高中數學與ＭＡＸＩＭＡ：

以下將依據教育部審核教科書內容，以 MAXIMA 軟體解答例題、隨堂練習及自我評量以供高中生參考

高三上數學

-目次-

MAXIMA 指令簡介

※「**float(數值)**」指令表示將結果轉換為小數。

※「**matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])**」指令表示 n×m 矩陣。

※「**transpose (矩陣)**」指令表示將 $M_{n\times m}$ 轉置(行列互換)成 $M_{m\times n}$。

※「**solve([變數算式], [變數])**」指令表示求解。

※「**row(A 矩陣,第 n 列)**」指令表示選取 A 矩陣第 n 列。(須先行定義一矩陣)

※「**col(B 矩陣,第 m 行)**」指令表示選取 B 矩陣第 m 行。(須先行定義一矩陣)

※「**coefmatrix([F1,F2,F3],[x,y,z])**」指令為加入矩陣 (此矩陣不含常數項)，並將[F1,F2,F3]為欲轉換的線性方程，[x,y,z]為轉換的變數；

※「**augcoefmatrix([F1,F2,F3],[x,y,z])**」指令為加入擴增矩陣 (此矩陣含常數項)，並將[F1,F2,F3]為欲轉換的線性方程，[x,y,z]為轉換的變數；

※「**expand ([算式] × [算式])**」指令表示展開算式。

※「**gcd(數值,數值)**」指令表示求最大公因數。

※「**determinant(矩陣)**」指令表示計算矩陣結果。

※「**invert(矩陣)**」指令表示求矩陣之反矩陣。

運算簡介

＋：MAXIMA 以+表示。

－：MAXIMA 以-表示。

× ：MAXIMA 以*表示。

÷ ：MAXIMA 以/表示。

a^2：MAXIMA 以 a^2 表示。

$\sqrt{a}$ ：MAXIMA 以 a^(1/2)或 sqrt(a)表示。

π ：MAXIMA 以%pi 表示。

***i* 虛數： MAXIMA 以%i 表示。**

A:5：將 A 定義為 5，其中:代表定義(未來輸入 A 就會跑出其定義之數值 5)。

kill(all)：將 maxima 中所有定義之數值清除。

kill(%i1)：將 maxima 中將(%i1)定義之數值清除。

．：表示內積。

$：不顯示計算結果。

第一章　數與坐標

1-1　條件機率　※本章節不建議使用 Maxima 解題※

P.7

例題 1： 同時投擲大、小兩個公正的骰子一次，已知出現的點數和是 7，求大骰子出現點數為 4 的機率。

P.8

隨堂練習： 假設生小孩時，性別是男或女的機會是相同的，且第一個出生小孩的性別，不會影響到第二個出生小孩的性別，現在有一對夫妻將生第二個小孩，我們已知他們生的第一個孩子是女生，試問:這對夫妻將生的第二個孩子會是女生的機率為多少？

例題 2： 某國中校長統計該校各年級男、女生的人數，得到下面的統計表:

	男生	女生	總計
一年級	200	250	450
二年級	240	260	500
三年級	250	230	480
總計	690	740	1430

(1) 從全校學生中任選一人，每位學生被選中的機會均等，選出女生的機率是多少？

(%i1) 740/1430;

(%o1) $\frac{74}{143}$

或以小數表示

(%i2) float(740/1430);

(%o2) 0.51748251748252

(2) 若已選出的人是女生，這女生是三年級的機率是多少？

(%i3) 230/740;
(%o3) $\frac{23}{74}$

或以小數表示

(%i4) float(230/740);

(%o4) 0.31081081081081

※「float(數值)」指令表示將結果轉換為小數。

隨堂練習：例題 2 中，已知選出的人是男生，這男生是一年級的機率是多少？

(%i1) 200/690;
(%o1) $\frac{20}{69}$

或以小數表示

(%i2) float(200/690);

(%o2) 0.28985507246377

※「float(數值)」指令表示將結果轉換為小數。

P.9

例題 3：某校系甄試入學分筆試與口試兩階段，通過第一階段筆試的機率是 $\frac{1}{20}$;若通過筆試可繼續參加口試,而通過口試的機率是 $\frac{2}{3}$,求通過這甄試入學的機率。

(%i1) 1/20*2/3;
(%o1) $\frac{1}{30}$

或以小數表示

(%i2) float(1/20*2/3);

(%o2) 0.033333333333333

※「float(數值)」指令表示將結果轉換為小數。

P.10

隨堂練習：一袋中有 6 白球與 5 黑球，從袋中隨機取球兩次，一次取一球，取後不放回，假設袋中每一球被取出的機率均等，求取出兩球都是白球的機率。

(%i1) 6/11*5/10;

(%o1) $\frac{3}{11}$

或以小數表示

(%i2) float(6/11*5/10);

(%o2) 0.27272727272727

※「float(數值)」指令表示將結果轉換為小數。

例題 4：有 10 個人排隊抽獎，10 支籤中只有 1 個中獎機會，每支籤被抽中的機會均等，且抽出後不放回。小明排第四位，求小明中獎的機率。

(%i1) 9/10*8/9*7/8*1/7;

(%o1) $\frac{1}{10}$

或以小數表示

(%i2) float(9/10*8/9*7/8*1/7);

(%o2) 0.1

※「float(數值)」指令表示將結果轉換為小數。

P.11

隨堂練習：在總共有 1000 人參加的抽獎活動中，有 1000 支籤，只有一個中獎機會，每支籤被抽中的機會均等，且抽出後不放回。小榮排第三位，求小榮中獎的機率。

(%i1) 999/1000*998/999*1/997;

(%o1) $\frac{1}{1000}$

或以小數表示

(%i2) float(999/1000*998/999*1/998);

(%o2) 0.001

※「float(數值)」指令表示將結果轉換為小數。

P.13

例題 5：投擲一公正骰子兩次，並定義下面三事件：

事件 A：第一次出現點數為 3，事件 B:點數和為 7，事件 C：點數和為 8。

(1) 驗證 A 事件與 B 事件獨立(A 與 B 為獨立事件)

(2) 驗證 A 事件與 C 事件相依(A 與 B 為相依事件)

隨堂練習：投擲兩相同的公正骰子，以 A 表示點數和為 5 的事件，以 B 表示點數積是 6 的事件，A 與 B 是否為獨立事件？

P.14

例題 6：兩事件 A，B 為獨立事件且 P(A)= $\frac{1}{2}$，P(B)= $\frac{1}{3}$，求 P(A∪B)。

隨堂練習 6：兩事件 A，B 為獨立事件且 P(A)= $\frac{2}{3}$，P(B)= $\frac{3}{4}$，求 P(A-B)。

P.16

例題 7：連續投擲一均勻硬幣 2 次，以 A 表示第一次出現正面的事件，以 B 表示第二次出現反面的事件，以 C 表示兩次同時出現正面或同時出現反面的事件，事件 A，B，C 是否為獨立事件？

隨堂練習：擲一公正骰子三次，以 A 表示第一次出現點數是 3 的事件，以 B 表示第二次出現點數是 4 的事件，以 C 表示第三次出現點數是 5 的事件，事件 A，B，C 是否為獨立事件？

P.16

例題 8：某一公司有三個工廠，各廠生產情況如下:

(1) A 廠生產 40%的公司產品，產品合格率 90%

(2) B 廠生產 30%的公司產品，產品合格率 80%

(3) C 廠生產 30%的公司產品，產品合格率 70%

求公司全部產品的合格率。

公司產品合格率為 A 廠合格率(0.4×0.9)+B 廠合格率(0.3×0.8)+C 廠合格率(0.3×0.7)

(%i1) 0.4*0.9+0.3*0.8+0.3*0.7;

(%o1) 0.81

隨堂練習：某社團男性占 70%，而男性中戴眼鏡的比率為 60%，女性中戴眼鏡的比率為 40%，求該社團成員中戴眼鏡的比率。

(%i1) 0.7*0.6+0.3*0.4;

(%o1) 0.54

例題 9：有 A，B，C 三個抽屜，A 抽屜有 3 白球 1 黑球，B 抽屜有 2 白球 2 黑球，C

抽屜有 1 白球 5 黑球，抽屜 A，B，C 被選中的機率分別是$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{4}$，又選中一抽屜時，其中的球被取出的機率均等，現在任選一抽屜，再從這抽屜中取出一球，求取出白球的機率。

取出白球的機率為選中 A 抽屜且取到白球之機率(1/4×3/4)+B 抽屜且取到白球之機率(1/2×2/4)+C 抽屜且取到白球之機率(1/4×1/6)

(%i1) 1/4*3/4+1/2*2/4+1/4*1/6;

(%o1) $\frac{23}{48}$

隨堂練習：例題 9 中，若三抽屜被選中的機率都是$\frac{1}{3}$，求黑球被取出的率。

取出白球的機率為選中 A 抽屜且取到黑球之機率(1/3×1/4)+B 抽屜且取到黑球之機率(1/3×2/4)+C 抽屜且取到黑球之機率(1/3×5/6)

(%i1) 1/3*1/4+1/3*2/4+1/3*5/6;

(%o1) $\frac{19}{48}$

P.21

例題 10：某國小有甲、乙、丙三班，男生的比率分別是 60%，50%，40%，現在任意選取一班，再從選中的班選取一學生，設每班被選中的機會均等，且每一位學生被選中的機會也均等，已知選中的是男生，求這男生選於甲班的機率。

選中男生的機率為選中甲班男生機率(1/3×0.6)+乙班男生機率(1/3×0.5)+丙班男生機率(1/3×0.4)

(%i1) (1/3*0.6)/(1/3*0.6+1/3*0.5+1/3*0.4);

(%o1) 0.4

隨堂練習：例題 10 中，若已知抽到的是女生，求這女生屬於甲班的機率。

選中女生的機率為選中甲班女生機率(1/3×0.4)+乙班女生機率(1/3×0.5)+丙班女生機率(1/3×0.6)

(%i1) (1/3*0.4)/(1/3*0.4+1/3*0.5+1/3*0.6);

(%o1) 0.26666666666667

或以分數表示

(%i2) rat((1/3*0.4)/(1/3*0.4+1/3*0.5+1/3*0.6));

rat: replaced 0.26666666666667 by 4/15 = 0.26666666666667

(%o2) $\frac{4}{15}$

※「rat(數值)」指令將數值轉換成分數形式。

P.21

例題 11：針對某一社區人口抽煙與肺癌的相關性做一抽樣調查，調查對象中有 30%抽煙，而這些抽煙人口中有肺癌的比率為 40%，又另外 70%未抽煙的人口中，有肺癌的比率為 10%，現在從這些調查人口中抽查一人，已知這人患有肺癌，求這人有抽煙的機率。

患有肺癌的機率為抽煙人口患肺癌(0.3*0.4)+未抽菸人口患肺癌(0.7*0.1)

(%i1) (0.3*0.4)/(0.3*0.4+0.7*0.1);

(%o1) 0.63157894736842

或以分數表示

(%i2) rat((0.3*0.4)/(0.3*0.4+0.7*0.1));

rat: replaced 0.63157894736842 by 12/19 = 0.63157894736842

(%o2) $\frac{12}{19}$

※「rat(數值)」指令將數值轉換成分數形式。

隨堂練習：例題 11 中，若抽到的人沒有肺癌，求這人有抽煙的機率。

沒有肺癌的機率為抽煙人口沒有肺癌(0.3*0.6)+未抽菸人口沒有肺癌(0.7*0.9)

(%i1) (0.3*0.6)/(0.3*0.6+0.7*0.9);

(%o1) 0.22222222222222

或以分數表示

(%i2) rat((0.3*0.6)/(0.3*0.6+0.7*0.9));

rat: replaced 0.22222222222222 by 2/9 = 0.22222222222222

(%o2) $\frac{2}{9}$

※「rat(數值)」指令將數值轉換成分數形式。

P.23 **習題 1-1**

1. 設 A，B 是樣本空間 S 中的兩事件，且 $P(A)=\frac{2}{3}$，$P(B)=\frac{1}{2}$，$P(A\cap B)=\frac{1}{4}$，求條件機率 $P(A \mid B)$與 $P(B \mid A)$。

2. 有兩事件 A，B 滿足 $P(A)=\frac{1}{2}$，$P(B)=\frac{1}{3}$，$P(A\cup B)=\frac{2}{3}$，試問 A，B 是不是獨立事件？

3. 連續投擲一公正骰子兩次，在第一次出現點數是偶數的條件下，求點數和為 10 的機率。

4. 在全部人口中，70%的人民具有投票權，又這些具有投票權的人民在某一次立法委員選舉的投票率是 65%，求投票人口占全部人口的比率。

投票人口的比率為 0.7*0.65

(%i1) 0.7*0.65/1;

(%o1) 0.455

0.455 可寫成 45.5%

5.已知事件 A，B 滿足 P(A)=0.45，P(B)=0.32，$P(A'\cap B)=0.20$，求 $P(A\cap B)$，$P(A'\cap B')$。

6.設 A，B 為兩獨立事件，$P(A')=\frac{2}{3}$且 $p(A\cup B)=\frac{3}{5}$，試求 P(B)與 $P(A \mid B')$。

7. 某測試藥劑對某疾病患者的測試準確度是 99%，但對健康的人也有 2%的誤測率，即健康的人，有 2%的機率被判定為患者(即測試呈陽性反應)，假設受測試對象中有 0.5%是患者，試求在此一測試中呈陽性反應的人，真正帶有該疾病的條件機率。

呈陽性反應的機率為健康的人誤測率 (0.995*0.02) + 疾病患者的測試準確率

(0.005*0.99)

(%i1) 0.005*0.99/(0.995*0.02+0.005*0.99);

(%o1) 0.19919517102616

或以分數表示

(%i2) rat(0.005*0.99/(0.995*0.02+0.005*0.99));

rat: replaced 0.19919517102616 by 99/497 = 0.19919517102616

(%o2) $\frac{99}{497}$

※「rat(數值)」指令將數值轉換成分數形式。

P.24

8. 社工人員發現下面有關受虐兒童的具體資料:

(1)100 個兒童中有一個受虐

(2)受虐的兒童中，80%會被檢舉出來

(3)未受虐的兒童中，有 5%被誤檢舉為受虐

在這些檢舉為受虐的兒童中，有多少比率是真正受虐？

檢舉為受虐的兒童機率為受虐的兒童被檢舉(0.01*0.8)+未受虐的兒童被誤檢舉

(0.99*0.05)

(%i1) 0.01*0.8/(0.01*0.8+0.99*0.05);

(%o1) 0.13913043478261

或以分數表示

(%i2) rat(0.01*0.8/(0.01*0.8+0.99*0.05));

rat: replaced 0.13913043478261 by 16/115 = 0.13913043478261

(%o2) $\frac{16}{115}$

※「rat(數值)」指令將數值轉換成分數形式。

9. 在一份試卷中，某考生有把握的題目占 70%，依以往經驗，該生有把握的題目答對的比率是 90%，沒有把握的題目答對的比率是 30%，求這考生整體的答對比率。

整體的答對比率為有把握的題目(0.7*0.9)+沒有把握的題目(0.3*0.3)

(%i1) 0.7*0.9+0.3*0.3;

(%o1) 0.72

0.72 可寫成 72%

10. 一架雙引擎飛機，每一引擎故障的機率是 0.01，又兩引擎故障的事件為獨立事件，兩引擎同時故障才會造成飛機失事，現在已知飛機沒有失事，這時兩引擎都沒有故障的機率是多少？

飛機沒有失事情況為 A、B 引擎皆正常(0.99*0.99)+A 引擎故障 B 引擎正常(0.99*0.01)+B 引擎故障 A 引擎正常(0.99*0.01)

(%i1) 0.99*0.99/(0.99*0.99+0.99*0.01+0.99*0.01);

(%o1) 0.98019801980198

或以分數表示

(%i2) rat(0.99*0.99/(0.99*0.99+0.99*0.01+0.99*0.01));

rat: replaced 0.98019801980198 by 99/101 = 0.98019801980198

(%o2) $\frac{99}{101}$

※「rat(數值)」指令將數值轉換成分數形式。

11. 一汽車工廠所生產的汽車，長期而言，有以下的表現:

(1) 95%沒有缺點

(2) 4%有 1 個缺點

(3) 1%有 2 個缺點

假設兩輛新車各有缺點的事件為獨立事件，現在同時選購兩輛，求總共有 2 個缺點的機率。

兩輛新車共有 2 個缺點的機率為 A、B 各有 1 個缺點(0.04*0.04)+A 有 2 個缺點 B 沒有缺點(0.01*0.95)+B 有 2 個缺點 A 沒有缺點(0.01*0.95)

(%i1) 0.04*0.04+0.01*0.95+0.01*0.95;

(%o1) 0.0206

12. 袋中有 5 紅球與 3 白球，先取出兩球，但不看其顏色，再從袋中取出兩球，則後取的兩球球色分別為一紅一白的機率是多少？

1-2 數學期望值與二項分配 <u>**※本章節不建議使用 Maxima 解題※**</u>

P.26

例題 1：隨機變數 X 定義為 X={1，機率是 p；0，機率是 1-p，期中 0<p<1，求 X 的期望值、變異數與標準差。

P.27

隨堂練習：隨機變數 X 定義為 X={5，機率是$\frac{1}{6}$；0，機率是$\frac{5}{6}$，求 X 的期望值與變異數。

例題 2：設生男、生女的機率均等，對有 3 個小孩的家庭，以隨機變數 X 表示男孩子的數量，求 X 的期望值與標準差。

P.28

隨堂練習：隨機變數 X 的取值是 1，2，3 機率分別是$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{4}$，求 X 的標準差

P.29

例題 3：有一名歌手十年來的收入期望值是 4,000,000 元，標準差是 800,00 元，這名歌手的經紀人年收入是從這名歌手年收入中抽取 15%，外加固定的 400,000 元，求這經紀人十年來的收入期望值與標準差。

