2 (x^3 + 2x + 5) dx$

(%i2) integrate(x^3-2\*x+5,x,3,2);

(%o2)  $-\frac{65}{4}$

※ 「integrate (多項式函數, 函數, 函數起始值, 函數結束值)」指令表示對一多項式函數之中特定函數進行積分, 積分範圍為函數起始值至函數結束值。

## P.144

**例題 7：**試求多項式函數  $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$  的圖形與  $x$  軸所圍成的區域面積。

## P.145

**隨堂練習：**試求多項式函數  $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$  的圖形與  $x$  軸所圍成的區域面積。

**例題 8：**利用  $\int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \pi R^2$  這個事實, 求函數  $f(x) = 2 + \sqrt{1 - x^2}$  的圖形與直線  $x = -1$ ,

$x = 1$  與  $x$  軸所圍成的區域面積。



**P.146**

**隨堂練習：**利用  $\int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \pi R^2$  這個事實，求函數  $f(x) = 2\sqrt{9 - x^2}$  的圖形與直線

$x = -3$ ， $x = 3$  與  $x$  軸所圍成的區域面積。

**P.146** **習題 3-2**

## Part A

1. 設函數  $f(x) = 4 - x^2$  定義在區間  $[0, 3]$  上，

(1) 將區間  $[0, 3]$  平均分成 6 等分，其分割為： $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_6 = 3$ ，取  $t_i = x_i$  為  $[x_{i-1}, x_i]$  的左端點，試求黎曼和  $\sum_{i=1}^6 f(t_i) \cdot \Delta x$ ，其中  $\Delta x = \frac{3}{6}$ 。

(2) 將區間  $[0, 3]$  平分成  $n$  等分，其分割為： $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 3$ ，取  $t_i$  為  $[x_{i-1}, x_i]$  的左端點，試求黎曼和  $\sum_{i=1}^n f(t_i) \cdot \Delta x$ ，其中  $\Delta x = \frac{3}{n}$ 。

(3) 利用黎曼和求  $\int_0^3 (4 - x^2) dx$

2. 設二次函數  $f(x) = x^2 + 2x - 3$ ，將區間  $[0, 2]$  平分成  $n$  等分，分割：

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 2,$$

(1) 試求黎曼和  $\sum_{i=1}^n f(t_i) \cdot \Delta x$ ，其中  $\Delta x = \frac{2}{n}$

(2) 試求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(t_i) \cdot \Delta x$

(3) 試求  $\int_0^2 (x^2 + 2x - 3) dx$



**P.147**

3. 設  $f(x)$  為一個多項式函數，已知定積分  $\int_a^b f(x)dx = m$ 、 $\int_a^b g(x)dx = n$ ，試利用  $m$ 、 $n$  來

表示下列定積分之值。

(1)  $\int_a^b 2f(x)dx$

(2)  $\int_a^b [3f(x) - g(x)]dx$

(3)  $\int_a^b f(x)dx$

4. 已知多項式函數  $f(x)$  定義在  $[a, b]$  上， $c$  為  $[a, b]$  內任一點，下列各式何者成立？

(1)  $\int_a^a f(x)dx = 0$

(2)  $\int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(x)dx$

(3)  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

(4)  $\int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_a^b f(x)dx$

(5)  $\int_a^b f(x)dx = 0$  表示  $f(x)$  的圖形與直線  $x=a$ 、 $x=b$  及  $x$  軸所圍成的區域面積。

5. 求出下列多項式函數的不定積分：

(1)  $\int 5dx$

(2)  $\int (u+2)^3 du$

(3)  $\int (x^3 - 2x + 5)dx$

(4)  $\int (t - 2t^3 + 2t^2 + t - 1)dt$

6. 利用反導函數求下列定積分：

(1)  $\int_1^3 (x^2 - 3)dx$

(%i1) integrate(x^2-3,x,1,3);





$$(\%o1) \frac{8}{3}$$

$$(2) \int_5^2 (4r^3 - r + 1) dr$$

(%i2) integrate(4\*r^3-r+1,r,5,2);

$$(\%o2) -\frac{1203}{2}$$

$$(3) \int_{-1}^2 (y-1)^3 dy$$

(%i3) integrate((y-1)^3,y,-1,2);

$$(\%o3) -\frac{15}{4}$$

$$(4) \int_{-1}^{-2} (5x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 4x - 1) dx$$

(%i4) integrate(5\*x^4-4\*x^3+6\*x^2+4\*x-1,x,-1,-2);

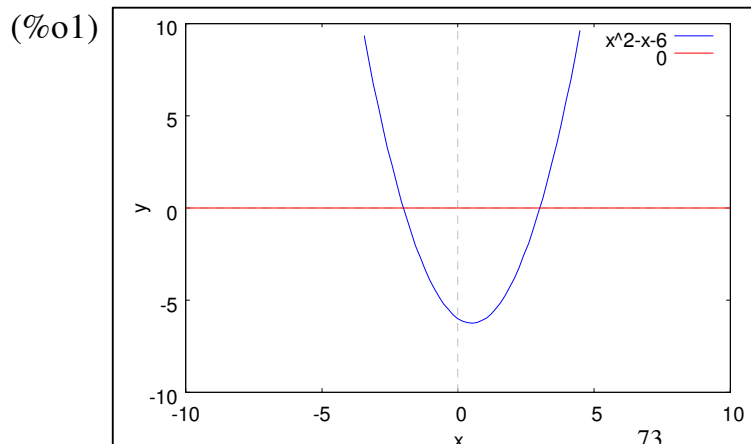
$$(\%o4) -53$$

※ 「integrate (多項式函數, 函數, 函數起始值, 函數結束值)」指令表示對一多項式函數之中特定函數進行積分, 積分範圍為函數起始值至函數結束值。

7. 試求  $y = x^2 - x - 6$  的圖形與  $x$  軸所圍成的區域面積

(%i1) plot2d([x^2-x-6,0],[x,-10,10],[y,-10,10]);

plot2d: some values were clipped.



```
(%i2) solve([y= x^2-x-6,y=0],[x,y]);
```

```
(%o2) [[x=-2,y=0],[x=3,y=0]]
```

求出兩拋物線交點為  $(-2, 0)$  與  $(3, 0)$ ，且  $x$  軸 ( $y=0$ ) 在此區域之值大於  $y = x^2 - x - 6$ 。

```
(%i3) integrate(0-(x^2-x-6),x,-2,3);
```

```
(%o3)  $\frac{125}{6}$ 
```

※「`plot2d` (`[方程式],[x,最小值,最大值],[y, 最小值,最大值]`)」；指令表示繪出方程式之圖形，其中  $x$  軸刻度介於最小值~最大值之間、 $y$  軸刻度介於最小值~最大值之間。

※「`solve` (`[ 變數算式 ],[ 變數 ]`)」指令表示求解。

※「`integrate` (`多項式函數, 函數, 函數起始值, 函數結束值`)」指令表示對一多項式函數之中特定函數進行積分，積分範圍為函數起始值至函數結束值。