隨堂練習 3：設 X 是一隨機變數且 Var(3X+7)=144，求 X 的標準差。

P.30

例題 4：連續投擲一公正骰子 2 次，以 X 表示出現點數的和，求 X 的期望值與變異

數。

P.31

隨堂練習：一袋中有寫著 10, 20, 80 號碼的卡片各一張，自袋中隨機取卡片兩次，一次一張，取後放回，以隨機變數 X 表示兩次的號碼和，求 X 的期望值與變異數。

P.32

例題 5：若 X 與 Y 為獨立的隨機變數，其變異數分別是 9 與 16，求 Var(2X+Y)與 Var(2X-3Y)。

隨堂練習：若 X 與 Y 為獨立的隨機變數，且 Var(X)=1，Var(Y)=10，求 Var(3X+4Y)。

P.34

例題 6：連續投擲一均勻硬幣 5 次，以隨機變數 X 表示出現正面的次數，求 X 的機率分配。

隨堂練習：連續投擲一公正骰子 3 次，以隨機變數 Y 表示出現點數 5 的次數，求 Y 的機率分配。

P.35

例題 7：連續投擲一公正骰子 5 次，以隨機變數 X 表示出現點數 6 的次數，求 X 的

期望值、變異數與標準差。

P.36

隨堂練習：連續投擲一均勻硬幣 5 次，以隨機變數 X 表示出現正面的次數，求 X 的期望值、變異數與標準差。

P.38

例題 8：設 X 是參數為(5，$\frac{1}{6}$)之二項分配的成功次數，計算 P({ μ-α ≦X≦ μ+α }) 與 P({ μ-2α ≦X≦ μ+2α })。

P.39

隨堂練習：例題 8 中，計算 P({ μ-3α ≦X≦ μ+3α })。

P.39

例題 9：連續投擲一公正骰子 500 次，以 $\overline{X}$ 表示這 500 次所出現 5 點的比率，計算 $\overline{X}$ 的期望值及標準差 $\sigma_{\overline{X}}$，並估計 $\overline{X}$ 會落在與其期望值相距三個標準差範圍內的機率。

P.40

隨堂練習：連續投擲一均勻硬幣 2500 次，以 $\overline{X}$ 表示出現正面次數的比率，計算 $\overline{X}$ 的標準差 $\sigma_{\overline{X}}$，並估計 $\overline{X}$ 會落在與其期望值相距兩個標準差範圍內的機率。

P.40 **習題 1-2**

1. 以 X 表示投擲一公正骰子出現的點數，求 2X+5 的變異數與標準差。

2. 一隨機變數 X 滿足 E($3X^2$)=75，且 E(X)=3，求 X 的變異數與標準差。

3. 連續投擲一公正骰子 6 次，以 X 表示出現奇數點的次數，求 X 的期望值與變異數。

4. 中有白球 3 個，紅球 5 個，球大小一致且被取出的機會均等，連續自袋中取球 5 次，每次取一球，放回後再取，求取得紅球次數的期望值。

5. 同時投擲兩個公正骰子，以 X 表示出現的點數乘積，求 X 的期望值。

P.40

6. 連續投擲一均勻硬幣 9 次，以 X 表示出現正面的次數，求 X 會落在與其期望值相距三個標準差範圍內的機率。

7. 投擲一均勻硬幣 4 次，以 X 表示出現的正面數，求 X^2 的期望值。

8. 設 X 與 Y 是兩獨立隨機變數，取值都是 0，1，2 且機率分配分別是 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{6}$，求 3X+4Y 的期望值與變異數。

9. 調查顯示 20%的大學生曾申請助學貸款，現在抽選 5 位大學生，求至少有 2 位曾申請助學貸款的機率。

10. 根據孟德爾遺傳學理論，一種開白色花朵的植物與另一開紅色花朵的同種植物經人工傳播花粉所得到的種子，有 25%種植後會開出紅色花朵，現在取這樣的種子

6 粒種植後，求至少有 4 棵會開出紅色花朵的機率。

1-3 交叉分析 ※本章節不建議使用 Maxima 解題※

P.45

例題 1：美國針對能源緊縮政策做意見調查，對象是從民主黨員與共和黨員中隨機抽出 500 人，意見調查的選項是贊成，無意見與反對，依“黨別“與“意見“兩個定性變數而得到下面的列聯表。試製作相對次數列聯表。

	贊成	無意見	反對	合計
民主黨員	138	83	64	285
共和黨員	64	67	84	215
總計	202	150	148	500

隨堂練習：美國一所著名學校於 1998 年到 1999 年間有 1200 位教職員，依性別與職等兩定性變數做成下面的列聯表。試製作相對次數列聯表。

	男	女	合計
助理教授	120	210	330
副教授	150	420	570
教授	60	240	300
合計	330	870	1200

P.48

例題 2：某校的 300 名高三學生第一次模擬考試的數學成績及格與不及格人數如下表所示，試分析”及格與否”與”性別”是不是有關聯。

	及格	不及格	合計
男	125	55	180
女	82	38	120
合計	207	93	300

隨堂練習：某大學的推甄入學當中，應考男、女生與錄取男、女生的人數如下表所示，試分析”錄取與否”與”性別”的關聯性。

	錄取	未被錄取	合計
男	18	22	40
女	10	20	30
合計	28	42	70

P.49

例題 3：從一副撲克牌中抽取一張，記錄其花色與點數，得到下面點數(2~10、J、Q、K、A)與花色(紅與黑)的列聯表，分析”抽到 A”與”花色是紅”的關聯性。

	紅	黑	合計
A	2	2	4
不是 A	24	24	48
合計	26	26	52

P.50

隨堂練習：統計 100 位學生月考成績得到下面的列聯表，分析”性別”與”及格與否”的關聯性。

	及格	不及格	合計
男	45	15	60
女	24	16	40
合計	69	31	100

P.52

例題 4：分別追蹤 300 位有手機的駕駛與另 500 位沒有手機駕駛一年，得到下列的事

故統計表，”發生事故”與”是否有手機”是否有關聯？

	事故	無事故	合計
有手機	12	288	300
無手機	20	480	500
合計	32	768	800

隨堂練習：抽樣調查 50 位大學生與 100 位社會人士的抽菸與否的列聯表，判定”抽菸”與”是否在學”的關聯性

	抽菸	不抽菸	合計
大學生	5	45	50
社會人士	10	90	100
合計	15	135	150

P.40 **習題 1-3**

1.男性 250 人與女性 150 人參加公司所舉辦的抽獎活動，男性有 48 人中獎，女性有

360 人中獎，試製作”性別”與”中獎”兩定性變數的相對次數列聯表。

2.從共 300 人的社區中抽 43 位輪流當義工，依”性別”與”抽中與否”分類而得到下面的列聯表，分析”性別”與”抽中與否”的關聯性。

	抽中	未抽中	合計
男	8	152	160
女	35	105	140
合計	43	257	300

3.一製造公司於改善計劃實施前後生產產品的狀況如下表所示，判定這改善計劃是否真正改善產品之生產狀況。

	良品	不良品
之前	45	800
之後	40	710

4.於下方列聯表中，以 A_1 表示男性的事件，A_2 表示女性的事件，B_1 表示錄取的事件，B_2 表示不錄取的事件：

(1) 計算 $P(B_1|A_1)$ 與 $P(B_1|A_2)$ ，$P(B_1|A_2)$ 與 $P(B_2|A_2)$ ，並跟 $P(B_1)$ 與 $P(B_2)$ 做比較

(2) 計算 $P(A_1|B_1)$ 與 $P(A_2|B_1)$ ，$P(A_1|B_2)$ 與 $P(A_2|B_2)$ ，並跟 $P(A_1)$ 與 $P(A_2)$ 做比較

(3) “性別”與”錄取與否”是否有關聯？

1-4　分析二維數據　※本章節不建議使用 Maxima 解題※

P.56

例題 1：由抽樣得到一組二維數據如下，作出這組數據的散佈圖。

X	5	5	3	4	2	2	1	1
Y	20	10	30	20	20	30	20	10

隨堂練習：作出下列數據的散佈圖

X	2	2	3	3	4	4	5	5
Y	7	5	7	8	6	5	3	4

P.57

例題 2：調查 10 位運動員的身高與體重得到的數據如下，作出這組數據的散佈圖

身高(公分)	181	182	184	190	185	186	187	188	192	185
體重(公斤)	75	76	80	85	83	84	86	85	85	91

隨堂練習：10 位學生某次月考的數學成績與英文成績如下表所示，作出這組數據的散佈圖，並觀察散佈圖呈現出的數學成績與英文成績之關係為何？

數學	100	95	96	85	86	85	84	92	94	93
英文	85	87	94	92	96	95	86	89	87	89

P.61

例題 3：承例題 2，10 位運動員的身高體重如下，求身高與體重的相關係數

身高(公分)	181	182	184	190	185	186	187	188	192	185
體重(公斤)	75	76	80	85	83	84	86	85	85	91

隨堂練習：求隨堂練習中數學與英文成績的相關系數

P.62

例題 4：計算下列二維數據的相關係數，並作出其散佈圖

X	16	13	10	7	4
Y	10	12	14	16	18

P.63

隨堂練習：計算下列二維數據的相關係數，並作出其散佈圖

X	12	13	14	11
Y	73	76	79	70

P.65

例題 5：從一組 20 個二維數據(x,y)得到下列的數據：$\sum_{j=1}^{20} x_j = 160$、$\sum_{j=1}^{20} y_j = 1200$、$\sum_{j=1}^{20} x_j^2 = 1400$、$\sum_{j=1}^{20} y_j^2 = 75000$、$\sum_{j=1}^{20} x_j y_j = 10000$，求 X、Y 的相關係數

P.66

隨堂練習： 分析一組二維數據而得到下列數據 $\sum_{j=1}^{20} x_j = 20$、$\sum_{j=1}^{20} y_j = 100$、$\sum_{j=1}^{20} x_j^2 = 85$、$\sum_{j=1}^{20} y_j^2 = 1500$、$\sum_{j=1}^{20} x_j y_j = 326$，求這組數據的相關係數

P.67

例題 6： 座標平面上，求 A(1 , 3)、B(3 , 2)、C(5 , 7)三點所決定的迴歸直線方程式

P.68

隨堂練習： 座標平面上，求 P(3 , 1)、Q(2 , 3)、R(7 , 5)三點所決定的迴歸直線方程式

P.69

例題 7： 承例題 2 與例題 4，10 位運動員的身高與體重如下，求體重 y 對身高 x 的迴歸直線方程式

身高(公分)	181	182	184	190	185	186	187	188	192	185
體重(公斤)	75	76	80	85	83	84	86	85	85	91

P.70

隨堂練習： 一組 8 個二為數據(x,y)滿足 $\sum_{j=1}^{8} x_j = 1200$、$\sum_{j=1}^{8} y_j = 400$、$S_{xx}$=840、$S_{xy}$=960，求這組數據的相關係數

例題 8： 某一新產品的價格與銷售量如下所示：

價格 X	300	340	360	400
銷售量 Y	34	32	28	22

透過 Y 對 X 的迴歸直線預測價格為 325 時的銷售量

P.71

隨堂練習：分析一組 25 個二維數據而得到，$\overline{x}=15$、$\overline{y}=14$、$S_{yy}=50$、$S_{xy}=12$，利用 Y 對 X 的迴歸直線預測 X=16 時 Y 的值

P.40 **習題 1-4**

1.求下列二維數據的相關係數

X	1	2	3	4	5
Y	5	8	9	12	6

2.一組 20 個的二維數據滿足下列條件，求這組數據的相關係數：$\sum_{j=1}^{20} x_j = 1200$、$\sum_{j=1}^{20} y_j = 1400$、$\sum_{j=1}^{20} x_j^{\,2} = 73600$、$\sum_{j=1}^{20} y_j^{\,2} = 98300$、$\sum_{j=1}^{20} x_j y_j = 84300$

3.一組 8 個的二維數據滿足下列條件：$\sum_{j=1}^{8} x_j = 120$、$\sum_{j=1}^{8} y_j = 40$、$S_{xx}=84$、$S_{yy}=168$、$S_{xy}=108$，求 Y 對 X 的迴歸直線方程式，並推測 X=15 時 Y 的值

4.利用最小瓶方法求下列二維數據所決定的迴歸直線方程式，並預測 x=5 時 y 得值

X	3	2	6	1
Y	6	4	7	3

5.虎克定律表示彈簧的彈性範圍內，彈簧的伸長量 L 與吊掛物體的重量 F 成正比，透過實驗得到下面的數據：

F(公斤)	5	10	15	20	25
L(公分)	20	29	36	44	51

求 F 對 L 的迴歸直線方程式

6.為了解成年人身高與鞋子尺寸的關聯性而做抽樣調查，得到 9 位男性身高與鞋子的

號數如下：

身高(公分)	192	180	180	182	178	178	175	177	178
鞋號	13	11	9	10	11	10	8	9	9

求身高與鞋號的相關係數

7.汽車的耗油量與速度有關聯性，測試一重量為 1.8 噸的汽車，而得到下面的數據：

速度(km/hr)	48	64	80	96	112
耗油量(km/L)	7.7	8.4	6.9	6.7	5.3

求耗油量 P 對速度 V 的迴歸直線方程式，並預測時速是 90(km/hr)的耗油量

8.利用最小平方法得到二維數據(x_1,y_1)、(x_2,y_2)、…、(x_n,y_n)的迴歸直線方程式為 $y=2x+5$，另一組二維數據(u_1,v_1)、(u_2,v_2)、…、(u_n,v_n)是透過 $u=3x+7$，$v=-4y+6$ 所得到，求 v、u 的迴歸直線方程式

第二章　矩陣

2-1　矩陣的加法與係數積

P.80

例題 1： 分別列出下列矩陣：

(1) $A=\left[a_{ij}\right]_{2\times3}$，其中 $a_{ij}=i+j$

(2) $B=\left[b_{ij}\right]_{3\times2}$，其中 $b_{ij}=i^2+j^2$

P.81

隨堂練習： 列矩陣 $C=\left[c_{ij}\right]_{2\times3}$，其中 $c_{ij}=\left|i+j\right|$

例題 2： 甲、乙、丙三人參加高爾夫球賽，四回合的乘積如下：

甲：72、69、73、67；乙：75、73、74、72；丙：81、73、70、76，每一回合以 72 桿圍標準桿，只計算與標準桿的差數，例如 69 桿為-3 桿，請以 3×4 階矩陣表示這三人的成績

(%i1) matrix([72-72,69-72,73-72,67-72],[75-72,73-72,74-72,72-72],[81-72,73-72,70-72,76-72]);

(%o1) $\begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 & -5 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 9 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

＊第一列表示甲、第二列表示乙、第三列表示丙；第一行表示第一回合、第二行表示第二回合、第三行表示第三回合、第四行表示第四回合。

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

隨堂練習： 在一高爾夫球賽中，甲、乙、丙三名選手的成績扣除標準桿 72 桿分別為：

甲：2、-1、-3、5 ； 乙：-2、3、3、-1 ； 丙：-1、0、0、1 ，請以 3×4 矩陣表示這三人未扣除標準桿前的成績。

(%i1) matrix([2+72,-1+72,-3+72,5+72],[-2+72,3+72,3+72,-1+72],[-1+72,0+72,0+72,1+72]);

(%o1) $\begin{bmatrix} 74 & 71 & 69 & 77 \\ 70 & 75 & 75 & 71 \\ 71 & 72 & 72 & 73 \end{bmatrix}$

＊第一列表示甲、第二列表示乙、第三列表示丙；第一行表示第一回合、第二行表示第二回合、第三行表示第三回合、第四行表示第四回合。

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

P.82

例題 3： 設 x、y、z 是實數且 A、B 是下列的矩陣，已知 A=B，求 x、y、z 的值：

$$A=\begin{bmatrix} x & 2 \\ 3 & y \end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} x^2 & x+1 \\ y+4 & 2z+1 \end{bmatrix}$$

(%i1) solve([x=x^2,x+1=2,3=y+4,y=2*z+1],[x,y,z]);

(%o1) [[x=1,y=-1,z=-1]]

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

隨堂練習： 設 x、y、z、u、v、w 都是實數且 A、B 是下列的矩陣，已知 A=B，求 x、y、z、u、v、w 的值

$$A=\begin{bmatrix} 1 & x \\ 2 & y \\ 3 & z \end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} u & -1 \\ v & -4 \\ w & -7 \end{bmatrix}$$

(%i1) solve([1=u,2=v,3=w,x=-1,y=-4,z=-7],[u,v,w,x,y,z]);

(%o1) [[u=1,v=2,w=3,x=-1,y=-4,z=-7]]

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

P.85

例題 4：設 A、B、C 是下列的 3×2 階矩陣，求 A+(B+C)

$$A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}\quad,\quad B=\begin{bmatrix}-2&3\\4&-2\\-1&7\end{bmatrix}\quad,\quad C=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\\0&-5\end{bmatrix}$$

(%i1) A: matrix([1,2],[3,4],[5,6]);

(%o1) $\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}$

(%i2) B: matrix([-2,3],[4,-2],[-1,7]);

(%o2) $\begin{bmatrix}-2&3\\4&-2\\-1&7\end{bmatrix}$

(%i3) C: matrix([0,1],[1,0],[0,-5]);

(%o3) $\begin{bmatrix}0&1\\1&0\\0&-5\end{bmatrix}$

(%i4) A+(B+C);

(%o4) $\begin{bmatrix}-1&6\\8&2\\4&8\end{bmatrix}$

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

隨堂練習：設 A、B、C 是例題 4 中的 3×2 階矩陣，求(A+B)+C，並驗證(A+B)+C=A+(B+C)

(%i1) A: matrix([1,2],[3,4],[5,6]);

(%o1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

(%i2) B: matrix([-2,3],[4,-2],[-1,7]);

(%o2) $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -2 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$

(%i3) C: matrix([0,1],[1,0],[0,-5]);

(%o3) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$

(%i4) (A+B)+C;

(%o4) $\begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 8 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$

(%i5) if A+(B+C)= (A+B)+C then answer=yes else answer=no;

(%o5) answer=yes

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

P.87

例題 5：設 A、B 為下列的二階方陣，求 A-B

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 4 \\ -5 & 7 & 6 \\ 8 & -1 & -9 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 6 & 3 & 7 \\ 4 & -4 & -5 \end{bmatrix}$$

(%i1) A: matrix([7,3,4],[-5,7,6],[8,-1,-9]);

(%o1) $\begin{bmatrix} 7 & 3 & 4 \\ -5 & 7 & 6 \\ 8 & -1 & -9 \end{bmatrix}$

(%i2) B: matrix([4,-1,5],[6,3,7],[4,-4,-5]);

(%o2) $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 6 & 3 & 7 \\ 4 & -4 & -5 \end{bmatrix}$

(%i3) A-B;

(%o3) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -11 & 4 & -1 \\ 4 & 3 & -4 \end{bmatrix}$

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

隨堂練習：設 A、B 為下列的二階方陣，求 A-B

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$$

(%i1) A: matrix([1,-2],[-3,4]);

(%o1) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

(%i2) B: matrix([-2,1],[4,-5]);

(%o2) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$

(%i3) A-B;

(%o3) $\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -7 & 9 \end{bmatrix}$

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

P.88

例題 6：設 A、B 為下列的二階方陣，求 3A-4B

$$A=\begin{bmatrix}1 & 4\\ -2 & 5\end{bmatrix}\quad,\quad B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$$

(%i1) A: matrix([1,4],[-2,5]);

(%o1) $\begin{bmatrix}1 & 4\\ -2 & 5\end{bmatrix}$

(%i2) B: matrix([2,1],[1,3]);

(%o2) $\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$

(%i3) 3*A-4*B;

(%o3) $\begin{bmatrix}-5 & 8\\ -10 & 3\end{bmatrix}$

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

P.87

隨堂練習：設 A、B 為下列的二階方陣，且二階方陣 X 滿足 X+2A=B，求 X

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\quad,\quad B=\begin{bmatrix}-4 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}$$

(%i1) A: matrix([1,-1],[-1,1]);

(%o1) $\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$

(%i2) B: matrix([-4,3],[2,1]);

(%o2) $\begin{bmatrix}-4 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}$

(%i3) X=B-2*A;

(%o3) $X=\begin{bmatrix}-6 & 5\\ 4 & -1\end{bmatrix}$

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

P.91

例題 7：求下列矩陣 A、B 的轉置矩陣，並驗證$(A+B)^t=A^t+B^t$

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ -3 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

(%i1) transpose (A: matrix([2,3,-1],[-1,3,4]));

(%o1) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

(%i2) transpose (B: matrix([2,-4,5],[-3,3,7]));

(%o2) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$

(%i3) if transpose (A+B)= (transpose (A)+transpose (B)) then answer=yes else

answer=no;

(%o3) answer=yes

計算可得

$(A+B)^t$

(%i4) transpose (A+B);

(%o4) $\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -1 & 6 \\ 4 & 11 \end{bmatrix}$

(%i5) (transpose (A)+transpose (B));

(%o5) $\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -1 & 6 \\ 4 & 11 \end{bmatrix}$

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

※「transpose (矩陣)」指令表示將 $M_{n\times m}$ 轉置(行列互換)成 $M_{m\times n}$。

P.92

隨堂練習：求下列矩陣 A、B 的轉置矩陣，並驗證$(A+B)^t=A^t+B^t$

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & -3\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{bmatrix}$$

(%i1) transpose (A: matrix([1,2],[2,-3]));

(%o1) $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & -3\end{bmatrix}$

(%i2) transpose (B: matrix([0,2],[-2,0]));

(%o2) $\begin{bmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{bmatrix}$

(%i3) if transpose (A+B)= (transpose (A)+transpose (B)) then answer=yes else answer=no;

(%o3) answer=yes

計算可得

$(A+B)^t$

(%i4) transpose (A+B);

(%o4) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 4 & -3\end{bmatrix}$

(%i5) (transpose (A)+transpose (B));

(%o5) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 4 & -3\end{bmatrix}$

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

※「transpose (矩陣)」指令表示將 $M_{n\times m}$ 轉置(行列互換)成 $M_{m\times n}$。

例題 8：設 A、B 都是三階方陣，A 是對稱方陣，B 是反對稱方陣且

$$A+B=\begin{bmatrix}1 & 4 & 2\\ 2 & -5 & 7\\ -3 & 6 & 9\end{bmatrix}$$，求方陣 A、B

取$(A+B)^t$轉置矩陣：$(A+B)^t=A^t+B^t$

A 是對稱方陣：$A=A^t$ ，B 是反對稱方陣：$-B=B^t$，$A-B=A^t+B^t$

(%i1) transpose (matrix([1,4,2],[2,-5,7],[-3,6,9]));

(%o1) $$\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 4 & -5 & 6\\ 2 & 7 & 9\end{bmatrix}$$

(A+B)+(A-B)=2A

(%i2) A=(matrix([1,4,2],[2,-5,7],[-3,6,9])+ matrix([1,2,-3],[4,-5,6],[2,7,9]))/2;

(%o2) $$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & -\frac{1}{2}\\ 3 & -5 & \frac{13}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{13}{2} & 9\end{bmatrix}$$

(A+B)-(A-B)=2B

(%i3) B=(matrix([1,4,2],[2,-5,7],[-3,6,9])-matrix([1,2,-3],[4,-5,6],[2,7,9]))/2;

(%o3) $$B=\begin{bmatrix}0 & 1 & \frac{5}{2}\\ -1 & 0 & \frac{1}{2}\\ -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}$$

※「matrix($[a_{11},a_{12},\cdots,a_{1m}],\cdots,[a_{n1},a_{n2},\cdots,a_{nm}]$)」指令表示 n×m 矩陣。

※「transpose (矩陣)」指令表示將 $M_{n\times m}$ 轉置(行列互換)成 $M_{m\times n}$。

P.93

隨堂練習：設 A、B 都是二階方陣，A 是對稱方陣，B 是反對稱方陣且

$$2A+B=\begin{bmatrix}2 & 6\\ 8 & 3\end{bmatrix}$$，求方陣 A、B

取$(2A+B)^t$轉置矩陣：$(2A+B)^t=2A^t+B^t$

A 是對稱方陣：$2A=2A^t$ ，B 是反對稱方陣：$-B=B^t$，$2A-B=2A^t+B^t$

(%i1) transpose (matrix([2,6],[8,3]));

(%o1) $\begin{bmatrix}2 & 8\\ 6 & 3\end{bmatrix}$

(2A+B)+(2A-B)=4A

(%i2) A=(matrix([2,6],[8,3])+ matrix([2,8],[6,3]))/4;

(%o2) $A=\begin{bmatrix}1 & \frac{7}{2}\\ \frac{7}{2} & \frac{3}{2}\end{bmatrix}$

(2A+B)-(2A-B)=2B

(%i3) B=(matrix([2,6],[8,3])-matrix([2,8],[6,3]))/2;

(%o3) $B=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

※「matrix($[a_{11},a_{12},\cdots,a_{1m}],\cdots,[a_{n1},a_{n2},\cdots,a_{nm}]$)」指令表示 n×m 矩陣。

※「transpose (矩陣)」指令表示將 $M_{n\times m}$ 轉置(行列互換)成 $M_{m\times n}$。

P.94 **習題 2-1**

1.求下列矩陣中未知數 x、y 的值：

(1) $\begin{bmatrix} x+1 & 7 \\ -3 & 2y+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 7 \\ -3 & y \end{bmatrix}$

(%i1) solve([x+1=2*x,2*y+3=y],[x,y]);

(%o1) [[x=1,y=-3]]

(2) $\begin{bmatrix} x+2 & 4 & 7 \\ 3 & 2y & 2x \\ 6 & -2 & y+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+6 & 4 & 7 \\ 3 & 18 & -8 \\ 6 & -2 & 11 \end{bmatrix}$

(%i1) solve([x+2=2*x+6,2*y=18,2*x=-8,y+2=11],[x,y]);

solve: dependent equations eliminated: (3 4)

(%o1) [[x=-4,y=9]]

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

2.根據以下給定的矩陣 A、B，求 3A-5B

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

(%i1) A: matrix([1,-1],[3,-2]);

(%o1) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

(%i2) B: matrix([0,7],[-3,4]);

(%o2) $\begin{bmatrix} 0 & 7 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

(%i3) 3*A-5*B;

(%o3) $\begin{bmatrix} 3 & -38 \\ 24 & -26 \end{bmatrix}$

(2) $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

(%i1) A: matrix([3,6,7],[1,-2,5]);

(%o1) $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

(%i2) B: matrix([2,-2,4],[3,1,-2]);

(%o2) $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

(%i3) 3*A-5*B;

(%o3) $\begin{bmatrix} -1 & 28 & 1 \\ -12 & -11 & 25 \end{bmatrix}$

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

3. 設 $A=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ ， $B=\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$，解方程式 2X+A=3(X-B)

設矩陣 $X=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}$

(%i1) solve([2*a+2=3*(a-0), 2*b-3=3*(b-5), 2*c-1=3*(c-4), 2*d+2=3*(d-0),

2*e+4=3*(e-3), 2*f-3=3*(f-(-2))],[a,b,c,d,e,f]);

(%o1) [[a=2,b=12,c=11,d=2,e=13,f=-9]]

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

4. 設 $A=\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 5 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$ ， $B=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 6 & -1 & 5 \end{bmatrix}$，求 $2A-3B^t$

(%i1) A: matrix([-4,2],[0,5],[7,3]);

(%o1) $\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 5 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$

(%i2) B: matrix([1,-2,4],[6,-1,5]);

(%o2) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 6 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

(%i3) 2*A-3*transpose(B);

(%o3) $\begin{bmatrix} -11 & -14 \\ 6 & 13 \\ 2 & -9 \end{bmatrix}$

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

※「transpose (矩陣)」指令表示將 $M_{n\times m}$ 轉置(行列互換)成 $M_{m\times n}$。

5. 設 $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 3 & 7 & -8 \end{bmatrix}$ ， $B=\begin{bmatrix} -1 & -3 & 5 \\ 4 & 6 & 9 \end{bmatrix}$，求兩個 2×3 階矩陣 X、Y，使滿足矩陣方程組{2X+Y=A , 3X+2Y=B}

設矩陣 $X=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ ， $Y=\begin{bmatrix} u & v & w \\ x & y & z \end{bmatrix}$

(%i1) solve([2*a+u=2, 2*b+v=-1, 2*c+w=6, 2*d+x=3, 2*e+y=7, 2*f+z=-8, 3*a+2*u=-1,
3*b+2*v =-3, 3*c+2*w =5, 3*d+2*x =4, 3*e+2*y =6, 3*f+2*z =9] ,
[a,b,c,d,e,f,u,v,w,x,y,z]);

(%o1) [[a=5,b=1,c=7,d=2,e=8,f=-25,u=-8,v=-3,w=-8,x=-1,y=-9,z=42]]

∗ $X=\begin{bmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 2 & 8 & -25 \end{bmatrix}$ ， $Y=\begin{bmatrix} -8 & -3 & -8 \\ -1 & -9 & 42 \end{bmatrix}$

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

6. 設 $E_1=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$、$E_2=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$、$E_3=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$、$E_4=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$、$A=\begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$，試將矩陣 A 表示成 $aE_1+bE_2+cE_3+dE_4$ 的形式

(%i1) solve([a*1+b*0+c*0+d*0=5, a*1+b*1+c*1+d*1=9, a*1+b*1+c*(-1)+d*(-1)=7, a*0+b*0+c*0+d*1=6] , [a,b,c,d]);

(%o1) [[a=5,b=3,c=-5,d=6]]

＊矩陣 A 表示成 $5E_1+3E_2-5E_3+6E_4$ 的形式

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

7. 某公司雇用工人 35 人，其中男工 20 人，女工 10 人，童工 5 人，且每天供應所有工人水果與點心，其數量如下面的矩陣 A、B、C 所示，試用一個矩陣表示這個公司每天應準備之水果與點心的總數量。

男工每人：$A=\begin{bmatrix}0&2&4\\1&3&6\\2&2&0\end{bmatrix}$ ； 女工每人：$B=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&1&2\\2&1&3\end{bmatrix}$ ； 童工每人：$C=\begin{bmatrix}0&3&2\\1&2&4\\1&2&3\end{bmatrix}$

(第一行代表蘋果、第二行代表牛奶、第三行代表餅乾；第一列代表早上、第二列代表中午、第三列代表晚上)

(%i1) A: matrix([0,2,4],[1,3,6],[2,2,0]);

(%o1) $\begin{bmatrix}0&2&4\\1&3&6\\2&2&0\end{bmatrix}$

(%i2) B: matrix([1,1,1] ,[2,1,2],[2,1,3]);

(%o2) $\begin{bmatrix}1&1&1\\2&1&2\\2&1&3\end{bmatrix}$

(%i3) C: matrix([0,3,2],[1,2,4],[1,2,3]);

(%o3) $\begin{bmatrix}0&3&2\\1&2&4\\1&2&3\end{bmatrix}$

(%i3) 20*A+10*B+5*C;

(%o3) $\begin{bmatrix} 10 & 65 & 100 \\ 45 & 80 & 160 \\ 65 & 60 & 45 \end{bmatrix}$

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

8. 設 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 3 & -4 & 7 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$，求兩個三階方陣 P、Q，使 A=P+Q，而 $P=P^t$ 且 $Q^t=-Q$

設矩陣 $P=\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}$ ， $Q=\begin{bmatrix} u & v & w \\ -v & x & y \\ -w & -y & z \end{bmatrix}$

(%i1) solve([a+u=2,b+v=1,c+w=6,b-v=3,d+x=-4,e+y=7,c-w=-2,e-y=3,f+z=4] ,

[a,b,c,d,e,f,u,v,w,x,y,z]);

(%o1) [[a=2-%r2,b=2,c=2,d=-%r3-4,e=5,f=4-%r1,u=%r2,v=-1,w=4,x=%r3,y=2,z=%r1]]

＊矩陣 $P=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ ， $Q=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ -4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

※ 答案中%r1、%r2、%r3 可以為任意實數

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

2-2 矩陣的乘法與意義

P.97

例題 1：計算乘積 AB 與 BA，其中：$A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 1\\ 2 & 1 & 2\end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -2 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}$

(%i1) A: matrix([1,4,1],[2,1,2]);

(%o1) $\begin{bmatrix}1 & 4 & 1\\ 2 & 1 & 2\end{bmatrix}$

(%i2) B: matrix([1,-1] ,[-2,2],[2,-1]);

(%o2) $\begin{bmatrix}1 & -1\\ -2 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}$

(%i3) A.B;

(%o3) $\begin{bmatrix}-5 & 6\\ 4 & -2\end{bmatrix}$

(%i4) B.A;

(%o4) $\begin{bmatrix}-1 & 3 & -1\\ 2 & -6 & 2\\ 0 & 7 & 0\end{bmatrix}$

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

P.98

隨堂練習：計算乘積 AB 與 BA，其中：$A=\begin{bmatrix}2 & -3 & 4\end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix}1\\ 3\\ 6\end{bmatrix}$

(%i1) A: matrix([2,-3,4]);

(%o1) $\begin{bmatrix}2 & -3 & 4\end{bmatrix}$

(%i2) B: matrix([1] ,[3],[6]);

(%o2) $\begin{bmatrix}1\\ 3\\ 6\end{bmatrix}$

(%i3) A.B;

(%o3) 17

(%i4) B.A;

(%o4) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 6 & -9 & 12 \\ 12 & -18 & 24 \end{bmatrix}$

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

P.99

例題 2：設 $A=\begin{bmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \\ 7 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 7 \end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 4 & 5 & 7 \\ 7 & 6 & -6 \end{bmatrix}$，求 AB 在(3,2)位置的元素

(%i1) A: matrix([5,7,6],[3,6,2],[7,3,5],[4,1,7]);

(%o1) $\begin{bmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \\ 7 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

(%i2) B: matrix([1,3,-3],[4,5,7],[7,6,-6]);

(%o2) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 4 & 5 & 7 \\ 7 & 6 & -6 \end{bmatrix}$

(%i3) row(A,3).col(B,2);

(%o3) 66

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

※「row(A 矩陣,第 n 列)」指令表示選取 A 矩陣第 n 列。(須先行定義一矩陣)

※「col(B 矩陣,第 m 行)」指令表示選取 B 矩陣第 m 行。(須先行定義一矩陣)

P.100

隨堂練習：設 $A=\left[a_{ij}\right]_{3\times4}=\left[2i+j\right]_{3\times4}$、$B=\left[b_{jk}\right]_{4\times3}=\left[3j-k\right]_{4\times3}$，求 AB 在(3,2)位置的元素

例題 3：甲、乙、丙三個股票投資人所持有 4 種股票 x、y、z、w 的數量(單位：千股)以每股買進價格與賣出價格(單位：元)，分別如矩陣 A、B 所示：

$$A=\begin{bmatrix}50 & 120 & 40 & 30\\ 120 & 150 & 60 & 70\\ 100 & 60 & 80 & 90\end{bmatrix}、B=\begin{bmatrix}10 & 15\\ 15 & 20\\ 12 & 10\\ 20 & 30\end{bmatrix}$$

A：(第一行代表 x、第二行代表 y、第三行代表 z、第四行代表 w；第一列代表甲、第二列代表乙、第三列代表丙)；B：(第一行代表買進、第二行代表賣出；第一列代表 x、第二列代表 y、第三列代表 z、第四列代表 w)

(1) 這三個投資人所持有四種股票的總買進價格與總賣出價格各為多少萬元？

(%i1) A: matrix([50,120,40,30],[120,150,60,70],[100,60,80,90]);

(%o1) $\begin{bmatrix}50 & 120 & 40 & 30\\ 120 & 150 & 60 & 70\\ 100 & 60 & 80 & 90\end{bmatrix}$