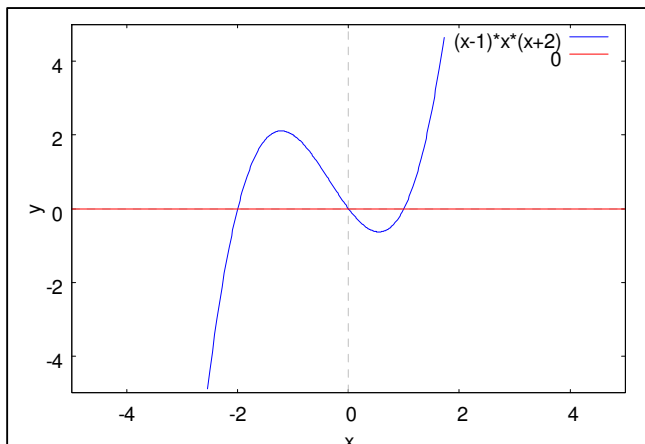
## P.148

8. 試求  $y = x(x+2)(x-1)$  與  $x$  軸所圍成的區域面積

```
(%i1) plot2d([x*(x+2)*(x-1),0],[x,-5,5],[y,-5,5]);
```

plot2d: some values were clipped.

```
(%o1)
```



(%i2) solve([y= x\*(x+2)\*(x-1),y=0],[x,y]);

(%o2) [[x=-2,y=0],[x=1,y=0],[x=0,y=0]]

求出兩線交點為  $(-2, 0)$ 、 $(1, 0)$  與  $(0, 0)$ ，可分為： $x$  為  $-2 \sim 0$  區域 ( $y = x(x+2)(x-1)$  之值大於  $x$  軸)、 $x$  為  $0 \sim 1$  區域 ( $x$  軸之值大於  $y = x(x+2)(x-1)$ )。

(%i3) integrate((x\*(x+2)\*(x-1))-0,x,-2,0)+ integrate(0-(x\*(x+2)\*(x-1)),x,0,1);

(%o3)  $\frac{37}{12}$

※「plot2d ([方程式],[x,最小值,最大值],[y, 最小值,最大值])」；指令表示繪出方程式之圖形，其中  $x$  軸刻度介於最小值~最大值之間、 $y$  軸刻度介於最小值~最大值之間。

※「solve([ 變數算式 ],[ 變數 ])」指令表示求解。

※「integrate (多項式函數, 函數, 函數起始值, 函數結束值)」指令表示對一多項式函數之中特定函數進行積分，積分範圍為函數起始值至函數結束值。

9. 試求  $y = x^3 + 4x^2 + x - 6$  的圖形與直線  $x=0$ 、 $x=4$  及  $x$  軸所圍成的區域面積。

## Part B

1. 利用定積分求無窮級數的和：

(1) 設  $f(x) = (1+x)^3$ ，試用  $f(x)$  在  $[0, 2]$  上的黎曼和來表示

(2) 利用定積分求無窮級數  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{2}{n} (1 + \frac{2i}{n})^3$  的和。

2. 如右圖所示，設連續函數  $y=g(x)$  的圖形包含兩條直線與一個半圓，試利用圖形的面積來計算下列定積分：

(1)  $\int_0^2 g(x) dx$

(2)  $\int_2^6 g(x) dx$

(3)  $\int_0^8 g(x) dx$



3. 設  $f(x)$  為一個多項式函數，且滿足  $\int_a^x f(t)dt = x^2 - 3x$

(1) 求  $f(x)$

(2) 求  $a$

4. 設與為兩個多項式函數，若，且，其中  $a$ 、 $b$  為兩個常數，試求這兩個多項式函數，及常數  $a$ 、 $b$

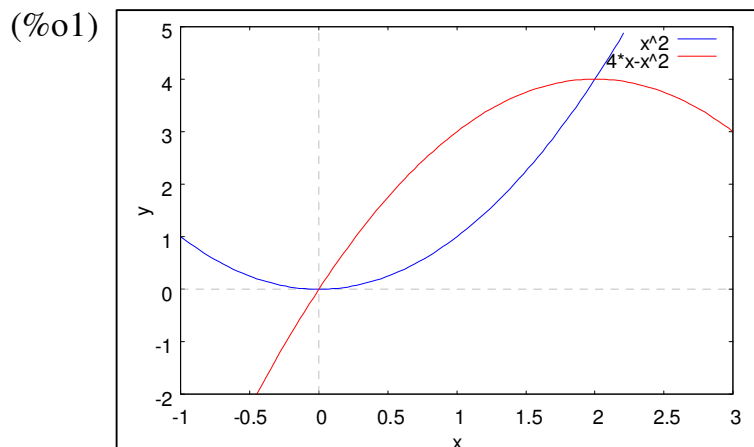
### 3-3 定積分的應用

#### P.150

**例題 1**：試求拋物線  $y = x^2$  與  $y = 4x - x^2$  所圍成的區域面積。

```
(%i1) plot2d([x^2,4*x-x^2],[x,-1,3],[y,-2,5]);
```

plot2d: some values were clipped.



```
(%i2) solve([y=x^2,y=4*x-x^2],[x,y]);
```

```
(%o2) [[x=2,y=4],[x=0,y=0]]
```

求出兩拋物線交點為  $(2, 4)$  與  $(0, 0)$ ，且  $y = x^2$  在此區域之值大於  $y = 4x - x^2$ 。

```
(%i3) integrate((4*x-x^2)-x^2,x,0,2);
```

```
(%o3) 8/3
```

※「plot2d([方程式],[x,最小值,最大值],[y,最小值,最大值])」；指令表示繪出方程式



之圖形，其中  $x$  軸刻度介於最小值~最大值之間、 $y$  軸刻度介於最小值~最大值之間。

※ 「`solve([ 變數算式 ], [ 變數 ])`」指令表示求解。

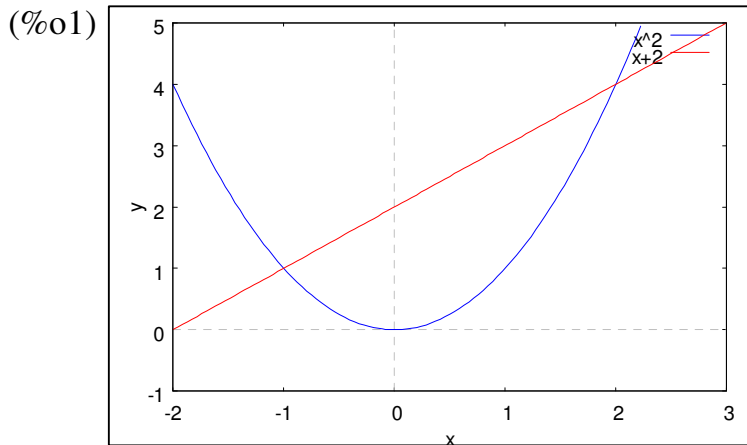
※ 「`integrate(多項式函數, 函數, 函數起始值, 函數結束值)`」指令表示對一多項式函數之中特定函數進行積分，積分範圍為函數起始值至函數結束值。