(%i2) B: matrix([10,15],[15,20],[12,10],[20,30]);

(%o2) $\begin{bmatrix}10 & 15\\ 15 & 20\\ 12 & 10\\ 20 & 30\end{bmatrix}$

(%i3) A.B;

(%o3) $\begin{bmatrix} 3380 & 4450 \\ 5570 & 7500 \\ 4660 & 6200 \end{bmatrix}$

＊甲買進 338 萬、賣出 445 萬；乙買進 557 萬、賣出 750 萬；丙買進 466 萬、賣出 620 萬

(2) 投資人甲獲利多少萬元？

(%i4) 445-338;

(%o4) 107

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

P.101

隨堂練習：甲、乙兩股票投資人買進四種股票 X、Y、Z、W，買進的數量與賣出價格分別為：

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}(\text{單位：千股})、B=\begin{bmatrix} 40 \\ 30 \\ 20 \\ 60 \end{bmatrix}(\text{單位：元})$$

A：(第一行代表 x、第二行代表 y、第三行代表 z、第四行代表 w；第一列代表甲、第二列代表乙)；B：(第一列代表 x、第二列代表 y、第三列代表 z、第四列代表 w)

這兩人買進股票的總成本各為多少元？

(%i1) A: matrix([2,1,4,4],[3,2,1,4]);

(%o1) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

(%i2) B: matrix([40],[30],[20],[60]);

(%o2) $\begin{bmatrix} 40 \\ 30 \\ 20 \\ 60 \end{bmatrix}$

(%i3) A.B;

(%o3) $\begin{bmatrix} 430 \\ 440 \end{bmatrix}$

＊甲成本 43 萬；乙成本 44 萬

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

P.102

例題 4： 設 $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$、$C=\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$，驗證 A(BC)=(AB)C

(%i1) A: matrix([1,-1],[2,1]);

(%o1) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

(%i2) B: matrix([-2,1],[3,-4]);

(%o2) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

(%i3) C: matrix([5,3],[3,1]);

(%o3) $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

(%i4) if A.(B.C)= (A.B).C then answer=yes else answer=no;

(%o4) answer=yes

計算可得

(%i5) A.(B.C);

(%o5) $\begin{bmatrix} -10 & -10 \\ -11 & -5 \end{bmatrix}$

(%i6) (A.B).C;

(%o6) $\begin{bmatrix} -10 & -10 \\ -11 & -5 \end{bmatrix}$

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

隨堂練習：設 $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix} 2 & -3 \end{bmatrix}$、$C=\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$，驗證(A+B)C=AC+BC

(%i1) A: matrix([1,3]);

(%o1) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}$

(%i2) B: matrix([2,-3]);

(%o2) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \end{bmatrix}$

(%i3) C: matrix([5,-4],[6,3]);

(%o3) $\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$

(%i4) if (A+B).C=A.C+B.C then answer=yes else answer=no;

(%o4) answer=yes

計算可得

(%i5) (A+B).C;

(%o5) $\begin{bmatrix} 15 & -12 \end{bmatrix}$

(%i6) A.C+B.C;

(%o6) $\begin{bmatrix} 15 & -12 \end{bmatrix}$

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

P.104

例題 5：設 $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$，驗證 $(A+B)^2 \neq A^2+2AB+B^2$

(%i1) A: matrix([1,-1],[2,1]);

(%o1) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

(%i2) B: matrix([-2,1],[3,-4]);

(%o2) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

(%i3) if (A+B). (A+B)=A.A+2*A.B+B.B then answer=yes else answer=no;

(%o3) answer=no

驗算可得知

(%i5) (A+B). (A+B);

(%o5) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -20 & 9 \end{bmatrix}$

(%i6) A.A+2*A.B+B.B;

(%o6) $\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -16 & 14 \end{bmatrix}$

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

隨堂練習： 設 $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$，驗證 $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$

(%i1) A: matrix([1,-1],[-1,2]);

(%o1) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

(%i2) B: matrix([3,-1],[-1,4]);

(%o2) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

(%i3) if (A+B). (A+B)=A.A+A.B+B.A+B.B then answer=yes else answer=no;

(%o3) answer=yes

計算可得

(%i5) (A+B). (A+B);

(%o5) $\begin{bmatrix} 20 & -20 \\ -20 & 40 \end{bmatrix}$

(%i6) A.A+A.B+B.A+B.B;

(%o6) $\begin{bmatrix} 20 & -20 \\ -20 & 40 \end{bmatrix}$

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

P.105

例題 6：設 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，計算 $A^2-(a+d)A+(ad-bc)I_2$

隨堂練習：設 $B=\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$，計算 $B^2-7B-2I_2$

P.107

例題 7：某一地區的開車人中，目前開小型車的人數有 15 萬人，開中、大型車的人口有 10 萬，每隔 5 年，有 20%會轉開中、大型車，其餘維持開小型車；而開中、大型車的人有 40%會轉開小型車，其餘維持開中、大型車，求經過 10 年後，這地區開車人口的分布狀態

假設 A 矩陣為目前開小型車與中大型車人數($A=\begin{bmatrix} 15 \\ 10 \end{bmatrix}$)；轉移矩陣 P 為有 20%會轉開中、大型車，其餘維持開小型車而開中、大型車的人有 40%會轉開小型車，其餘維持開中、大型車($P=\begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 \\ 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}$)。(第一行表示開小型車人口比例、第二行表示開中、大型車人口比例；第一列表示未來維持開小型車人口比例、第二列表示未來維持開中、大型車人口比例)

(%i1) A: matrix([15],[10]);

(%o1) $\begin{bmatrix} 15 \\ 10 \end{bmatrix}$

(%i2) P: matrix([0.8,0.4],[0.2,0.6]);

(%o2) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

(%i3) P.P.A;

(%o3) $\begin{bmatrix} 16.4 \\ 8.6 \end{bmatrix}$

＊10 年後，這地區開小型車人口 16.4 萬、中、大型車人口 8.6 萬

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

P.108

隨堂練習：例題 7 中，求經過 5 年後，這些地區開車人口分布狀態

同例 7

(%i1) A: matrix([16.4],[8.6]);

(%o1) $\begin{bmatrix} 16.4 \\ 8.6 \end{bmatrix}$

(%i2) P: matrix([0.8,0.4],[0.2,0.6]);

(%o2) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

(%i3) P.A;

(%o3) $\begin{bmatrix} 16 \\ 10 \end{bmatrix}$

＊10 年後，這地區開小型車人口 16 萬、中、大型車人口 10 萬

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

例題 8：有互相連通的大、小水池各一個，兩水池中的魚總數為 1400 條，每天由小水池游向大水池的魚量占小水池魚量的 40%，而從大水池游向小水池的魚量占大水池魚量的 30%，如此日復一日，大水池與小水池的魚量都不變，求大水池與小水池的魚量。

假設 A 矩陣為目前小水池與大水池魚數量($A=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$)；轉移矩陣 P 為每天由小水池游向大水池的魚量占小水池魚量的 40%，而從大水池游向小水池的魚量占大水池魚量的 30%，($P=\begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{bmatrix}$)。(第一行表示小水池魚量比例、第二行表示大水池魚量比例；第一列表示次日小水池魚量比例、第二列表示次日大水池魚量比例)

由題目：大水池與小水池的魚量都不變，表示 $\begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

(%i1) A: matrix([x],[y]);

(%o1) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

(%i2) P: matrix([0.6,0.3],[0.4,0.7]);

(%o2) $\begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{bmatrix}$

(%i3) solve([row(P,1).col(A,1)=x,row(P,2).col(A,1)=y,x+y=1400],[x,y]);

rat: replaced -0.4 by -2/5 = -0.4

rat: replaced 0.3 by 3/10 = 0.3

rat: replaced 0.4 by 2/5 = 0.4

rat: replaced -0.3 by -3/10 = -0.3

solve: dependent equations eliminated: (2)

(%o3) [[x=600,y=800]]

＊當小水池魚量 600 與大水池魚量 800 時，大水池與小水池的魚量都不變。

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

※「row(A 矩陣,第 n 列)」指令表示選取 A 矩陣第 n 列。(須先行定義一矩陣)

※「col(B 矩陣,第 m 行)」指令表示選取 B 矩陣第 m 行。(須先行定義一矩陣)

P.109

隨堂練習：某年一地區手機用戶總數為 6000 人，只有 A、B 兩家電信公司的門號可供選擇。每年 A 電信公司的用戶有 20%改用 B 電信公司的門號，B 電信公司的用戶有 40%改用 A 電信公司的門號。假設每個用戶只使用一個門號，經過一年後，A、B 兩家電信公司的用戶數量都不變，求該年度這地區 A、B 兩家電信公司的用戶數量？

假設 A 矩陣為目前 A 與 B 電信公司的用戶($A=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$)；轉移矩陣 P 為每年 A 電信公司的用戶有 20%改用 B 電信公司的門號，B 電信公司的用戶有 40%改用 A 電信公司的門號，($P=\begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 \\ 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}$)。(第一行表示 A 電信公司的用戶量、第二行表示 B 電信公司的用戶量；第一列表示次年 A 電信公司的用戶量、第二列表示次年 B 電信公司的用戶量)

由題目：A 與 B 電信公司的用戶量都不變，表示 $\begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 \\ 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

(%i1) A: matrix([x],[y]);

(%o1) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

(%i2) P: matrix([0.8,0.4],[0.2,0.6]);

(%o2) $\begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 \\ 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}$

(%i3) solve([row(P,1).col(A,1)=x,row(P,2).col(A,1)=y,x+y=6000],[x,y]);

rat: replaced -0.2 by -1/5 = -0.2

rat: replaced 0.4 by 2/5 = 0.4

rat: replaced 0.2 by 1/5 = 0.2

rat: replaced -0.4 by -2/5 = -0.4

solve: dependent equations eliminated: (2)

(%o3) [[x=4000,y=2000]]

＊當 A 電信公司用戶 4000 人與 B 電信公司用戶 2000 人時，經過一年後，A、B 兩家電信公司的用戶數量都不變。

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

※「row(A 矩陣,第 n 列)」指令表示選取 A 矩陣第 n 列。(須先行定義一矩陣)

※「col(B 矩陣,第 m 行)」指令表示選取 B 矩陣第 m 行。(須先行定義一矩陣)

P.110 習題 2-2

1.分別計算下列各小題的 AB，若 BA 有意義時，一併計算 BA：

(1) $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 4\end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix}$

(%i1) A: matrix([1,-1,4]);

(%o1) $\begin{bmatrix}1 & -1 & 4\end{bmatrix}$

(%i2) B: matrix([2] ,[2],[1]);

(%o2) $\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix}$

(%i3) A.B;

(%o3) 4

(%i4) B.A;

(%o4) $\begin{bmatrix}2 & -2 & 8\\2 & -2 & 8\\1 & -1 & 4\end{bmatrix}$

(2) $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\1 & 6 & -2\end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & -1\\1 & -1\end{bmatrix}$

(%i5) A: matrix([2,3,-1],[1,6,-2]);

(%o5) $\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\1 & 6 & -2\end{bmatrix}$

(%i6) B: matrix([1,-1] ,[1,-1],[1,-1]);

(%o6) $\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & -1\\1 & -1\end{bmatrix}$

(%i7) A.B;

(%o7) $\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}$

(%i8) B.A;

(%o8) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

(3) $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

(%i9) A: matrix([2,-1],[1,3]);

(%o9) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

(%i10) B: matrix([1,-1,1],[-1,1,-1]);

(%o10) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

(%i11) A.B;

(%o11) $\begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

(%i12) B.A;

(%o12) incompatible dimensions - cannot multiply

-- an error.   To debug this try debugmode(true);

(本小題 B.A 無意義)

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

2. 設 A 與 B 皆為二皆方陣，I 是二階單位方陣，下列各敘述何者恆為真？

(1) $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$

(2) $(A+I)^2=A^2+2A+I$

(3) 若 AB=0，則 A=0 或 B=0

(4) 若 $A^2 = I$ ，則 A=I 或 A=-I

(5) $(AB)^2 = A^2B^2$

3. 一連鎖商店有甲、乙、丙三個店面出售 P、Q、R、S 四種商品，出售量如矩陣 A 表示，而四種商品買入與出售的價格如矩陣 B 表示，計算 AB 並解釋結果

$$A = \begin{bmatrix} 20 & 10 & 15 & 9 \\ 10 & 30 & 6 & 8 \\ 30 & 20 & 10 & 20 \end{bmatrix} \text{、} B = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 10 & 15 \\ 7 & 12 \\ 9 & 15 \end{bmatrix}$$

A：(第一行代表 P、第二行代表 Q、第三行代表 R、第四行代表 S；第一列代表甲、第二列代表乙、第三列代表丙)；B：(第一行代表買入、第二行代表賣出；第一列代表 P、第二列代表 Q、第三列代表 R、第四列代表 S)

(%i1) A: matrix([20,10,15,9],[10,30,6,8],[30,20,10,20]);

(%o1) $\begin{bmatrix} 20 & 10 & 15 & 9 \\ 10 & 30 & 6 & 8 \\ 30 & 20 & 10 & 20 \end{bmatrix}$

(%i2) B: matrix([6,10],[10,15],[7,12],[9,15]);

(%o2) $\begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 10 & 15 \\ 7 & 12 \\ 9 & 15 \end{bmatrix}$

(%i3) A.B;

(%o3) $\begin{bmatrix} 406 & 665 \\ 474 & 742 \\ 630 & 1020 \end{bmatrix}$

＊甲店面買進 406 萬、賣出 665 萬；乙店面買進 474 萬、賣出 742 萬；丙店面買進

630 萬、賣出 1020 萬，其結果表示各店面買入與出去總價格。

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

P.111

4. 設 $A=\begin{bmatrix}1 & 4\\ -2 & 3\end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix}2 & 3 & 5\\ 1 & 4 & 6\end{bmatrix}$，計算 $(AB)^t$ 與 B^tA^t

(%i1) A: matrix([1,4],[-2,3]);

(%o1) $\begin{bmatrix}1 & 4\\ -2 & 3\end{bmatrix}$

(%i2) B: matrix([2,3,5],[1,4,6]);

(%o2) $\begin{bmatrix}2 & 3 & 5\\ 1 & 4 & 6\end{bmatrix}$

(%i3) transpose (A.B);

(%o3) $\begin{bmatrix}6 & -1\\ 19 & 6\\ 29 & 8\end{bmatrix}$

(%i4) transpose (B). transpose (A);

(%o4) $\begin{bmatrix}6 & -1\\ 19 & 6\\ 29 & 8\end{bmatrix}$

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

※「transpose (矩陣)」指令表示將 $M_{n\times m}$ 轉置(行列互換)成 $M_{m\times n}$。

5. 設 $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$，找出所有的二皆方陣 B，使得 AB=BA

假設矩陣 $B=\begin{bmatrix}w & x\\ y & z\end{bmatrix}$

(%i1) A: matrix([1,4],[-2,3]);

(%o1) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

(%i2) B: matrix([w,x],[y,z]);

(%o2) $\begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}$

(%i3) solve([2*w+y=2*w-x,2*x+z=w+2*x,2*y-w=2*y-z,2*z-x=y+2*z],[w,x,y,z]);

solve: dependent equations eliminated: (4 3)

(%o3) [[w=%r3,x=-%r4,y=%r4,z=%r3]]

＊ %r3、%r4 代表可為任意實數，故本題矩陣 $B=\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

6. 棲息在 A、B 兩小島的一種鳥類其總數為 5400 隻，每年 A 島上的鳥 80%會留在島上，20%移居到 B 島；B 島上的鳥 75%會留在島上，25%移居到 A 島。假設每年依這種方式遷移，兩個島上的鳥數量都保持一定，求 A、B 兩島上的鳥數量？

假設 A 矩陣為目前 A、B 小島的鳥類總數（$A=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$）；轉移矩陣 P 為每年由 A 島上遷移到 B 島鳥類量占 A 島的 20%，而從 B 島上遷移到 A 島鳥類量占 B 島的 25%，（$P=\begin{bmatrix} 0.8 & 0.25 \\ 0.2 & 0.75 \end{bmatrix}$）。(第一行表示 A 島鳥類總量比例、第二行表示 B 島鳥類總量比例；第一列表示次年 A 島鳥類總量比例、第二列表示次 B 島鳥類總量比例)

由題目：兩個島上的鳥數量都保持一定，表示 $\begin{bmatrix} 0.8 & 0.25 \\ 0.2 & 0.75 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

(%i1) A: matrix([x],[y]);

(%o1) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

(%i2) P: matrix([0.8,0.25],[0.2,0.75]);;

(%o2) $\begin{bmatrix} 0.8 & 0.25 \\ 0.2 & 0.75 \end{bmatrix}$

(%i3) solve([row(P,1).col(A,1)=x,row(P,2).col(A,1)=y,x+y=5400],[x,y]);

rat: replaced -0.2 by -1/5 = -0.2

rat: replaced 0.25 by 1/4 = 0.25

rat: replaced 0.2 by 1/5 = 0.2

rat: replaced -0.25 by -1/4 = -0.25

solve: dependent equations eliminated: (2)

(%o3) [[x=3000,y=2400]]

＊當 A 島鳥類總量 3000 與 B 島鳥類總量 2400 時，兩個島上的鳥數量都可保持一定

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

※「transpose (矩陣)」指令表示將 $M_{n\times m}$ 轉置(行列互換)成 $M_{m\times n}$。

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

7. 設 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$，計算 $A^2-6A+9I_2$ 的值

8. 調查三個政黨之黨員投票傾向，結果以矩陣 P 表示：

$$P=\begin{bmatrix} 0.9 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.3 \\ 0 & 0.1 & 0.6 \end{bmatrix}$$

P 的元素表示第 j 個黨員投票給第 i 個黨的機率。設現有三個黨的黨員人數分別是 50、30、20 (萬人)，而投票率分別為 70%、80%、90%，依上面的投票傾向，求各黨的得票數？

需計算三個黨之總投票人數(黨員人數×投票率)

(%i1) matrix ([0.9,0.2,0.1],[0.1,0.7,0.3],[0,0.1,0.6]) . matrix ([500000 *0.7,300000

*0.8,200000 * 0.9]);

(%o1) $\begin{bmatrix} 381000.0 \\ 257000.0 \\ 132000.0 \end{bmatrix}$

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

9. 設 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & -4 \end{bmatrix}$、$C=\begin{bmatrix} 1 & 8 & 7 \\ -15 & -6 & -29 \\ 15 & 6 & 29 \end{bmatrix}$，求二階方陣 X，使得 AXB=C

設矩陣 $X=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

(%i1) A: matrix([1,1],[-1,1],[1,-1]);

(%o1) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

(%i2) X: matrix([a,b],[c,d]);

(%o2) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

(%i3) B: matrix([1,2,3],[-2,-1,-4]);

(%o3) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & -4 \end{bmatrix}$

(%i4) A.X.B;

(%o4) $\begin{bmatrix} -2d+c-2b+a & -d+2c-b+2a & -4d+3c-4b+3a \\ -2d+c+2b-a & -d+2c+b-2a & -4d+3c+4b-3a \\ 2d-c-2b+a & d-2c-b+2a & 4d-3c-4b+3a \end{bmatrix}$

(%i3) solve([-2*d+c-2*b+a=1,-d+2*c-b+2*a=8,-4*d+3*c-4*b+3*a=7,-2*d+c+2*b-a=-15,

-d+2*c+b-2*a=-6,-4*d+3*c+4*b-3*a=-29,2*d-c-2*b+a=15,d-2*c-b+2*a=6,4*d-3*c-

4*b+3*a=29],[a,b,c,d]);

solve: dependent equations eliminated: (3 6 7 8 5)

(%o3) [[a=2,b=-3,c=3,d=5]]

＊矩陣 $X=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 3 & 5\end{bmatrix}$

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

2-3 矩陣的列運算及增廣矩陣的應用

P.113

例題 1：把下列方乘組改寫為矩陣方程式，並寫出係數矩陣。

(1) $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ -x+3y=1 \end{cases}$

(%i1) F1: 2*x-3*y=1; F2: -x+3*y =1;

(%o1) 2x-3y=1

(%o2) -x+3y=1

(%i3) coefmatrix([F1,F2],[x,y]);

(%o3) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

[F1,F2]為轉換的線性方程，[x,y]為轉換的參數；

(2) $\begin{cases} 2x-y-z=0 \\ 3x+y+2z=13 \end{cases}$

(%i1) F1: 2*x-y-z=0; F2: 3*x+y+2*y=13;

(%o1) 2x-y-z=0

(%o2) 3x+y+2y=13

(%i3) coefmatrix([F1,F2],[x,y,z]);

(%o3) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

[F1,F2]為轉換的線性方程，[x,y,z]為轉換的參數；

※「coefmatrix([F1,F2,F3],[x,y,z])」指令為加入矩陣 (<u>此矩陣不含常數項</u>)，並將 [F1,F2,F3]為欲轉換的線性方程，[x,y,z]為轉換的變數；

隨堂練習：把下列方乘組改寫成矩陣方程式：

$$\begin{cases} 2x+3y+z=6 \\ x-y+z=1 \\ 3x+2y+7z=12 \end{cases}$$

(%i1) F1: 2*x+3*y+z=6; F2: x-y+z=1; F3: 3*x+2*y+7*z=12;

(%o1) 2x+3y+z=6

(%o2) x-y+z=1

(%o3) 3x+2y+7z=12

(%i4) coefmatrix([F1,F2,F3],[x,y,z]);

(%o4) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$

[F1,F2,F3]為轉換的線性方程，[x,y,z]為轉換的參數；

※「coefmatrix([F1,F2,F3],[x,y,z])」指令為加入矩陣 (此矩陣不含常數項)，並將

[F1,F2,F3]為欲轉換的線性方程，[x,y,z]為轉換的變數；

P.114

例題 2：解方程組 $\begin{cases} y+z=5 \\ x+2y-z=6 \\ 2x+4y+z=15 \end{cases}$

(%i1) F1: y+z=5; F2: x+2*y-z=6; F3: 2*x+4*y+z=15;

(%o1) z+y=5

(%o2) -z+2y+x=6

(%o3) z+4y+2x=15

[F1,F2,F3]為轉換的線性方程，[x,y,z]為轉換的參數；

augcoefmatrix 指令為加入擴增矩陣(此矩陣含常數項)；

M 定義為方程組轉換後的增廣矩陣

(%i4) M:augcoefmatrix([F1,F2,F3],[x,y,z]);

(%o4) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -1 & -6 \\ 2 & 4 & 1 & -15 \end{bmatrix}$

擴增矩陣的常數項應為(5, 6, 15)，maxima 結果為(-5, -6, -15)，其正負號相反

將矩陣 M 進行轉置，再將第 4 列乘上負號，再轉置回來

(%i5) M:transpose(M);

(%o5) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ -5 & -6 & -15 \end{bmatrix}$

M[4]代表著矩陣 M 的第 4 列

(%i6) M[4]:M[4]*(-1);

(%o6) [5,6,15]

(%i7) M:transpose(M);

(%o7) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 15 \end{bmatrix}$

(新第二列定義為原矩陣第二列減第一列乘 2-得 M_{21} 為 1)

<u>＊其中$表示不顯示$之前之計算結果，只顯示$之後之計算結果</u>

(%i8) M[2]:M[2]-M[1]*2$M;

(%o8) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -3 & -4 \\ 2 & 4 & 1 & 15 \end{bmatrix}$

(新第三列定義為原矩陣第三列減第二列乘 2-得 M_{31} 為 0)

(%i9) M[3]:M[3]- M[2]*2$M;

(%o9) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 4 & 7 & 23 \end{bmatrix}$

(新第三列定義為原矩陣第三列減第一列乘 4-得 M_{32} 為 0)

(%i10) M[3]:M[3] -M[1]*4$M;

(%o10) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

(新第三列定義為原矩陣第三列乘(1/3)-得 M_{33} 為 1)

(%i11) M[3]:M[3]*(1/3)$M;

(%o11) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(新第一列定義為原矩陣第一列減第三列-得 M_{13} 為 0)

(%i12) M[1]:M[1]-M[3]$M;

(%o12) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(新第二列定義為原矩陣第二列加第三列乘 3-得 M_{23} 為 0)

(%i13) M[2]:M[2]+M[3]*3$M;

(%o13) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

＊可得 x=-1、y=4、z=1

※「augcoefmatrix([F1,F2,F3],[x,y,z])」指令為加入擴增矩陣 (此矩陣含常數項)，並將[F1,F2,F3]為欲轉換的線性方程，[x,y,z]為轉換的變數；

※「transpose (矩陣)」指令表示將 $M_{n\times m}$ 轉置(行列互換)成 $M_{m\times n}$。

P.115

隨堂練習：解方程組 $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+y-3z=6 \\ 3x-y+z=6 \end{cases}$

(%i1) F1: x+y+z=0; F2: 2*x+y-3*z=6; F3: 3*x-y+z=6;

(%o1) z+y+x=0

(%o2) -3z+y+2x=6

(%o3) z-y+3x=6

[F1,F2,F3]為轉換的線性方程，[x,y,z]為轉換的參數；

augcoefmatrix 指令為加入擴增矩陣(此矩陣含常數項)；

M 定義為方程組轉換後的增廣矩陣

(%i4) M:augcoefmatrix([F1,F2,F3],[x,y,z]);

(%o4) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & -6 \\ 3 & -1 & 1 & -6 \end{bmatrix}$

擴增矩陣的常數項應為(0, 6, 6)，maxima 結果為(0, -6, -6)，其正負號相反

將矩陣 M 進行轉置，再將第 4 列乘上負號，再轉置回來

(%i5) M:transpose(M);

(%o5) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & -6 & -6 \end{bmatrix}$

M[4]代表著矩陣 M 的第 4 列

(%i6) M[4]:M[4]*(-1);

(%o6) [0,6,6]

(%i7) M:transpose(M);

(%o7) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 6 \\ 3 & -1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

(新第二列定義為原矩陣第二列減第一列乘 2-得 M_{21} 為 0)

＊其中$表示不顯示$之前之計算結果，只顯示$之後之計算結果

(%i8) M[2]:M[2]-M[1]*2$M;

(%o8) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 6 \\ 3 & -1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

(新第三列定義為原矩陣第三列減第一列乘 3-得 M_{31} 為 0)

(%i9) M[3]:M[3]- M[1]*3$M;

(%o9) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 6 \\ 0 & -4 & -2 & 6 \end{bmatrix}$

(新第一列定義為原矩陣第一列加第二列-得 M_{32} 為 0)

(%i10) M[1]:M[1] +M[2] $M;

(%o10) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 6 \\ 0 & -1 & -5 & 6 \\ 0 & -4 & -2 & 6 \end{bmatrix}$

(新第三列定義為原矩陣第三列減第二列乘 4-得 M_{32} 為 0)

(%i11) M[3]:M[3]- M[2]*4$M;

(%o11) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 6 \\ 0 & -1 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 18 & -18 \end{bmatrix}$

(新第三列定義為原矩陣第三列除 18-得 M_{33} 為 1)

(%i12) M[3]:M[3]/18$M;

(%o12) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 6 \\ 0 & -1 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

(新第一列定義為原矩陣第一列加第三列乘 4-得 M_{13} 為 0)

(%i13) M[1]:M[1]+M[3]*4$M;

(%o13) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

(新第二列定義為原矩陣第二列乘(-1)減第三列乘 5-得 M_{23} 為 0)

(%i13) M[2]:M[2]*(-1)-M[3]*5$M;

(%o13) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

＊可得 x=2、y=-1、z=-1

※「augcoefmatrix([F1,F2,F3],[x,y,z])」指令為加入擴增矩陣 (<u>此矩陣含常數項</u>)，並將[F1,F2,F3]為欲轉換的線性方程，[x,y,z]為轉換的變數；

※「transpose (矩陣)」指令表示將 $M_{n\times m}$ 轉置(行列互換)成 $M_{m\times n}$。

例題 3：解方程組 $\begin{cases} x-2z+2w=1 \\ y+z-w=0 \\ 2x+3y+4z+w=5 \\ 3x+4y+3z+2w=6 \end{cases}$

(%i1) F1: x-2*z+2*w=1; F2: y+z-w=0; F3: 2*x+3*y+4*z+w=5;F4:3*x+4*y+3*z+2*w=6;

(%o1) -2z+x+2w=1

(%o2) z+y-w=0

(%o3) 4z+3y+2x+w=5

(%o4) 3z+4y+3x+2w=6

[F1,F2,F3]為轉換的線性方程，[x,y,z]為轉換的參數；

augcoefmatrix 指令為加入擴增矩陣(此矩陣含常數項)；

M 定義為方程組轉換後的增廣矩陣

(%i5) M:augcoefmatrix([F1,F2,F3,F4],[x,y,z,w]);

(%o5) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & -5 \\ 3 & 4 & 3 & 2 & -6 \end{bmatrix}$

擴增矩陣的常數項應為(1,0, 5, 6)，maxima 結果為(-1,0, -5, -6)，其正負號相反

將矩陣 M 進行轉置，再將第 4 列乘上負號，再轉置回來

(%i6) M:transpose(M);

(%o6) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -5 & -6 \end{bmatrix}$

M[5]代表著矩陣 M 的第 5 列

(%i7) M[5]:M[5]*(-1);

(%o7) [1,0,5,6]

(%i8) M:transpose(M);

(%o8) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

(新第三列定義為原矩陣第三列減第一列乘 2-得 M_{31} 為 0)

*其中$表示不顯示$之前之計算結果，只顯示$之後之計算結果

(%i9) M[3]:M[3]-M[1]*2$M;

(%o9) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & -3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

(新第四列定義為原矩陣第四列減第一列乘 3-得 M_{41} 為 0)

(%i10) M[4]:M[4]- M[1]*3$M;

(%o10) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & -3 & 3 \\ 0 & 4 & 9 & -4 & 3 \end{bmatrix}$

(新第三列定義為原矩陣第三列減第二列乘 3-得 M_{32} 為 0)

(%i11) M[3]:M[3] -M[2]*3 $M;

(%o11) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 9 & -4 & 3 \end{bmatrix}$

(新第四列定義為原矩陣第四列減第二列乘 4-得 M_{42} 為 0)

(%i12) M[4]:M[4]- M[2]*4$M;

(%o12) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(新第四列定義為原矩陣第四列減第三列-得第四列階為 0)

(%i13) M[4]:M[4]-M[3]$M;

(%o13) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(新第三列定義為原矩陣第三列除 5-得 M_{33} 為 1)

(%i14) M[3]:M[3]/5$M;

(%o14) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(新第一列定義為原矩陣第一列加第三列乘 2-得 M_{13} 為 0)

(%i15) M[1]:M[1]+M[3]*2$M;

(%o15) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & \frac{11}{5} \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(新第二列定義為原矩陣第二列減第三列-得 M_{23} 為 0)

(%i16) M[2]:M[2]-M[3] $M;

(%o16) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & \frac{11}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

∗ 可得 $z=\frac{3}{5}$、$y=-\frac{3}{5}+w$、$x=\frac{11}{5}-2w$，由左式知 x 與 y 可以 w 來表示，令 w=t，方程組的解為 $z=\frac{3}{5}$、$y=-\frac{3}{5}+t$、$x=\frac{11}{5}-2t$，t 為任意實數。

※「augcoefmatrix([F1,F2,F3],[x,y,z])」指令為加入擴增矩陣 (<u>此矩陣含常數項</u>)，並將[F1,F2,F3]為欲轉換的線性方程，[x,y,z]為轉換的變數；

※「transpose (矩陣)」指令表示將 $M_{n\times m}$ 轉置(行列互換)成 $M_{m\times n}$。

P.116

隨堂練習：解方程組$\begin{cases} x-2y+3z=1 \\ 2x+y-4z=3 \\ 4x-3y+2z=5 \end{cases}$

(%i1) F1: x-2*y+3*z=1; F2: 2*x+y-4*z=3; F3: 4*x-3*y+2*z=5;

(%o1) 3z-2y+x=1

(%o2) -4z+y+2x=3

(%o3) 2z-3y+4x=5

[F1,F2,F3]為轉換的線性方程，[x,y,z]為轉換的參數；

augcoefmatrix 指令為加入擴增矩陣(此矩陣含常數項)；

M 定義為方程組轉換後的增廣矩陣

(%i4) M:augcoefmatrix([F1,F2,F3],[x,y,z]);

(%o4) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -4 & -3 \\ 4 & -3 & 2 & -5 \end{bmatrix}$

擴增矩陣的常數項應為(1, 3, 5)，maxima 結果為(-1, -3, -5)，其正負號相反

將矩陣 M 進行轉置，再將第 4 列乘上負號，再轉置回來

(%i5) M:transpose(M);

(%o5) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \\ -1 & -3 & -5 \end{bmatrix}$

M[4]代表著矩陣 M 的第 4 列

(%i6) M[4]:M[4]*(-1);

(%o6) [1,3,5]

(%i7) M:transpose(M);

(%o7) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 4 & -3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

(新第二列定義為原矩陣第二列減第一列乘 2-得 M_{21} 為 1)

*其中$表示不顯示$之前之計算結果，只顯示$之後之計算結果

(%i8) M[2]:M[2]-M[1]*2$M;

(%o8) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -10 & 1 \\ 4 & -3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

(新第三列定義為原矩陣第三列減第一列乘 4-得 M_{31} 為 0)

(%i9) M[3]:M[3]- M[1]*4$M;

(%o9) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -10 & 1 \\ 0 & 5 & -10 & 1 \end{bmatrix}$

(新第三列定義為原矩陣第三列減第二列-得第三列皆為 0)

(%i10) M[3]:M[3] -M[2] $M;

(%o10) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(新第二列定義為原矩陣第二列除 5-得 M_{22} 為 1)

(%i11) M[2]:M[2]/5$M;

(%o11) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(新第一列定義為原矩陣第一列加第二列乘 2-得 M_{12} 為 0)

(%i12) M[1]:M[1]+M[2]*2$M;

(%o12) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{7}{5} \\ 0 & 1 & -2 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

＊令 z=t，方程組的解為 z=t、y=$\frac{1}{5}$+2t、x=$\frac{7}{5}$+t，t 為任意實數。

※「augcoefmatrix([F1,F2,F3],[x,y,z])」指令為加入擴增矩陣 (此矩陣含常數項)，並將[F1,F2,F3]為欲轉換的線性方程，[x,y,z]為轉換的變數；

※「transpose (矩陣)」指令表示將 $M_{n\times m}$ 轉置(行列互換)成 $M_{m\times n}$。

P.117

例題 4：解方程組$\begin{cases} x-y+2z+w=5 \\ x+z+w=7 \\ 2x-3y+5z-w=5 \\ 3x+2y+z-w=1 \end{cases}$

(%i1) F1: x-y+2*z+w=5; F2: x+z+w=7; F3: 2*x-3*y+5*z-w=5;F4:3*x+2*y+z-w=1;

(%o1) 2z-y+x+w=5

(%o2) z+x+w=7

(%o3) 5z-3y+2x-w=5

(%o4) z+2y+3x-w=1

[F1,F2,F3]為轉換的線性方程，[x,y,z]為轉換的參數；

augcoefmatrix 指令為加入擴增矩陣(此矩陣含常數項)；

M 定義為方程組轉換後的增廣矩陣

(%i5) M:augcoefmatrix([F1,F2,F3,F4],[x,y,z,w]);

$$(\%o5)\quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -7 \\ 2 & -3 & 5 & -1 & -5 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