### P.151

隨堂練習：試求直線  $y=x+2$  與拋物線  $y=x^2$  所圍成的區域面積。

```
(%i1) plot2d([x^2, x+2],[x,-2,3],[y,-1,5]);
```

plot2d: some values were clipped.



```
(%i2) solve([y=x+2,y=x^2],[x,y]);
```

```
(%o2) [[x=-1,y=1],[x=2,y=4]]
```

求出兩線交點為  $(-1, 1)$  與  $(2, 4)$ ，且在此區域  $y=x+2$  之值大於  $y=x^2$ 。

```
(%i3) integrate((x+2)-x^2,x,-1,2);
```

```
(%o3)  $\frac{9}{2}$ 
```

※ 「`plot2d([方程式],[x,最小值,最大值],[y,最小值,最大值])`」；指令表示繪出方程式之圖形，其中  $x$  軸刻度介於最小值~最大值之間、 $y$  軸刻度介於最小值~最大值之間。

※ 「`solve([ 變數算式 ], [ 變數 ])`」指令表示求解。



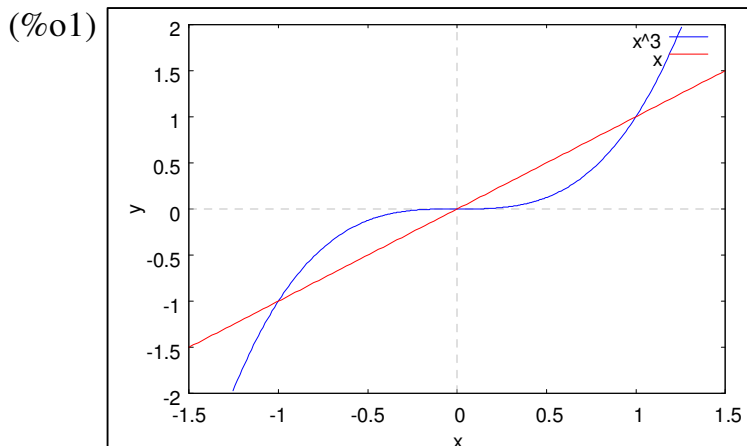
※ 「integrate (多項式函數, 函數, 函數起始值, 函數結束值)」指令表示對一多項式函數之中特定函數進行積分, 積分範圍為函數起始值至函數結束值。

## P.152

例題 2：試求曲線  $y = x^3$  與  $y = x$  所圍成的區域面積。

```
(%i1) plot2d([x^3, x],[x,-1,3],[y,-2,5]);
```

plot2d: some values were clipped.



```
(%i2) solve([y=x,y=x^3],[x,y]);
```

```
(%o2) [[x=-1,y=-1],[x=1,y=1],[x=0,y=0]]
```

求出兩線交點為  $(-1, -1)$ 、 $(1, 1)$  與  $(0, 0)$ , 可分為： $x$  為  $-1 \sim 0$  區域 ( $y = x^3$  之值大於  $y = x$ )、 $x$  為  $0 \sim 1$  區域 ( $y = x$  之值大於  $y = x^3$ )。

```
(%i3) integrate(x^3-x,x,-1,0)+ integrate(x-x^3,x,0,1);
```

```
(%o3) 1/2
```

※ 「plot2d ([方程式],[x,最小值,最大值],[y, 最小值,最大值])」; 指令表示繪出方程式之圖形, 其中  $x$  軸刻度介於最小值~最大值之間、 $y$  軸刻度介於最小值~最大值之間。

※ 「solve([ 變數算式 ],[ 變數 ])」指令表示求解。

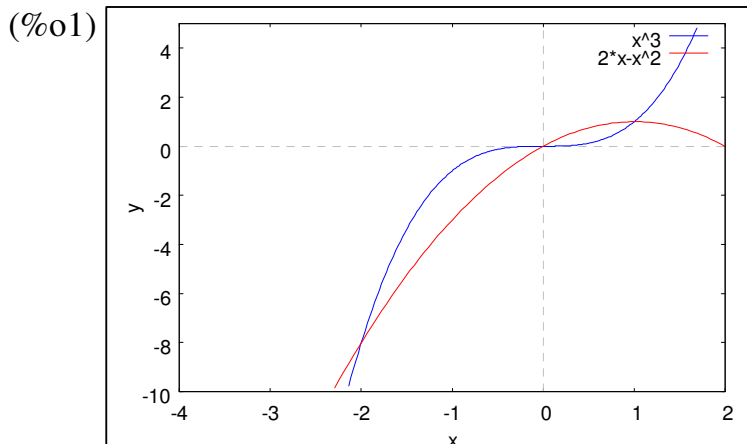


※ 「integrate (多項式函數, 函數, 函數起始值, 函數結束值)」指令表示對一多項式函數之中特定函數進行積分, 積分範圍為函數起始值至函數結束值。

隨堂練習：試求  $y = x^3$  與  $y = 2x - x^2$  所圍成的區域面積。

```
(%i1) plot2d([x^3, 2*x-x^2],[x,-4,2],[y,-10,5]);
```

plot2d: some values were clipped.



```
(%i2) solve([y=x^3,y=2*x-x^2],[x,y]);
```

```
(%o2) [[x=-2,y=-8],[x=1,y=1],[x=0,y=0]]
```

求出兩線交點為  $(-2, -8)$ 、 $(1, 1)$  與  $(0, 0)$ , 可分為： $x$  為  $-2 \sim 0$  區域 ( $y = x^3$  之值大於  $y = 2x - x^2$ )、 $x$  為  $0 \sim 1$  區域 ( $y = 2x - x^2$  之值大於  $y = x^3$ )。

```
(%i3) integrate(x^3-(2*x-x^2),x,-2,0)+ integrate((2*x-x^2)-x^3,x,0,1);
```

```
(%o3) 37/12
```

※ 「plot2d ([方程式],[x,最小值,最大值],[y, 最小值,最大值])」; 指令表示繪出方程式之圖形, 其中  $x$  軸刻度介於最小值~最大值之間、 $y$  軸刻度介於最小值~最大值之間。

※ 「solve([ 變數算式 ],[ 變數 ])」指令表示求解。

※ 「integrate (多項式函數, 函數, 函數起始值, 函數結束值)」指令表示對一多項式函數之中特定函數進行積分, 積分範圍為函數起始值至函數結束值。



**P.154**

**例題 3：**證明：底面為邊長  $a$  的正方形，高為  $h$  的四角錐之體積為  $\frac{1}{3}a^2h$ 。

**隨堂練習：**已知任何底面積相等，高等長的三角錐體積都相等，利用例題 3 的結果說明三角錐的體積等於  $\frac{1}{3}$  × 底面積 × 高。

**P.155**

**例題 4：**證明：半徑為  $r$  的球體體積為  $\frac{4\pi r^3}{3}$

**P.156**

**例題 5：**有一個直圓錐  $S$  的底半徑為  $r$ ，高為  $h$ ；證明：圓錐體  $S$  的體積為  $\frac{\pi r^2 h}{3}$ ，即直圓錐體  $S$  的體積等於  $\frac{1}{3}$  × 底面積 × 高。