擴增矩陣的常數項應為(5,7,5,1)，maxima 結果為(-1,-7, -5, -1)，其正負號相反

將矩陣 M 進行轉置，再將第 4 列乘上負號，再轉置回來

(%i6) M:transpose(M);

$$(\%o6)\quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -5 & -7 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

M[5]代表著矩陣 M 的第 5 列

(%i7) M[5]:M[5]*(-1);

(%o7) [5,7,5,1]

(%i8) M:transpose(M);

$$(\%o8)\quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 7 \\ 2 & -3 & 5 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(新第二列定義為原矩陣第二列減第一列-得 M_{21} 為 0)

＊其中$表示不顯示$之前之計算結果，只顯示$之後之計算結果

(%i9) M[2]:M[2]-M[1] $M;

$$(\%o9)\quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 5 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(新第三列定義為原矩陣第三列減第一列乘 2-得 M_{31} 為 0)

(%i10) M[3]:M[3]-M[1]*2$M;

$$(\%o10)\quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & -5 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(新第四列定義為原矩陣第四列減第一列乘 3-得 M_{41} 為 0)

(%i11) M[4]:M[4] -M[1]*3 $M;

$$(\%o11)\quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 5 & -5 & -4 & -14 \end{bmatrix}$$

(新第三列定義為原矩陣第三列加第二列-得 M_{32} 與 M_{33} 為 0)

(%i12) M[3]:M[3]+M[2] $M;

$$(\%o12)\quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 5 & -5 & -4 & -14 \end{bmatrix}$$

(新第四列定義為原矩陣第四列減第二列乘 5-得第四列階為 0)

(%i13) M[4]:M[4]-M[2]*5$M;

(%o13) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -24 \end{bmatrix}$

(新第三列定義為原矩陣第三列乘(-1/3)-得 M_{34} 為 1)

(%i14) M[3]:M[3]*(-1/3)$M;

(%o14) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -24 \end{bmatrix}$

(新第四列定義為原矩陣第四列乘(-1/4)-得 M_{44} 為 1)

(%i15) M[4]:M[4]*(-1/4)$M;

(%o15) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

(新第四列定義為原矩陣第四列減第三列-得 M_{43} 為 0)

(%i16) M[4]:M[4]-M[3] $M;

(%o16) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

＊ 由上式可得 x-y+2z+w=5、y+z-w=0、w=1、**0x+0y+0z+0w=5**，故知方程式無解。

※「augcoefmatrix([F1,F2,F3],[x,y,z])」指令為加入擴增矩陣 (此矩陣含常數項)，並

將[F1,F2,F3]為欲轉換的線性方程，[x,y,z]為轉換的變數；

※「transpose (矩陣)」指令表示將 $M_{n\times m}$ 轉置(行列互換)成 $M_{m\times n}$。

P.118

隨堂練習：解方程組 $\begin{cases} x-2y+3z+4w=9 \\ x-3y+w=5 \\ 2x-5y+5z-w=16 \\ 3x-4y+15z+18w=4 \end{cases}$

(%i1) F1:x-2*y+3*z+4*w=9;F2:x-3*y+w=5;F3:2*x-5*y+5*z-w=16;F4:3*x-4*y+15*z+18*w=1;

(%o1) 3z-2y+x+4w=9

(%o2) -3y+x+w=5

(%o3) 5z-5y+2x-w=16

(%o4) 15z-4y+3x+18w=1

[F1,F2,F3]為轉換的線性方程，[x,y,z]為轉換的參數；

augcoefmatrix 指令為加入擴增矩陣(此矩陣含常數項)；

M 定義為方程組轉換後的增廣矩陣

(%i5) M:augcoefmatrix([F1,F2,F3,F4],[x,y,z,w]);

(%o5) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 & -9 \\ 1 & -3 & 0 & 1 & -5 \\ 2 & -5 & 5 & -1 & -16 \\ 3 & -4 & 15 & 18 & -1 \end{bmatrix}$

擴增矩陣的常數項應為(9,5,16,1)，maxima 結果為(-9,-5, -16, -1)，其正負號相反

將矩陣 M 進行轉置，再將第 5 列乘上負號，再轉置回來

(%i6) M:transpose(M);

(%o6) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -5 & -4 \\ 3 & 0 & 5 & 15 \\ 4 & 1 & -1 & 18 \\ -9 & -5 & -16 & -1 \end{bmatrix}$

M[5]代表著矩陣 M 的第 5 列

(%i7) M[5]:M[5]*(-1);

(%o7) [9,5,16,1]

(%i8) M:transpose(M);

(%o8) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 & 9 \\ 1 & -3 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & -5 & 5 & -1 & 16 \\ 3 & -4 & 15 & 18 & 1 \end{bmatrix}$

(新第二列定義為原矩陣第二列減第一列-得 M_{21} 為 0)

<u>＊其中$表示不顯示$之前之計算結果，只顯示$之後之計算結果</u>

(%i9) M[2]:M[2]-M[1]$M;

(%o9) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 & 9 \\ 0 & -1 & -3 & -3 & -4 \\ 2 & -5 & 5 & -1 & 16 \\ 3 & -4 & 15 & 18 & 1 \end{bmatrix}$

(新第三列定義為原矩陣第三列減第一列乘 2-得 M_{31} 為 0)

(%i10) M[3]:M[3]-M[1]*2$M;

(%o10) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 & 9 \\ 0 & -1 & -3 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & -9 & -2 \\ 3 & -4 & 15 & 18 & 1 \end{bmatrix}$

(新第四列定義為原矩陣第四列減第一列乘 3-得 M_{41} 為 0)

(%i11) M[4]:M[4] -M[1]*3 $M;

(%o11) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 & 9 \\ 0 & -1 & -3 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & -9 & -2 \\ 0 & 2 & 6 & 6 & -26 \end{bmatrix}$

(新第三列定義為原矩陣第三列減第二列-得 M_{32} 為 0)

(%i12) M[3]:M[3]-M[2] $M;

(%o12) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 & 9 \\ 0 & -1 & -3 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 6 & -26 \end{bmatrix}$

(新第四列定義為原矩陣第四列加第二列乘 2-得 M_{42} 為 0)

(%i13) M[4]:M[4]+M[2]*2$M;

(%o13) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 & 9 \\ 0 & -1 & -3 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -34 \end{bmatrix}$

(新第一列定義為原矩陣第一列減第二列乘 2-得 M_{12} 為 0)

(%i14) M[1]:M[1]- M[2] *2$M;

(%o14) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 & 10 & 17 \\ 0 & -1 & -3 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -34 \end{bmatrix}$

(新第二列定義為原矩陣第二列加第三列乘(3/2)-得 M_{23} 為 0)

(%i15) M[2]:M[2]+M[3]*(3/2)$M;

(%o15) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 & 10 & 17 \\ 0 & -1 & 0 & -12 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -34 \end{bmatrix}$

(新第一列定義為原矩陣第一列減第三列乘(9/2)-得 M_{13} 為 0)

(%i16) M[1]:M[1]-M[3]*(9/2) $M;

(%o16) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 37 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & -12 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -34 \end{bmatrix}$

＊ 由上式可得 x+37w=8、-y -12w=-1、2z-6w=2、**0x+0y+0z+0w=-34**，故知方程式無解。

※「augcoefmatrix([F1,F2,F3],[x,y,z])」指令為加入擴增矩陣 (<u>此矩陣含常數項</u>)，並將[F1,F2,F3]為欲轉換的線性方程，[x,y,z]為轉換的變數；

※「transpose (矩陣)」指令表示將 $M_{n \times m}$ 轉置(行列互換)成 $M_{m \times n}$。

例題 5：座標空間中，一球面通過 P (3 , 1 , 1)、Q (-1 , 1 , 1) 、R (0 , 0 , 1) 、S (3 , 1 , -3) 四點，求這球面的球心與半徑。

假設球面方程式為 $x^2+y^2+z^2+dx+ey+fz+g=0$，球面通過 P、Q、R、S 四點，帶入上式

(%i1) x:3; y:1; z:1;

(%o1) 3

(%o2) 1

(%o3) 1

(%i4) x^2+y^2+z^2+d*x+e*y+f*z+g=0;

(%o4) g+f+e+3d+11=0

(%i5) x:-1; y:1; z:1;

(%o5) -1

(%o6) 1

(%o7) 1

(%i8) x^2+y^2+z^2+d*x+e*y+f*z+g=0;

(%o8) g+f+e-d+3=0

(%i9) x:0; y:0; z:1;

(%o9) 0

(%o10) 0

(%o11) 1

(%i12) x^2+y^2+z^2+d*x+e*y+f*z+g=0;

(%o12) g+f+1=0

(%i13) x:3; y:1; z:-3;

(%o13) 3

(%o14) 1

(%o15) -3

(%i16) x^2+y^2+z^2+d*x+e*y+f*z+g=0;

(%o16) g-3*f+e+3*d+19=0

(%i17) F1:g+f+e+3*d+11=0;F2:g+f+e-d+3=0;F3: g+f+1=0;F4:g-3*f+e+3*d+19=0;

(%o17) g+f+e+3d+11=0

(%o18) g+f+e-d+3=0

(%o19) g+f+1=0

(%o20) g-3f+e+3d+19=0

[F1,F2,F3,F4]為轉換的線性方程，[d,e,f,g]為轉換的參數；

augcoefmatrix 指令為加入擴增矩陣(此矩陣含常數項)；

M 定義為方程組轉換後的增廣矩陣

(%i21) M:augcoefmatrix([F1,F2,F3,F4],[d,e,f,g]);

(%o21) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 11 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 & 1 & 19 \end{bmatrix}$

擴增矩陣的常數項應為(-11,-3,-1,19)，maxima 結果為(11,3, 1, 19)，其正負號相反

將矩陣 M 進行轉置，再將第 5 列乘上負號，再轉置回來

(%i22) M:transpose(M);

(%o22) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 11 & 3 & 1 & 19 \end{bmatrix}$

M[5]代表著矩陣 M 的第 5 列

(%i23) M[5]:M[5]*(-1);

(%o23) [-11,-3,-1,-19]

(%i24) M:transpose(M);

(%o24) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & -11 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -3 & 1 & -19 \end{bmatrix}$

(新第一列定義為原矩陣第一列加第二列乘 3-得 M_{11} 為 0)

＊其中$表示不顯示$之前之計算結果，只顯示$之後之計算結果

(%i25) M[1]:M[1]-M[2]*3$M;

(%o25) $$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 & 4 & -20 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -3 & 1 & -19 \end{bmatrix}$$

(新第一列定義為原矩陣第一列除 4-得 M_{12} 為 1)

(%i26) M[1]:M[1]/4$M;

(%o26) $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & -5 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -3 & 1 & -19 \end{bmatrix}$$

(新第二列定義為原矩陣第二列乘(-1)加第一列-得 M_{21} 為 1)

(%i27) M[2]:M[2]*(-1)+M[1] $M;

(%o27) $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -3 & 1 & -19 \end{bmatrix}$$

(新第四列定義為原矩陣第四列減第二列乘 3-得 M_{31} 為 0)

(%i28) M[4]:M[4]-M[2]*3 $M;

(%o28) $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -13 \end{bmatrix}$$

(新第四列定義為原矩陣第四列減第一列-得 M_{42} 為 0)

(%i29) M[4]:M[4]-M[1] $M;

(%o29) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -9 \end{bmatrix}$

(新第四列定義為原矩陣第四列加第三列乘 3-得 M_{33} 為 0)

(%i30) M[4]:M[4]+M[3]*3$M;

(%o30) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -12 \end{bmatrix}$

(新第四列定義為原矩陣第四列除 4-得 M_{44} 為 1)

(%i31) M[4]:M[4]/4$M;

(%o31) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

(新第三列定義為原矩陣第三列減第四列-得 M_{34} 為 0)

(%i32) M[3]:M[3]-M[4] $M;

(%o32) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

＊ 由上式可得 d=-2、e=-4、f=2、g=-3。

(%i33) kill(all);

(%o33) done

(%i34) d:-2; e:-4; f:2; g:-3;

(%o34) -2

(%o35) -4

(%o36) 2

(%o37) -3

(%i38) x^2+y^2+z^2+d*x+e*y+f*z+g=0;

(%o38) $z^2+2z+y^2-4y+x^2-2x-3=0$

進行配方

(%i39) expand((x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2);

(%o39) $z^2+2z+y^2-4y+x^2-2x+6$

(%i40) (z^2+2*z+y^2-4*y+x^2-2*x-3)-(z^2+2*z+y^2-4*y+x^2-2*x+6);

(%o40) 9

原式可寫成$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$

＊球心為(1 , 2 , -1)，半徑為 3

※「augcoefmatrix([F1,F2,F3],[x,y,z])」指令為加入擴增矩陣 (<u>此矩陣含常數項</u>)，並將[F1,F2,F3]為欲轉換的線性方程，[x,y,z]為轉換的變數；

※「transpose (矩陣)」指令表示將 $M_{n\times m}$ 轉置(行列互換)成 $M_{m\times n}$。

※「expand ([算式] × [算式])」指令表示展開算式。

P.119

隨堂練習：設 A、B、C、D 是 1x4 階列矩陣：A=[1 , -1 , 2 , 1]、B=[-2 , 1 , -1 , 3]、C=[0 , 0 , 1 , -2]、D=[0 , 0 , 2 , 1]，把矩陣 E= [-3 , 2 , 2 , 2]表示成

aA+bB+cC+dD 的形式，其中 a、b、c、d 為實數

(%i1) F1:a*1+(-2)*b=-3; F2:a*(-1)+b*1=2; F3:a*2+b*(-1)+c*1+d*2=2;

F4:a*1+b*3+c*(-2)+d*1=2;

(%o1) a-2b=-3

(%o2) b-a=2

(%o3) 2d+c-b+2a=2

(%o4) d-2c+3b+a=2

[F1,F2,F3]為轉換的線性方程，[x,y,z]為轉換的參數；

augcoefmatrix 指令為加入擴增矩陣(此矩陣含常數項)；

M 定義為方程組轉換後的增廣矩陣

(%i5) M:augcoefmatrix([F1,F2,F3,F4],[a,b,c,d]);

(%o5) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

擴增矩陣的常數項應為(-3,2,2,2)，maxima 結果為(3,-2, -2, -2)，其正負號相反

將矩陣 M 進行轉置，再將第 5 列乘上負號，再轉置回來

(%i6) M:transpose(M);

(%o6) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$

M[5]代表著矩陣 M 的第 5 列

(%i7) M[5]:M[5]*(-1);

(%o7) [-3,2,2,2]

(%i8) M:transpose(M);

(%o8) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(新第二列定義為原矩陣第二列加第一列-得 M_{21} 為 0)

＊其中$表示不顯示$之前之計算結果，只顯示$之後之計算結果

(%i9) M[2]:M[2]+M[1]$M;

(%o9) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(新第三列定義為原矩陣第三列減第一列乘 2-得 M_{31} 為 0)

(%i10) M[3]:M[3]-M[1]*2$M;

(%o10) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(新第四列定義為原矩陣第四列減第一列-得 M_{41} 為 0)

(%i11) M[4]:M[4] -M[1] $M;

(%o11) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 5 & -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

(新第二列定義為原矩陣第二列乘(-1)-得 M_{22} 為 1)

(%i12) M[2]:M[2]*(-1) $M;

(%o12) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 5 & -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

(新第一列定義為原矩陣第一列加第二列乘 2-得 M_{12} 為 0)

(%i13) M[1]:M[1]+M[2]*2$M;

(%o13) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 5 & -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

(新第三列定義為原矩陣第三列減第二列乘 3-得 M_{32} 為 0)

(%i14) M[3]:M[3]- M[2]*3 $M;

(%o14) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

(新第四列定義為原矩陣第四列減第二列乘 5-得 M_{42} 為 0)

(%i15) M[4]:M[4]-M[2]*5$M;

(%o15) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(新第四列定義為原矩陣第四列加第三列乘 2-得 M_{43} 為 0)

(%i16) M[4]:M[4]+M[3]*2 $M;

(%o16) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 10 \end{bmatrix}$

(新第四列定義為原矩陣第四列除 5-得 M_{44} 為 1)

(%i17) M[4]:M[4]/5 $M;

(%o17) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(新第三列定義為原矩陣第三列減第四列乘 2-得 M_{34} 為 0)

(%i18) M[3]:M[3]-M[4]*2$M;

(%o18) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

＊ 由上式可得 a=-1、b=1、c=1、d=2，故知矩陣 E 可表示成-1A+B+C+2D。

※「augcoefmatrix([F1,F2,F3],[x,y,z])」指令為加入擴增矩陣 (此矩陣含常數項)，並將[F1,F2,F3]為欲轉換的線性方程，[x,y,z]為轉換的變數；

※「transpose (矩陣)」指令表示將 $M_{n\times m}$ 轉置(行列互換)成 $M_{m\times n}$。

P.120

例題 6：某公司購進一批單價分別為 160 元、100 元、80 元的沐浴乳、洗髮精與洗面乳當作勞動節禮品，但忘記記錄個別數量，只知道三種禮品的總數是 480，

且沐浴乳的數量是洗髮精的 2 倍，而總價錢為 60000 元，試算出這三種禮品的數量

本題可以寫成聯立方程組：設 x (沐浴乳)、y (洗髮精)、z (洗面乳)

{x+y+z=480、x-2y=0、160x+100y+80z=60000}

(%i1) F1:x+y+z=480; F2: x-2*y=0; F3: 160*x+100*y+80*z=60000;

(%o1) z+y+x=480

(%o2) x-2*y=0

(%o3) 80*z+100*y+160*x=60000

[F1,F2,F3]為轉換的線性方程，[x,y,z]為轉換的參數；

augcoefmatrix 指令為加入擴增矩陣(此矩陣含常數項)；

M 定義為方程組轉換後的增廣矩陣

(%i4) M:augcoefmatrix([F1,F2,F3],[x,y,z]);

(%o4) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -480 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 160 & 100 & 80 & -60000 \end{bmatrix}$