**P.157**

**例題 6：**試求  $y = x^2$  的圖形與直線  $x=1$ 、 $x=2$  及  $x$  軸圍成的區域繞  $x$  軸旋轉所成的旋轉體體積。

若  $f(x)$  為定義在  $[a, b]$  上的連續函數，且  $f(x) \geq 0$ ， $y=f(x)$  的圖形與直線  $x=a$ 、 $y=b$  及  $x$  軸圍成的區域繞  $x$  軸旋轉所成的旋轉體體積為  $\int_a^b \pi \cdot [f(x)]^2 dx$ 。

(%i1) integrate(%pi\*(x^2)^2,x,1,2);

(%o1)  $\frac{31\pi}{5}$

※ 「integrate (多項式函數, 函數, 函數起始值, 函數結束值)」指令表示對一多項式函數之中特定函數進行積分，積分範圍為函數起始值至函數結束值。





**P.158**

**隨堂練習：**試求  $y=x^2$  的圖形與直線  $x=1$ 、 $x=4$  及  $y$  軸圍成的區域繞  $y$  軸旋轉所成的旋轉體體積。

**P.156**

**例題 7：**若一物體只受重力影響做自由落體運動，重力加速度為  $g$ (公尺/秒<sup>2</sup>)，初速度為  $V_0$ (公尺/秒)，設  $t$  秒後的速度為  $V(t)$ (公尺/秒)，位移大小為  $S(t)$ (公尺)，試推導自由落體的距離公式：
$$S(t)=V_0t+\frac{1}{2}gt^2$$

**隨堂練習：**設某一個質點  $m$  作直線運動， $x$  秒時的速度為  $V(x)$ (公尺/秒)，其中  $V(x)=x^2-x+3$ ，試求從  $x=2$  秒至  $x=4$  秒質點  $m$  的位移。

**P.160**

**例題 8：**假設某一個彈簧由自然長度拉長 20 公分需要 0.6 牛頓的力，現在將此彈簧從比自然長度長 30 公分拉長到比自然長度長 50 公分，試問：共作了多少焦耳的功。(1 焦耳=1 牛頓·1 公尺)

**隨堂練習：**設一個質點只受到水平力而在  $x$  軸上從  $x=2$  移動到  $x=5$ ，若質點在  $x=a$  處受力大小為  $f(a)=a^2+2$ ，試求此質點在移動過程受力所作的功。



**P.161** **習題 3-3**

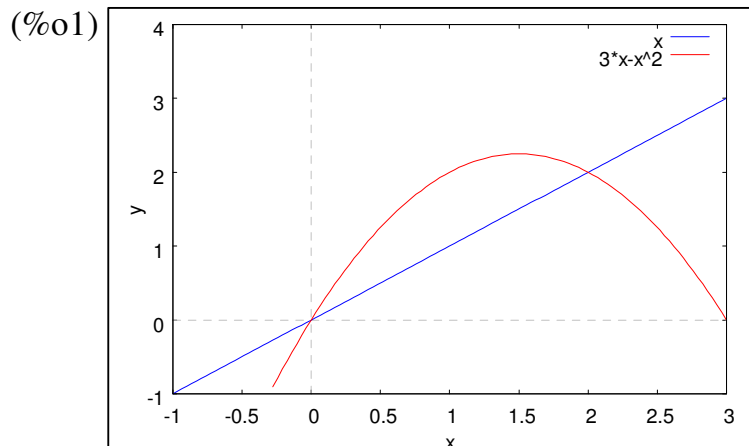
Part A

1. 求出下列區域的面積：

(1)  $y=x$  與  $y=3x-x^2$ 

(%i1) plot2d([x, 3\*x-x^2],[x,-1,3],[y,-1,4]);

plot2d: some values were clipped.



(%i2) solve([y= x,y=3\*x-x^2],[x,y]);

(%o2) [[x=2,y=2],[x=0,y=0]]

求出兩線交點為  $(2, 2)$  與  $(0, 0)$ ， $x$  為  $0\sim 2$  區域 ( $y=3x-x^2$  之值大於  $y=x$ )

(%i3) integrate(3\*x-x^2-x,x,0,2);

(%o3)  $\frac{4}{3}$ 

※「plot2d ([方程式],[x,最小值,最大值],[y, 最小值,最大值])」；指令表示繪出方程式之圖形，其中  $x$  軸刻度介於最小值~最大值之間、 $y$  軸刻度介於最小值~最大值之間。

※「solve([ 變數算式 ],[ 變數 ])」指令表示求解。

※「integrate (多項式函數, 函數, 函數起始值, 函數結束值)」指令表示對一多項式

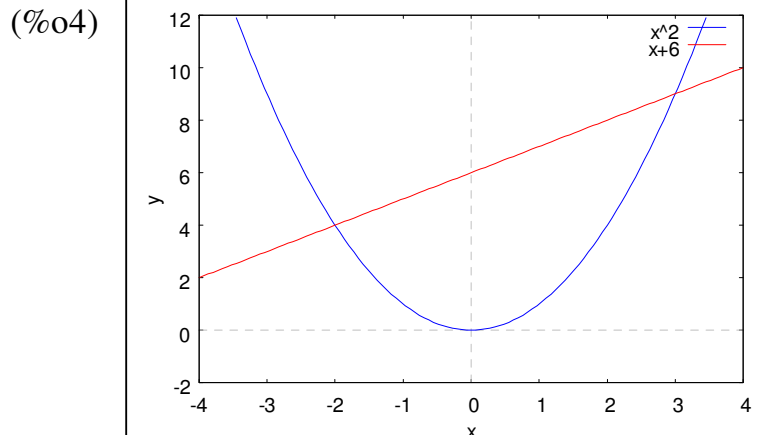


函數之中特定函數進行積分，積分範圍為函數起始值至函數結束值。

(2)  $y=x^2$  與  $y=x+6$

(%i4) plot2d([x^2, x+6],[x,-4,4],[y,-2,12]);

plot2d: some values were clipped.