擴增矩陣的常數項應為(480,0,60000)，maxima 結果為(-480,0,-60000)，其正負號相反

將矩陣 M 進行轉置，再將第 4 列乘上負號，再轉置回來

(%i5) M:transpose(M);

(%o5) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 160 \\ 1 & -2 & 100 \\ 1 & 0 & 80 \\ -480 & 0 & -60000 \end{bmatrix}$

M[4]代表著矩陣 M 的第 4 列

(%i6) M[4]:M[4]*(-1);

(%o6) [480,0,60000]

(%i7) M:transpose(M);

(%o7) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 480 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 160 & 100 & 80 & 60000 \end{bmatrix}$

(%i8) gcd(gcd(gcd(160,100),80),60000);

(%o8) 20

(新第三列定義為原矩陣第三列除 20-化減)

<u>＊其中$表示不顯示$之前之計算結果，只顯示$之後之計算結果</u>

(%i9) M[3]:M[3]/20$M;

(%o9) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 480 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 8 & 5 & 4 & 3000 \end{bmatrix}$

(新第二列定義為原矩陣第二列減第一列-得 M_{21} 為 0)

(%i10) M[2]:M[2]-M[1]$M;

(%o10) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 480 \\ 0 & -3 & -1 & -480 \\ 8 & 5 & 4 & 3000 \end{bmatrix}$

(新第三列定義為原矩陣第三列減第一列乘 8-得 M_{31} 為 0)

(%i11) M[3]:M[3] -M[1]*8 $M;

(%o11) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 480 \\ 0 & -3 & -1 & -480 \\ 0 & -3 & -4 & -840 \end{bmatrix}$

(新第三列定義為原矩陣第三列減第二列-得 M_{32} 為 0)

(%i12) M[3]:M[3]- M[2] $M;

(%o12) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 480 \\ 0 & -3 & -1 & -480 \\ 0 & 0 & -3 & -360 \end{bmatrix}$

(新第三列定義為原矩陣第三列除(-3)-得 M_{33} 為 1)

(%i13) M[3]:M[3]/(-3)$M;

(%o13) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 480 \\ 0 & -3 & -1 & -480 \\ 0 & 0 & 1 & 120 \end{bmatrix}$

(新第一列定義為原矩陣第一列減第三列-得 M_{13} 為 0)

(%i14) M[1]:M[1]- M[3] $M;

(%o14) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 360 \\ 0 & -3 & -1 & -480 \\ 0 & 0 & 1 & 120 \end{bmatrix}$

(新第二列定義為原矩陣第二列加第三列-得 M_{23} 為 0)

(%i15) M[2]:M[2]+M[3] $M;

(%o15) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 360 \\ 0 & -3 & 0 & -360 \\ 0 & 0 & 1 & 120 \end{bmatrix}$

(新第二列定義為原矩陣第二列除(-3)-得 M_{22} 為 1)

(%i16) M[2]:M[2]/(-3) $M;

(%o16) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 360 \\ 0 & 1 & 0 & 120 \\ 0 & 0 & 1 & 120 \end{bmatrix}$

(新第一列定義為原矩陣第一列減第二列-得 M_{12} 為 0)

(%i17) M[1]:M[1]- M[2] $M;

(%o17) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 240 \\ 0 & 1 & 0 & 120 \\ 0 & 0 & 1 & 120 \end{bmatrix}$

＊ 由上式可得 x=240、y=120、z=120，故知沐浴乳有 240、洗髮精與洗面乳為皆 120。

※「augcoefmatrix([F1,F2,F3],[x,y,z])」指令為加入擴增矩陣 (此矩陣含常數項)，並將[F1,F2,F3]為欲轉換的線性方程，[x,y,z]為轉換的變數；

※「transpose (矩陣)」指令表示將 $M_{n\times m}$ 轉置(行列互換)成 $M_{m\times n}$。

※「gcd(數值,數值)」指令表示求最大公因數。

隨堂練習：設某水果商批進 18 箱水果，總價是 12900 元，這些水果分三類，每箱價格分別為 500 元、800 元與 1200 元，又已知 500 元的水果箱數是另外兩種的總和，求這三類水果的批進箱數

本題可以寫成聯立方程組：設 x (每箱 500 元)、y (每箱 800 元)、z (每箱 1200 元)

{x+y+z=18、500x+800y+1200z=12900、x-y-z=0}

(%i1) F1: x+y+z=18; F2: 500*x+800*y+1200*z=12900; F3: x-y-z=0;

(%o1) z+y+x=18

(%o2) 1200z+800y+500x=12900

(%o3) -z-y+x=0

[F1,F2,F3]為轉換的線性方程，[x,y,z]為轉換的參數；

augcoefmatrix 指令為加入擴增矩陣(此矩陣含常數項)；

M 定義為方程組轉換後的增廣矩陣

(%i4) M:augcoefmatrix([F1,F2,F3],[x,y,z]);

(%o4) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -18 \\ 500 & 800 & 1200 & -12900 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

擴增矩陣的常數項應為(18,12900, 0)，maxima 結果為(-18,12900, 0)，其正負號相反

將矩陣 M 進行轉置，再將第 4 列乘上負號，再轉置回來

(%i5) M:transpose(M);

(%o5) $\begin{bmatrix} 1 & 500 & 1 \\ 1 & 800 & -1 \\ 1 & 1200 & -1 \\ -18 & -12900 & 0 \end{bmatrix}$

M[4]代表著矩陣 M 的第 4 列

(%i6) M[4]:M[4]*(-1);

(%o6) [18,12900,0]

(%i7) M:transpose(M);

(%o7) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 18 \\ 500 & 800 & 1200 & 12900 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

(%i8) gcd(gcd(gcd(500,800),1200),12900);

(%o8) 100

(新第二列定義為原矩陣第三列除 100-化減)

<u>＊其中$表示不顯示$之前之計算結果，只顯示$之後之計算結果</u>

(%i9) M[2]:M[2]/100$M;

(%o9) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 18 \\ 5 & 8 & 12 & 129 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

(新第一列定義為原矩陣第一列加第三列之後再除 2-得 M_{11} 為 0， M_{12}、M_{13} 與為 0)

(%i10) M[1]:(M[1]+M[3])/2$M;

(%o10) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 \\ 5 & 8 & 12 & 129 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

(新第二列定義為原矩陣第二列減第一列乘 5-得 M_{21} 為 0)

(%i11) M[2]:M[2] -M[1]*5 $M;

(%o11) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 8 & 12 & 84 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

(新第三列定義為原矩陣第三列減第一列-得 M_{31} 為 0)

(%i12) M[3]:M[3]- M[1] $M;

(%o12) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 8 & 12 & 84 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

(新第二列定義為原矩陣第二列加第三列乘 7-得 M_{22} 為 1)

(%i13) M[2]:M[2]+M[3]*7$M;

(%o13) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 5 & 21 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

(新第三列定義為原矩陣第三列加第二列-得 M_{32} 為 0)

(%i14) M[3]:M[3]+M[2] $M;

(%o14) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 5 & 21 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \end{bmatrix}$

(新第三列定義為原矩陣第三列除 4-得 M_{33} 為 1)

(%i15) M[3]:M[3]/4$M;

(%o15) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 5 & 21 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

(新第二列定義為原矩陣第二列減第三列乘 5-得 M_{23} 為 0)

(%i16) M[2]:M[2-M[3]*5$M;

(%o16) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

＊ 由上式可得 x=9、y=6、z=3，故知 500 元有 9 箱、800 元有 6 箱、1200 元有 3 箱。

※「augcoefmatrix([F1,F2,F3],[x,y,z])」指令為加入擴增矩陣 (此矩陣含常數項)，並將[F1,F2,F3]為欲轉換的線性方程，[x,y,z]為轉換的變數；

※「transpose (矩陣)」指令表示將 $M_{n\times m}$ 轉置(行列互換)成 $M_{m\times n}$。

※「gcd(數值,數值)」指令表示求最大公因數。

P.121 **習題 2-3**

1.把下列方程組改寫為矩陣方程式，並求解$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x-3y+4z=15 \\ 3x-7y+6z=5 \end{cases}$

(%i1) F1: x+y-z=1; F2: 2*x-3*y+4*z=15; F3: 3*x-7*y+6*z=5;

(%o1) -z+y+x=1

(%o2) 4z-3y+2x=15

(%o3) 6z-7y+3x=5

[F1,F2,F3]為轉換的線性方程，[x,y,z]為轉換的參數；

augcoefmatrix 指令為加入擴增矩陣(此矩陣含常數項)；

M 定義為方程組轉換後的增廣矩陣

(%i4) M:augcoefmatrix([F1,F2,F3],[x,y,z]);

(%o4) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 & -15 \\ 3 & -7 & 6 & -5 \end{bmatrix}$

擴增矩陣的常數項應為(1,15, 5)，maxima 結果為(-1,-15, -5)，其正負號相反

將矩陣 M 進行轉置，再將第 4 列乘上負號，再轉置回來

(%i5) M:transpose(M);

(%o5) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -7 \\ -1 & 4 & 6 \\ -1 & -15 & -5 \end{bmatrix}$

M[4]代表著矩陣 M 的第 4 列

(%i6) M[4]:M[4]*(-1);

(%o6) [1,15,5]

(%i7) M:transpose(M);

(%o7) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & 15 \\ 3 & -7 & 6 & 5 \end{bmatrix}$

(新第二列定義為原矩陣第二列減第一列乘 2-得 M_{21} 為 0)

<u>＊其中$表示不顯示$之前之計算結果，只顯示$之後之計算結果</u>

(%i8) M[2]:M[2]- M[1]*2$M;

(%o8) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 6 & 13 \\ 3 & -7 & 6 & 5 \end{bmatrix}$

(新第三列定義為原矩陣第三列減第二列乘 2-得 M_{32} 為 0)

(%i9) M[3]:M[3]-M[2]*2$M;

(%o9) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 6 & 13 \\ 0 & 0 & -3 & -24 \end{bmatrix}$

(新第二列定義為原矩陣第二列加第三列乘 2-得 M_{23} 為 0)

(%i10) M[2]:M[2] +M[3]*2 $M;

(%o10) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & -35 \\ 0 & 0 & -3 & -24 \end{bmatrix}$

(新第二列定義為原矩陣第二列除(-5)-得 M_{22} 為 1)

(%i11) M[2]:M[2]/(-5)$M;

(%o11) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -3 & -24 \end{bmatrix}$

(新第三列定義為原矩陣第三列除(-3)-得 M_{33} 為 1)

(%i12) M[3]:M[3]/(-3)$M;

(%o12) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

(新第一列定義為原矩陣第一列減第二列加第三列-得 M_{12} 與 M_{13} 為 0)

(%i13) M[1]:M[1]-M[2]+ M[3] $M;

(%o13) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

＊ 由上式可得 x=2、y=7、z=8。

※「augcoefmatrix([F1,F2,F3],[x,y,z])」指令為加入擴增矩陣 (<u>此矩陣含常數項</u>)，並將[F1,F2,F3]為欲轉換的線性方程，[x,y,z]為轉換的變數；

※「transpose (矩陣)」指令表示將 $M_{n\times m}$ 轉置(行列互換)成 $M_{m\times n}$。

2. 解方程組 $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 3x+2y+z=0 \\ 5x+3y+z=0 \end{cases}$

(%i1) F1: x+y+z=0; F2: 3*x+2*y+z=0; F3: 5*x+3*y+z=0;

(%o1) z+y+x=0

(%o2) z+2y+3x=0

(%o3) z+3y+5x=0

[F1,F2,F3]為轉換的線性方程，[x,y,z]為轉換的參數；

augcoefmatrix 指令為加入擴增矩陣(此矩陣含常數項)；

M 定義為方程組轉換後的增廣矩陣

(%i4) M:augcoefmatrix([F1,F2,F3],[x,y,z]);

(%o4) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

擴增矩陣的常數項應與 maxima 結果相差負號，須將矩陣 M 進行轉置，再將常數列乘上負號，再轉置回來(本題常數項皆為 0，故忽略此段計算步驟)。

(新第二列定義為原矩陣第二列減第一列乘 3-得 M_{21} 為 0)

<u>＊其中$表示不顯示$之前之計算結果，只顯示$之後之計算結果</u>

(%i8) M[2]:M[2]- M[1]*3$M;

(%o8) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(新第三列定義為原矩陣第三列減第一列乘 5-得 M_{31} 為 0)

(%i9) M[3]:M[3]-M[1]*5$M;

(%o9) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$

(新第三列定義為原矩陣第三列減第二列乘 2-得 M_{32} 為 0)

(%i10) M[3]:M[3]-M[2]*2 $M;

(%o10) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(新第一列定義為原矩陣第一列加第二列-得 M_{12} 為 0)

(%i11) M[1]:M[1]+ M[2]$M;

(%o11) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(新第二列定義為原矩陣第二列乘(-1)-得 M_{22} 為 1)

(%i12) M[2]:M[2]*(-1)$M;

(%o12) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

＊ 由上式可得 x-z=0、y+2z=0，令 z=t，可知 x=t、y=-2t；(t 為任意實數解)

※「augcoefmatrix([F1,F2,F3],[x,y,z])」指令為加入擴增矩陣 (<u>此矩陣含常數項</u>)，並將[F1,F2,F3]為欲轉換的線性方程，[x,y,z]為轉換的變數；

※「transpose (矩陣)」指令表示將 $M_{n\times m}$ 轉置(行列互換)成 $M_{m\times n}$。

3. 給定 4 個列矩陣： A=[1 , 3 , 1] 、B=[2 , 6 , 3]、C=[2 , 5 , -3]、D=[4 , 12 , 2]，求實數 x、y、z，使得 D=xA+yB+zC

(%i1) F1:x*1+y*2+z*2=4; F2:x*3+y*6+z*5=12; F3:x*1+y*3+z*(-3)=2;

(%o1) 2z+2y+x=4

(%o2) 5z+6y+3x=12

(%o3) -3z+3y+x=2

[F1,F2,F3]為轉換的線性方程，[x,y,z]為轉換的參數；

augcoefmatrix 指令為加入擴增矩陣(此矩陣含常數項)；

M 定義為方程組轉換後的增廣矩陣

(%i4) M:augcoefmatrix([F1,F2,F3],[x,y,z]);

(%o4) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -4 \\ 3 & 6 & 5 & -12 \\ 1 & 3 & -3 & -2 \end{bmatrix}$

擴增矩陣的常數項應為(4,12,2)，maxima 結果為(-4,-12, -2)，其正負號相反

將矩陣 M 進行轉置，再將第 4 列乘上負號，再轉置回來

(%i5) M:transpose(M);

(%o5) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \\ 2 & 5 & -3 \\ -4 & -12 & -2 \end{bmatrix}$

M[4]代表著矩陣 M 的第 4 列

(%i6) M[4]:M[4]*(-1);

(%o6) [4,12,2]

(%i7) M:transpose(M);

(%o7) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 5 & 12 \\ 1 & 3 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

(新第二列定義為原矩陣第二列減第一列乘 3-得 M_{21} 為 0)

＊其中$表示不顯示$之前之計算結果，只顯示$之後之計算結果

(%i8) M[2]:M[2]-M[1]*3$M;

(%o8) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

(新第三列定義為原矩陣第三列減第一列-得 M_{31} 為 0)

(%i9) M[3]:M[3]-M[1] $M;

(%o9) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -2 \end{bmatrix}$

(新第一列定義為原矩陣第一列減第三列乘 2-得 M_{12} 為 0)

(%i10) M[1]:M[1] -M[3]*2 $M;

(%o10) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 12 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -2 \end{bmatrix}$

(新第三列定義為原矩陣第三列減第二列乘 5-得 M_{33} 為 0)

(%i11) M[3]:M[3]- M[2]*5 $M;

(%o11) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 12 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

(新第一列定義為原矩陣第一列加第二列乘 12-得 M_{13} 為 0)

(%i12) M[1]:M[1]+M[2]*12$M;

(%o12) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

＊ 由上式可得 x=8、y=-2、z=0，故知矩陣 D 可表示成 8A-2B+0C。

※「augcoefmatrix([F1,F2,F3],[x,y,z])」指令為加入擴增矩陣 (此矩陣含常數項)，並將[F1,F2,F3]為欲轉換的線性方程，[x,y,z]為轉換的變數；

※「transpose (矩陣)」指令表示將 $M_{n\times m}$ 轉置(行列互換)成 $M_{m\times n}$。

4. 座標空間中，一球面通過 P (3 , -1 , -3)、Q (0 , 0 , 1) 、R (0 , -4 , 1)，三點且半徑為 3，求這球面的球心座標。

5. 有一個三元一次方程組依序經由下面的列運算：

(1) 把第一列元素的 (-4) 倍加到第二列的元素。

(2) 把第一列元素的 (-5) 倍加到第三列的元素。

得到下列方程組，求原來方程組的解

$$\begin{cases} x+2y+3z=11 \\ 2y+3z=2 \\ 4y+z=-6 \end{cases}$$

＊矩陣之列運算並不會改變方程式的解

(%i1) F1: x+2*y+3*z=11; F2: 2*y+3*z=2; F3:4*y+z=-6;

(%o1) x+2y+3z=11

(%o2) 2y+3z=2

(%o3) 4y+z=-6

[F1,F2,F3]為轉換的線性方程，[x,y,z]為轉換的參數；

augcoefmatrix 指令為加入擴增矩陣(此矩陣含常數項)；

M 定義為方程組轉換後的增廣矩陣

(%i4) M:augcoefmatrix([F1,F2,F3],[x,y,z]);

(%o4) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -11 \\ 0 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

擴增矩陣的常數項應為(11,2, 6)，maxima 結果為(-11,-2, 6)，其正負號相反

將矩陣 M 進行轉置，再將第 4 列乘上負號，再轉置回來

(%i5) M:transpose(M);

(%o5) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \\ -11 & -2 & 6 \end{bmatrix}$

M[4]代表著矩陣 M 的第 4 列

(%i6) M[4]:M[4]*(-1);

(%o6) [11,2,-6]