(%i5) solve([y=x^2,y= x+6],[x,y]);

(%o5) [[x=-2,y=4],[x=3,y=9]]

求出兩線交點為  $(-2, 4)$  與  $(3, 9)$ ， $x$  為  $-2 \sim 3$  區域 ( $y=x+6$  之值大於  $y=x^2$ )

(%i6) integrate(x+6-x^2,x,-2,3);

(%o6)  $\frac{125}{6}$

※「plot2d ([方程式],[x,最小值,最大值],[y, 最小值,最大值])」；指令表示繪出方程式之圖形，其中  $x$  軸刻度介於最小值~最大值之間、 $y$  軸刻度介於最小值~最大值之間。

※「solve([ 變數算式 ],[ 變數 ])」指令表示求解。

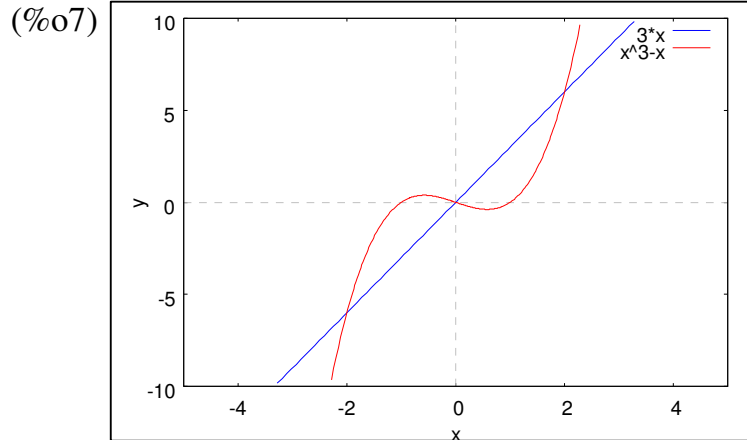
※「integrate (多項式函數, 函數, 函數起始值, 函數結束值)」指令表示對一多項式函數之中特定函數進行積分，積分範圍為函數起始值至函數結束值。



(3)  $y=3x$  與  $y=x^3-x$

(%i7) plot2d([3\*x, x^3-x],[x,-5,5],[y,-10,10]);

plot2d: some values were clipped.



(%i8) solve([y=3\*x,y= x^3-x],[x,y]);

(%o8) [[x=2,y=6],[x=-2,y=-6],[x=0,y=0]]

求出兩線交點為  $(2, 6)$ 、 $(-2, -6)$  與  $(0, 0)$ ，可分為： $x$  為  $-2 \sim 0$  區域 ( $y = x^3 - x$  之值大於  $y = 3x$ )、 $x$  為  $0 \sim 2$  區域 ( $y = 3x$  之值大於  $y = x^3 - x$ )。

(%i9) integrate(x^3-x-3\*x,x,-2,0)+ integrate(3\*x-(x^3-x),x,0,2);

(%o9) 8

※「plot2d ([方程式],[x,最小值,最大值],[y, 最小值,最大值])」；指令表示繪出方程式之圖形，其中  $x$  軸刻度介於最小值~最大值之間、 $y$  軸刻度介於最小值~最大值之間。

※「solve([ 變數算式 ],[ 變數 ])」指令表示求解。

※「integrate (多項式函數, 函數, 函數起始值, 函數結束值)」指令表示對一多項式函數之中特定函數進行積分，積分範圍為函數起始值至函數結束值。

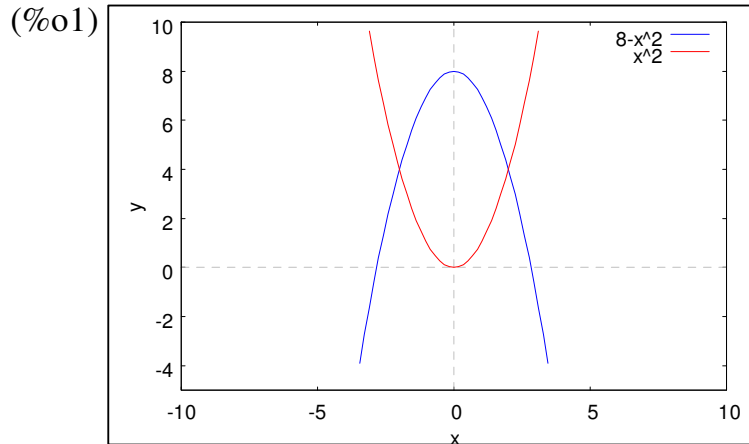
2. 試求以下各小題中曲線或直線所圍成的區域之面積：



(1)  $y=8-x^2$ 、 $y=x^2$

(%i1) `plot2d([8-x^2, x^2],[x,-10,10],[y,-5,10]);`

plot2d: some values were clipped.

(%i2) `solve([y=8-x^2,y=x^2],[x,y]);`(%o2) `[[x=2,y=4],[x=-2,y=4]]`

求出兩線交點為(2, 4)與(-2, 4)， $x$  為-2~2 區域( $y=8-x^2$  之值大於  $y=x^2$ )

(%i3) `integrate((8-x^2)-x^2,x,0-2,2);`(%o3)  $\frac{64}{3}$ 

※「`plot2d` ([方程式],[x,最小值,最大值],[y, 最小值,最大值])」; 指令表示繪出方程式之圖形,其中  $x$  軸刻度介於最小值~最大值之間、 $y$  軸刻度介於最小值~最大值之間。

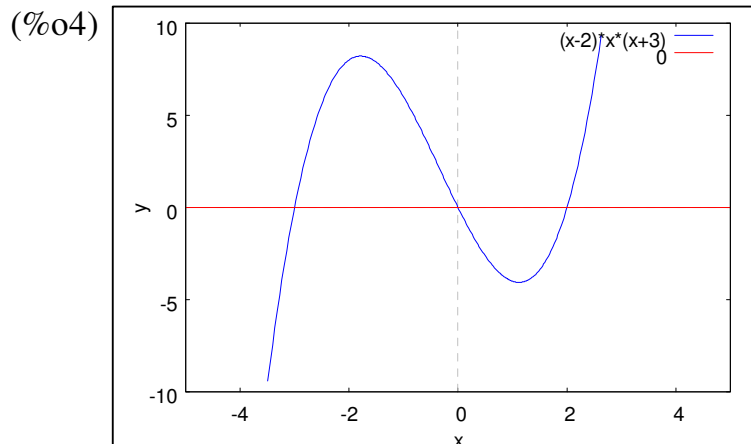
※「`solve` ([變數算式],[變數])」指令表示求解。

※「`integrate` (多項式函數, 函數, 函數起始值, 函數結束值)」指令表示對一多項式函數之中特定函數進行積分,積分範圍為函數起始值至函數結束值。

(2)  $y=x(x+3)(x-2)$ 、 $x$  軸

(%i4) `plot2d([x*(x+3)*(x-2), 0],[x,-5,5],[y,-10,10]);`

plot2d: some values were clipped.



(%i5) solve([y= x\*(x+3)\*(x-2),y=0],[x,y]);

(%o5) [[x=2,y=0],[x=-3,y=0],[x=0,y=0]]

求出兩線交點為  $(2, 0)$ 、 $(-3, 0)$  與  $(0, 0)$ ，可分為： $x$  為  $-3 \sim 0$  區域 ( $y = x(x+3)(x-2)$  之值大於  $y=0$ )、 $x$  為  $0 \sim 2$  區域 ( $y=0$  之值大於  $y = x(x+3)(x-2)$ )。

(%i6) integrate(x\*(x+3)\*(x-2)-0,x,-3,0)+ integrate(0- (x\*(x+3)\*(x-2)),x,0,2);

(%o6)  $\frac{253}{12}$

※「plot2d ([方程式],[x,最小值,最大值],[y, 最小值,最大值])」；指令表示繪出方程式之圖形，其中  $x$  軸刻度介於最小值~最大值之間、 $y$  軸刻度介於最小值~最大值之間。

※「solve([ 變數算式 ],[ 變數 ])」指令表示求解。

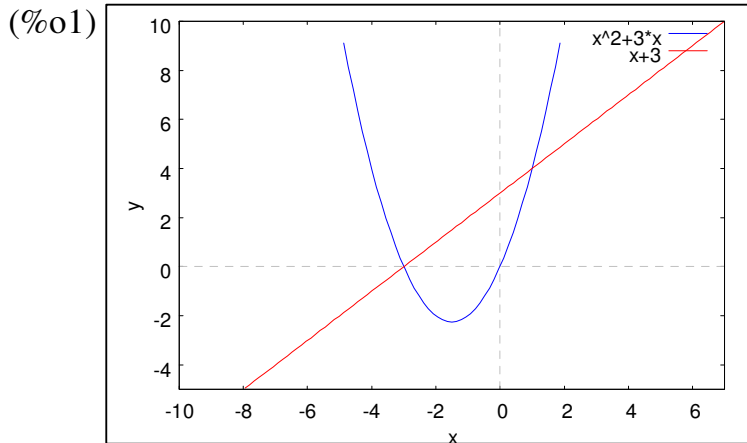
※「integrate (多項式函數, 函數, 函數起始值, 函數結束值)」指令表示對一多項式函數之中特定函數進行積分，積分範圍為函數起始值至函數結束值。

(3)  $y = x^2 + 3x$ 、 $y = x + 3$

(%i1) plot2d([x^2+3\*x, x+3],[x,-10,7],[y,-5,10]);

plot2d: some values were clipped.





(%i2) solve([y= x^2+3\*x,y= x+3],[x,y]);

(%o2) [[x=1,y=4],[x=-3,y=0]]

求出兩線交點為(1, 4)與(-3, 0), x 為-3~1 區域( $y=x+3$  之值大於  $y=x^2+3x$ )

(%i3) integrate((x+3)-(x^2+3\*x),x,-3,1);

(%o3)  $\frac{32}{3}$

※「plot2d ([方程式],[x,最小值,最大值],[y, 最小值,最大值])」; 指令表示繪出方程式之圖形,其中 x 軸刻度介於最小值~最大值之間、y 軸刻度介於最小值~最大值之間。

※「solve([ 變數算式 ],[ 變數 ])」指令表示求解。

※「integrate (多項式函數, 函數, 函數起始值, 函數結束值)」指令表示對一多項式函數之中特定函數進行積分,積分範圍為函數起始值至函數結束值。

3. 如右圖所示,有一個底半徑為 3 公分的圓柱體,被一個通過直徑  $\overline{AB}$  且與底面成  $45^\circ$  角平面所截,試求所截出的立體體積。

4. 設  $y=x^3$  的圖形與 x 軸、直線  $x=1$ 、 $x=2$  所圍成的區域為  $R$ ,試求  $R$  繞 x 軸旋轉所得的旋轉體體積。

5. 試求  $y^2=4-x$  與  $x=0$  所圍成的區域,繞 y 軸旋轉所產生的立體體積。



**P.162**

6. 假設有一自然長度為 10 公寸的彈簧，用 12 牛頓的力，可將彈簧拉長為 14 公寸，將此彈簧從自然長度拉長 5 公寸，則需作功多少？又再拉長 5 公寸，需作功多少焦耳？

## Part B

- 試求橢圓  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  所圍區域繞 x 軸旋轉所得的旋轉體的體積。
- 試求二曲線  $y^2 = 8x$  與  $y = 2x$  所圍成之區域繞 x 軸旋轉一周所得立體之體積。
- 設  $0 < r < b$ ，試求圓  $x^2 + (y-b)^2 = r^2$  繞 x 軸旋轉一周所得的旋轉體體積。[提示： $\int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$  等於半徑為 r 的半圓面積等於  $\frac{\pi r^2}{2}$ ]
- 假設船錨在船下 10 公尺，將錨視為一個質點，錨重 500 公斤，錨鏈是均勻的且每公尺重 2 公尺，若水壓與浮力不計，問起錨需作多少功？

**第三章 綜合練習****P.163**

## Part A

- 試求下列定積分：





$$(1) \int_2^4 (2u+3)(u-4)du$$

(%i1) integrate((2\*u+3)\*(u-4),u,2,4);

$$(%o1) -\frac{50}{3}$$

$$(2) \int_{-1}^2 (x^3 - x^2 + 3)dx$$

(%i2) integrate(x^3-x^2+3,x,-1,2);

$$(%o2) \frac{39}{4}$$

$$(3) \int_0^3 |x^2 - 4| dx$$

(%i3) abs(integrate(x^2-4,x,0,2))+integrate(x^2-4,x,2,3);

$$(%o3) \frac{23}{3}$$

$$(4) \int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2} dx$$

(%i4) integrate(sqrt(9-x^2),x,-3,3);

$$(%o4) \frac{9\pi}{2}$$

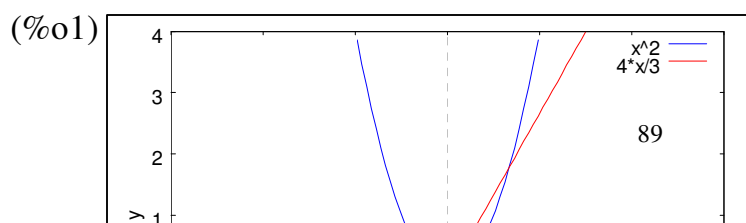
※ 「abs( 數值 )」指令表示絕對值。

※ 「integrate (多項式函數, 函數, 函數起始值, 函數結束值)」指令表示對一多項式函數之中特定函數進行積分, 積分範圍為函數起始值至函數結束值。

2. 試求拋物線  $y = x^2$  與直線  $y = \frac{4x}{3}$  的圖形所圍成的區域面積。

(%i1) plot2d([x^2, 4\*x/3],[x,-6,6],[y,-2,4]);

plot2d: some values were clipped.



(%i2) solve([y= x^2,y= 4\*x/3],[x,y]);

(%o2) [[x= $\frac{4}{3}$ ,y= $\frac{16}{9}$ ],[x=0,y=0]]

求出兩線交點為( $\frac{4}{3}$ ,  $\frac{16}{9}$ )與(0,0), x 為  $0 \sim \frac{4}{3}$  區域( $y = \frac{4x}{3}$  之值大於  $y = x^2$ )

(%i3) integrate((4\*x/3)-(x^2),x,0,4/3);

(%o3)  $\frac{32}{81}$

※「plot2d ([方程式],[x,最小值,最大值],[y, 最小值,最大值])」; 指令表示繪出方程式之圖形,其中 x 軸刻度介於最小值~最大值之間、y 軸刻度介於最小值~最大值之間。

※「solve([ 變數算式 ],[ 變數 ])」指令表示求解。

※「integrate (多項式函數, 函數, 函數起始值, 函數結束值)」指令表示對一多項式函數之中特定函數進行積分,積分範圍為函數起始值至函數結束值。

3. 設  $y = x^2$  與直線  $y=0$ 、 $x=2$  所圍成的區域為 R, 若直線  $x=k$  平分區域 R 的面積, 試求 k 的值。

4. 試求函數  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$  與  $g(x) = -x^3 + 4x^2 - 3x$  的圖形所圍成的區域面積。

(%i1) f(x):= $x^3-3*x^2+2*x$ ;

(%o1)  $f(x) := x^3 - 3x^2 + 2x$

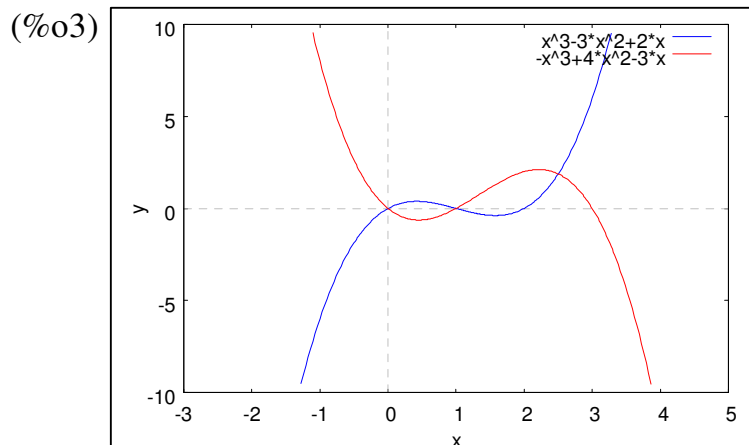
(%i2) g(x):= $-x^3+4*x^2-3*x$ ;

(%o2)  $g(x) := -x^3 + 4x^2 + (-3)x$



```
(%i3) plot2d([f(x),g(x)],[x,-3,5],[y,-10,10]);
```

plot2d: some values were clipped.



```
(%i4) solve([y=f(x),y=g(x)],[x,y]);
```

```
(%o4) [[x=1,y=0],[x=5/2,y=15/8],[x=0,y=0]]
```

求出兩線交點為  $(0, 0)$ 、 $(\frac{5}{2}, \frac{15}{8})$  與  $(1, 0)$ ，可分為： $x$  為  $0 \sim 1$  區域 ( $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$  之值大於  $g(x) = -x^3 + 4x^2 - 3x$ )、 $x$  為  $1 \sim \frac{5}{2}$  區域 ( $g(x) = -x^3 + 4x^2 - 3x$  之值大於

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ )。

```
(%i5) integrate(f(x)-g(x),x,0,1)+ integrate(g(x)-f(x),x,1,5/2);
```

```
(%o5) 253/96
```

※「plot2d ([方程式],[x,最小值,最大值],[y, 最小值,最大值])」；指令表示繪出方程式之圖形，其中  $x$  軸刻度介於最小值~最大值之間、 $y$  軸刻度介於最小值~最大值之間。

※「solve([變數算式],[變數])」指令表示求解。

※「integrate(多項式函數, 函數, 函數起始值, 函數結束值)」指令表示對一多項式函數之中特定函數進行積分，積分範圍為函數起始值至函數結束值。

5. 解不等式  $\int_0^x (3t^2 + 2t - 6)dt \leq 0$



6. 設函數及其圖形上一點  $P(-1, -1)$

(1) 試求以  $P$  點為切點，函數  $f(x)$  的圖形之切線  $L$  的方程式。

(2) 試求以  $f(x)$  的圖形與直線  $L$  所圍成之區域面積。

7.  $f(x)$  表一實係數多項式，已知  $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 2x(\int_1^2 f(x)dx) + 3$

(1) 求  $\int_1^2 f(x)dx$  的值

(2) 求多項式  $f(x)$

8. 一個裝滿水的圓柱狀水桶，其底半徑為 1 公尺，高為 2 公尺，求把所有的水抽出水桶作的功。

9. 設函數  $f(x)$  為定義在  $[0, 1]$  上遞增且連續的函數，且  $f(0)=0$ 、 $f(1)=1$ ；經濟學家稱  $y=f(x)$  的圖形為羅倫茲(Lorenz)曲線，他描述一個國家家庭收入的分布。

設  $y=f(x)$  與  $y=x$  所成的區域面積為  $A$ ，直線  $y=x$  與直線  $x=1$ 、 $x$  軸所圍成的區域面積為  $B$ 。1912 年義大利的統計學家吉尼(Gini)定義  $\frac{A}{B}$  來描述來描述一個國家家庭收

入分布不平均的情形，稱為吉尼係數(Gini coefficient)，Gini 係數越大代表一個國家家庭收入分布不平均的程度越大。

(1) 試證明：Gini 係數  $= 2\int_0^1 [x - f(x)] dx$

(2) 設某一個國家羅倫茲(Lorenz)曲線為，試求此國家的 Gini 係數。

## Part B

1. 如圖，試求曲線  $x=4y-y^2$  與  $y=\sqrt{3x}$  所圍成的區域面積。[提示： $x=4y-y^2$  與  $y=\sqrt{3x}$  可視  $x$  為  $y$  的函數。]



**P.165**

2. 設函數  $f(x) = x^3 - kx^2 - x + k$  (其中  $-1 \leq k \leq 1$ ) 的圖形與  $x$  軸所圍成的封閉區域的面積為  $A(k)$ 。

(1) 試以  $k$  來表示  $A(k)$ 。

(2) 求  $A(k)$  的最大值與最小值。[提示： $f(x) = (x+1)(x-1)(x-k)$ ]

3. 右圖是半徑為  $r$  的球體中，高為  $h$  的球帽，試求此球帽的體積。

4. 如圖，試求中心角  $\theta = 60^\circ$ ，半徑  $r$  之扇形  $R$  繞  $x$  軸旋轉所得旋轉體之體積。

5.

(1) 找一個定義在  $[0, 1]$  上的多項式函數  $f(x)$ ，將  $[0, 1]$  平分成  $n$  等分，選取適當的分割點，使得黎曼和  $\frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}}$  為，其中  $p$  為正整數。

(2) 試利用定積分來證明： $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$ ，其中  $p$  為正整數。

$$[\text{提示：} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{n} \left[ \left(\frac{1}{n}\right)^p + \left(\frac{2}{n}\right)^p + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^p \right]]$$

6. 如下圖，我們計算由直線  $PQ$  與的圖形所圍成的弓形之面積，阿基米德利用一連串的三角形來逼近弓形：設  $P(a, a^2)$ 、 $Q(b, b^2)$ 、 $R(c, c^2)$ ，其中  $c = \frac{a+b}{2}$

(1) 請證明： $\triangle PQR$  的面積  $= \frac{1}{8}(b-a)^3$

(2) 在  $P(a, a^2)$  與  $R(c, c^2)$ 、 $R(c, c^2)$  與  $Q(b, b^2)$  的拋物線間分別取  $R_1(c_1, c_1^2)$ 、 $R_2(c_2, c_2^2)$ ，其中  $c_1 = \frac{a+c}{2}$ 、 $c_2 = \frac{c+b}{2}$ ；請證明： $\triangle PR_1R$  面積  $+ \triangle PR_2Q$  面積  $= \frac{1}{4} \cdot \frac{(b-a)^3}{8}$

(3) 重覆前面的動作，會形成無窮多個三角形，阿基米德利用這些三角形的面積和來



逼近弓形的面積，試求出這無窮多個三角形面積和，並藉此證明弓形面積為  $\frac{(b-a)^3}{6}$

(4) 試用定積分來計算弓形的面積。

### 附錄一、微積分的基本定理

#### P.168

**例題 1：**設  $f(x)$  與定義在  $[0, 6]$  上連續函數，圖是函數的圖形，令  $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ ，其中  $0 \leq x \leq 6$ 。

- (1) 試計算  $g(2)$ 、 $g(3)$ 、 $g(4)$
- (2) 試問  $g(x)$  是遞增的函數嗎？



(3) 試問  $g(x)$  表示成  $x$  的函數。

### P.173

**例題 2：**利用微積分基本定理計算定積分  $\int_{-1}^3 (4x^3 - 2x^2 + 6x + 1)dx$  的值。

(%i1) integrate((4\*x^3-2\*x^2+6\*x+1),x,-1,3);

(%o1)  $\frac{268}{3}$

※「integrate (多項式函數, 函數, 函數起始值, 函數結束值)」指令表示對一多項式函數之中特定函數進行積分, 積分範圍為函數起始值至函數結束值。

**隨堂練習：**設  $g(x) = \int_{-2}^x (t^3 - 2 \cdot t + 5)dt$ , 試求  $g'(x)$

(%i1) integrate((t^3-2\*t+5),t,-2,x);

(%o1)  $\frac{x^4 - 4x^2 + 20x}{4} + 10$

(%i2) ratsimp(diff((x^4-4\*x^2+20\*x)/4+10,x,1));

(%o2)  $x^3 - 2x^2 + 5$

※「integrate (多項式函數, 函數, 函數起始值, 函數結束值)」指令表示對一多項式函數之中特定函數進行積分, 積分範圍為函數起始值至函數結束值。

※「ratsimp ([ 算式 ] × [ 算式 ])」指令表示化簡算式。

### 例題 3：

(1) 設函數  $g(x) = \frac{1}{x}$ , 請利用導函數的定義證明  $g'(x) = \frac{-1}{x^2}$ 。

(2) 利用微積分基本定理計算定積分  $\int_1^2 \left(\frac{-1}{x^2}\right)dx$  的值。

### P.174

**隨堂練習：**設  $x > 0$ , 函數為連續函數。



- (1) 請利用導函數的定義證明  $g'(x) = \sqrt{x}$
- (2) 利用微積分基本定理計算定積分  $\int_1^2 \sqrt{x} dx$  的值。

## 綜合練習

### P.175

1. 設連續函數的圖形如圖所示，試求下列各定積分：

- (1)  $\int_0^4 f(x) dx$
- (2)  $\int_5^8 f(x) dx$
- (3)  $\int_0^8 f(x) dx$





2. 請利用面積的觀點來計算下列定積分：

$$(1) \int_{-2}^1 |x| dx$$

(%i1) abs(integrate(x,x,-2,0))+abs(integrate(x,x,0,1));

$$(%o1) \frac{5}{2}$$

$$(2) \int_0^2 (1+\sqrt{4-x^2}) dx$$

[提示：  $f(x)=1+\sqrt{4-x^2}$  的圖形為一個半圓]

(%i2) abs(integrate(1+sqrt(4-x^2),x,0,2));

$$(%o2) \pi+2$$

※ 「abs( 數值 )」指令表示絕對值。

3. 利用微積分基本定理，求下列各小題中  $g(x)$  的導函數  $g'(x)$

$$(1) g(x) = \int_{-1}^x (t+1)^{10} dt$$

(%i1) integrate((t+1)^10,t,-1,x);

$$(%o1) \frac{(x^{11}+11x^{10}+55x^9+165x^8+330x^7+462x^6+462x^5+330x^4+165x^3+55x^2+11x+1)}{11}$$

(%i2) factor(diff((x^11+11\*x^10+55\*x^9+165\*x^8+330\*x^7+462\*x^6+462\*x^5+330\*x^4+165\*x^3+55\*x^2+11\*x+1)/11,x,1));

$$(%o2) (x+1)^{10}$$

※ 「integrate (多項式函數, 函數, 函數起始值, 函數結束值)」指令表示對一多項式函數之中特定函數進行積分，積分範圍為函數起始值至函數結束值。

※ 「factor( 數值 )」指令表示求因式分解。

$$(2) g(x) = \int_5^x \frac{1}{t} dt$$



(%i1) integrate((1/t),t,5,x);

Is  $x-5$  positive, negative, or zero?

positive;

(%o1)  $\log(x)-\log(5)$

(%i2) ratsimp(diff(log(x)-log(5),x,1));

(%o2)  $\frac{1}{x}$

※ 「integrate (多項式函數, 函數, 函數起始值, 函數結束值)」指令表示對一多項式函數之中特定函數進行積分, 積分範圍為函數起始值至函數結束值。

※ 「ratsimp ([ 算式 ] × [ 算式 ])」指令表示化簡算式。

4. 令  $f(x)$  表右圖單位圓內斜線的面積,  $0 < x < 1$ , 則  $f'(x) =$

(1)  $\sqrt{1-x^2}$

(2)  $-\sqrt{1-x^2}$

(3)  $2\sqrt{1-x^2}$

(4)  $-2\sqrt{1-x^2}$

(5)  $\pi$

5. 右圖為連續函數  $y = f(t)$  的圖形, 設  $g(x) = \int_0^x f(t) dt$ , 試求下列各小題:

(1)  $g(x)$  會在何處產生極值?

(2)  $g(x)$  會在那些範圍凹口向上?

(3) 若  $g(1) = \frac{3}{2}$ 、 $g(2) = \frac{10}{3}$ 、 $g(3) = 2$ 、 $g(4) = \frac{4}{5}$ 、 $g(5) = \frac{5}{3}$ 、 $g(6) = 2$ , 試描繪  $y = g(x)$  的略

圖。



## 附錄二、牛頓法求平方根的近似值

### P.177

**例題 1：**設給定方程式 (其中  $k > 0$ ) 的根的一個近似值，若且，其中，則對方程式的根而言，是比更好的一個近似值。

### P.179

**例題 2：**求  $\sqrt{7}$  的近似值

## 附錄三、微分的乘法公式

## 附錄四、夾擠定理

### P.182

**例題 1：**設  $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ ，試用夾擠定理證明  $\langle a_n \rangle$  收斂，並求其極限。

### P.183

**例題 2：**設  $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$  ( $x \neq 0$ )，試求  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = ?$