(%i7) M:transpose(M);

(%o7) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 11 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & -6 \end{bmatrix}$

(新第一列定義為原矩陣第一列減第二列-得 M_{12} 與 M_{13} 為 0)

＊其中$表示不顯示$之前之計算結果，只顯示$之後之計算結果

(%i8) M[1]:M[1]- M[2] $M;

(%o8) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & -6 \end{bmatrix}$

(新第三列定義為原矩陣第三列減第二列乘 2-得 M_{32} 為 0)

(%i9) M[3]:M[3]-M[2]*2$M;

(%o9) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{bmatrix}$

(新第三列定義為原矩陣第三列乘(-1/5)得 M_{32} 為 0)

(%i10) M[3]:M[3]*(-1/5) $M;

(%o10) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(新第一列定義為原矩陣第二列減第三列乘 3，之後除 2-得 M_{13} 為 0，M_{12} 為 1)

(%i11) M[2]:(M[2]-M[3]*3)/2$M;

(%o11) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

＊ 由上式可得知 x=9、y=-2、z=2

※「augcoefmatrix([F1,F2,F3],[x,y,z])」指令為加入擴增矩陣 (<u>此矩陣含常數項</u>)，並將[F1,F2,F3]為欲轉換的線性方程，[x,y,z]為轉換的變數；

※「transpose (矩陣)」指令表示將 $M_{n\times m}$ 轉置(行列互換)成 $M_{m\times n}$。

6. 一游泳池有 A、B、C 三個入水口，當水全部放乾時，使用 A、B 入水口，8 小時可把水注滿；而使用 B、C 入水口，12 小時才能注滿；又使用 A、C 入口，9 小時可注滿。當水量已經注滿一半時，同時使用 A、B、C 三個入水口，尚需多少小時才能將這游泳池注滿？

本題可以寫成聯立方程組：設 x (A 入水口)、y (B 入水口)、z (C 入水口)

{8x+8y =1、12y+12z=1、9x+9z=1}

(%i1) F1: 8*x+8*y =1; F2: 12*y+12*z=1; F3: 9*x+9*z=1;

(%o1) 8x+8y =1

(%o2) 12y+12z=1

(%o3) 9x+9z=1

[F1,F2,F3]為轉換的線性方程，[x,y,z]為轉換的參數；

augcoefmatrix 指令為加入擴增矩陣(此矩陣含常數項)；

M 定義為方程組轉換後的增廣矩陣

(%i4) M:augcoefmatrix([F1,F2,F3],[x,y,z]);

(%o4) $\begin{bmatrix} 8 & 8 & 0 & -1 \\ 0 & 12 & 12 & -1 \\ 9 & 0 & 9 & -1 \end{bmatrix}$

擴增矩陣的常數項應為(1,1,1)，maxima 結果為(-1,-1,-1)，其正負號相反

將矩陣 M 進行轉置，再將第 4 列乘上負號，再轉置回來

(%i5) M:transpose(M);

(%o5) $\begin{bmatrix} 8 & 0 & 9 \\ 8 & 12 & 0 \\ 0 & 12 & 9 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

M[4]代表著矩陣 M 的第 4 列

(%i6) M[4]:M[4]*(-1);

(%o6) [1,1,1]

(%i7) M:transpose(M);

(%o7) $\begin{bmatrix} 8 & 8 & 0 & 1 \\ 0 & 12 & 12 & 1 \\ 9 & 0 & 9 & 1 \end{bmatrix}$

(新第一列定義為原矩陣第一列除 8-化簡)

<u>＊其中$表示不顯示$之前之計算結果，只顯示$之後之計算結果</u>

(%i8) M[1]:M[1]/8$M;

(%o8) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & 12 & 12 & 1 \\ 9 & 0 & 9 & 1 \end{bmatrix}$

(新第二列定義為原矩陣第二列除 12-化簡)

(%i9) M[2]:M[2]/12$M;

$$(\%o9)\quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{12} \\ 9 & 0 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

(新第三列定義為原矩陣第三列除 9-化簡)

(%i10) M[3]:M[3]/9 $M;

$$(\%o10)\quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{12} \\ 1 & 0 & 1 & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

(新第三列定義為原矩陣第三列減第一列-得 M_{31} 為 0)

(%i11) M[3]:M[3]- M[1] $M;

$$(\%o11)\quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{12} \\ 0 & -1 & 1 & -\frac{1}{72} \end{bmatrix}$$

(新第一列定義為原矩陣第一列加第三列-得 M_{12} 為 0)

(%i12) M[1]:M[1]+M[3]$M;

(%o12) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{9} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{12} \\ 0 & -1 & 1 & -\frac{1}{72} \end{bmatrix}$

(新第二列定義為原矩陣第二列減第三列，在除 2-得 M_{23} 為 0、M_{22} 為 1)

(%i13) M[2]:(M[2]-M[3])/2 $M;

(%o13) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{144} \\ 0 & -1 & 1 & -\frac{1}{72} \end{bmatrix}$

(新第三列定義為原矩陣第三列加第二列-得 M_{32} 為 0)

(%i14) M[3]:M[3]+M[2] $M;

(%o14) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{144} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{144} \end{bmatrix}$

(新第一列定義為原矩陣第一列減第三列-得 M_{13} 為 0)

(%i15) M[1]:M[1]-M[3] $M;

(%o15) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{11}{144} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{144} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{144} \end{bmatrix}$

＊ 由上式可得 $x=\frac{11}{144}$、$y=\frac{7}{144}$、$z=\frac{5}{144}$，故知 A 入水口每小時可注入游泳池的 $\frac{11}{144}$、 B 入水口每小時可注入游泳池的$\frac{7}{144}$、C 入水口每小時可注入游泳池的$\frac{5}{144}$，故假設 h 小時後水可注滿。

當水量已經注滿一半時，同時使用 A、B、C 三個入水口，假設 h 小時後水可注滿

(%i16) solve([(11/144+7/144+5/144)*h=1/2],[h]);

(%o16) [h=$\frac{72}{23}$]

※「augcoefmatrix([F1,F2,F3],[x,y,z])」指令為加入擴增矩陣 (此矩陣含常數項)，並將[F1,F2,F3]為欲轉換的線性方程，[x,y,z]為轉換的變數；

※「transpose (矩陣)」指令表示將 $M_{n\times m}$ 轉置(行列互換)成 $M_{m\times n}$。

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

7. 在電路網中並聯的兩個電阻器，其電阻的計算公式為$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$，其中 R_1、R_2 是原來電阻器的電阻，而 R 是並聯後的電阻。給定 A、B、C 三個電阻器，

8. 某一城市的 4 個主要十字路口 A、B、C、D 的車行方向與交通流量如下所示：車子到每一個十字路口可直行、或依指示方向左轉或右轉，但不得停留，如通過十字路口 A 的車流量滿足：300+500(流入量)=x_1+x_2(流出量)；求 x_1、x_2、x_3、x_4

2-4 行列式

P.124

例題 1：求下列行列式的值。

$$X=\begin{bmatrix}1&6&3\\2&5&4\\2&1&6\end{bmatrix},Y=\begin{bmatrix}2&-1&-5\\-3&4&-7\\2&-4&3\end{bmatrix}$$

(%i1) X=determinant (matrix([1,6,3],[2,5,4],[2,1,6]));

(%o1) X=-22

(%i2) Y=determinant (matrix([2,-1,-5],[-3,4,-7],[2,-4,3]));

(%o2) Y=-47

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

※「determinant(矩陣)」指令表示計算矩陣結果。

隨堂練習：設 $A=\left[a_{ij}\right]_{3\times3}$，其中 $a_{ij}=i+j$，求 detA 的值

P.125

例題 2：求下列各行列式的值：

$$X=\begin{bmatrix}5&7&1\\2&0&3\\-4&6&8\end{bmatrix},Y=\begin{bmatrix}2&5&3\\7&-8&0\\-4&6&2\end{bmatrix}$$

(%i1) X=determinant (matrix([5,7,1],[2,0,3],[-4,6,8]));

(%o1) X=-274

(%i2) Y=determinant (matrix([2,5,3],[7,-8,0],[-4,6,2]));

(%o2) Y=-72

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

※「determinant(矩陣)」指令表示計算矩陣結果。

P.126

隨堂練習：求行列式$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$的值

(%i1) determinant (matrix([4,0,2],[5,4,3],[-2,3,2]));

(%o1) 42

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

※「determinant(矩陣)」指令表示計算矩陣結果。

P.127

例題 3：給定座標空間四點：P(1 , -1 , 0)、Q(-3 , 1 , 4)、R(4 , 7 , 1)、S(3 , -4 , 5)，以連線段 PQ、RS、PS 為三邊做一平行六面體，求這平行六面體的體積。

(%i1) P:[1,-1,0];

(%o1) [1,-1,0]

(%i2) Q:[-3,1,4];

(%o2) [-3,1,4]

(%i3) R:[4,7,1];

(%o3) [4,7,1]

(%i4) S:[3,-4,5];

(%o4) [3,-4,5]

(%i5) determinant(matrix(Q-P,R-P,S-P));

(%o5) -298

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

※「determinant(矩陣)」指令表示計算矩陣結果。

P.128

隨堂練習：給定座標空間三點：A(4 , 3 , -5)、B(2 , 7 , -3)、C(5 , 7 , 4)，O 為原點，求四面體 OABC 的體積。

(%i1) A:[4,3,-5];

(%o1) [4,3,-5]

(%i2) B:[2,7,-3];

(%o2) [2,7,-3]

(%i3) C:[5,7,4];

(%o3) [5,7,4]

(%i4) O:[0,0,0];

(%o4) [0,0,0]

(%i5) determinant(matrix(A-O,B-O,C-O))*1/6;

(%o5) $\frac{116}{3}$

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

※「determinant(矩陣)」指令表示計算矩陣結果。

P.130

例題 4：求行列式$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 16 \\ 7 & 8 & 19 \\ 10 & 11 & 22 \end{bmatrix}$的值

(%i1) determinant(matrix([4,5,16],[7,8,19],[10,11,22]));

(%o1) 0

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

※「determinant(矩陣)」指令表示計算矩陣結果。

P.131

隨堂練習：求行列式$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 16 \\ 7 & 8 & 19 \\ 10 & 11 & 22 \end{bmatrix}$的值

(%i1) determinant(matrix([4,5,16],[7,8,19],[10,11,22]));

(%o1) 0

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

※「determinant(矩陣)」指令表示計算矩陣結果。

例題 5：證明$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$，其中 a、b、c 是兩兩相異實數

(%i1) determinant(matrix([1,1,1],[a,b,c],[a^2,b^2,c^2]));

(%o1) $bc^2-ac^2-b^2c+a^2c+ab^2-a^2b$

(%i2) expand((a-b)*(b-c)*(c-a));

(%o2) $bc^2-ac^2-b^2c+a^2c+ab^2-a^2b$

(%i3) if determinant(matrix([1,1,1],[a,b,c],[a^2,b^2,c^2]))=expand((a-b)*(b-c)*(c-a)) then answer=yes else answer=no;

(%o3) answer=yes

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

※「determinant(矩陣)」指令表示計算矩陣結果。

※「expand ([算式] × [算式])」指令表示展開算式。

P.132

隨堂練習： 求行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 8 & 11 \\ 16 & 64 & 121 \end{vmatrix}$ 的值

(%i1) determinant(matrix([1,1,1],[4,8,11],[16,64,121]));

(%o1) 84

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

※「determinant(矩陣)」指令表示計算矩陣結果。

例題 6： 求下列矩陣 A、B 的行列式值，並驗證 det(AB)= detA detB

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad , B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 9 \\ 3 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

(%i1) A:matrix([2,1,1],[1,-2,-2],[3,1,4]);

(%o1) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

(%i2) B:matrix([1,-2,4],[2,-3,9],[3,1,-6]);

(%o2) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 9 \\ 3 & 1 & -6 \end{bmatrix}$

(%i3) if determinant(A.B)= determinant(A).determinant(B) then answer=yes else

answer=no;

(%o3) answer=yes

驗證：分別計算出 determinant(A.B)與 determinant(A).determinant(B)之值

(%i4) determinant(A.B);

(%o4) 375

(%i5) determinant(A).determinant(B);

(%o5) 375

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

※「determinant(矩陣)」指令表示計算矩陣結果。

P.133

隨堂練習：計算行列式$\begin{vmatrix} ap+bq & ar+bs \\ cp+dq & cr+ds \end{vmatrix}$的值

(%i1) determinant(matrix([a*p+b*q,a*r+b*s],[c*p+d*q,c*r+d*s]));

(%o1) (bq+ap)(ds+cr)-(dq+cp)(bs+ar)

(%i2) expand((b*q+a*p)*(d*s+c*r)-(d*q+c*p)*(b*s+a*r));

(%o2) adps-bcps-adqr+bcqr

(%i3) factor(a*d*p*s-b*c*p*s-a*d*q*r+b*c*q*r);

(%o3) (ad-bc)(ps-qr)

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

※「determinant(矩陣)」指令表示計算矩陣結果。

※「expand ([算式] × [算式])」指令表示展開算式。

例題 7：設$\bar{u}$、$\bar{v}$、$\bar{w}$是空間向量且$\bar{u}\cdot(\bar{v}\times\bar{w})=-12$，求三向量$\bar{u}+\bar{v}$、$\bar{v}+\bar{w}$、$\bar{w}+\bar{u}$所張開平行六面體的體積。

將空間向量視為 3x3 階矩陣的一列元素

$$\begin{bmatrix} \bar{u}+\bar{v} \\ \bar{v}+\bar{w} \\ \bar{w}+\bar{u} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{bmatrix}$$

(%i1) determinant(matrix([1,1,0],[0,1,1],[1,0,1]));

(%o1) 2

$$\det\begin{bmatrix}\vec{u}+\vec{v}\\ \vec{v}+\vec{w}\\ \vec{w}+\vec{u}\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}\ \det\begin{bmatrix}\vec{u}\\ \vec{v}\\ \vec{w}\end{bmatrix}$$

(%i2) 2*(-12);

(%o2) -24

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

※「determinant(矩陣)」指令表示計算矩陣結果。

P.134

隨堂練習：設$\vec{u}$、$\vec{v}$、$\vec{w}$是空間向量且$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=6$，求三向量$2\vec{v}+\vec{w}$、$3\vec{u}-\vec{v}+2\vec{w}$、$4\vec{u}+\vec{w}$所張開平行六面體的體積。

P.134 **習題 2-4**

1. 求下列各行列式的值：

(1)

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

(%i1) determinant(matrix([0,4,-3],[2,1,4],[5,1,3]));

(%o1) 65

(2)

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 4 \\ 7 & 9 & 8 \end{vmatrix}$$

(%i2) determinant(matrix([5,2,3],[6,1,4],[7,9,8]));

(%o2) -39

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

※「determinant(矩陣)」指令表示計算矩陣結果。

2. 解方程式 $\begin{vmatrix} 15 & x-4 \\ x+7 & -2 \end{vmatrix} = 0$

(%i1) determinant(matrix([15,(x-4)],[(x+7),-2]));

(%o1) -(x-4)(x+7)-30

(%i2) solve([-(x-4)*(x+7)-30=0],[x]);

(%o2) [x=-2,x=-1]

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

※「determinant(矩陣)」指令表示計算矩陣結果。

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

3. 設 $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$,$B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$,試求:

(1) det(3A-B)

(%i1) A:matrix([2,2,4],[-3,0,-1],[2,1,2]);

(%o1) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(%i2) B:matrix([2,1,1],[1,-4,3],[-1,3,2]);

(%o2) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

(%i3) determinant(3*A-B);

(%o3) -245

(2) det(AB)

(%i4) determinant(A.B);

(%o4) 80

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

※「determinant(矩陣)」指令表示計算矩陣結果。

4.座標空間中,四面體 ABCD 的四頂點座標為 A(1 , 3 , 7)、B(3 , 3 , 9)、C(4 , 7 , 0)、D(2 , 8 , 13),求這四面體的體積。

(%i1) A:[1,3,7];

(%o1) [1,3,7]

(%i2) B:[3,3,9];

(%o2) [3,3,9]

(%i3) C:[4,7,0];

(%o3) [4,7,0]

(%i4) D:[2,8,13];

(%o4) [2,8,13]

(%i5) determinant(matrix(B-A,C-A,D-A))*1/6;

(%o5) $\frac{70}{3}$

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

※「determinant(矩陣)」指令表示計算矩陣結果。

5. $A=\left[a_{ij}\right]_{3\times 3}$ 且 detA=6，求下列各行列式的值

(1) $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 4a_{21} & 4a_{22} & 4a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11}+2a_{21} & a_{12}+2a_{22} & a_{13}+2a_{23} \\ a_{11}+2a_{31} & a_{12}+2a_{32} & a_{13}+2a_{33} \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} a_{11}+5a_{13} & 2a_{12} & 6a_{13} \\ a_{21}+5a_{23} & 2a_{22} & 6a_{23} \\ a_{31}+5a_{33} & 2a_{32} & 6a_{33} \end{vmatrix}$

6. 求行列式 $\begin{vmatrix} 39 & 26 & 78 \\ 89 & 126 & 228 \\ 8 & 4 & 12 \end{vmatrix}$ 的值

(%i1) determinant(matrix([39,26,78],[89,126,228],[8,4,12]));

(%o1) -7800

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

※「determinant(矩陣)」指令表示計算矩陣結果。

7. 設 a 是實數且空間中相異四點 A(2a+1 , -1 , 3)、B(1 , -1 , 3)、C(2 , 1 , -4)、D(12 , 0 , a-5)共面，求 a 的值。(提示：A、B、C、D 四點共面時，三向量 $\overline{AB}$ 、$\overline{AC}$ 、$\overline{AD}$ 不能張成平行六面體，所以 $\overline{AB}\cdot(\overline{AC}\times\overline{AD})=0$ 。)

8. 解下列方程式

(1)

$$\begin{vmatrix} x-2 & -3 & -4 \\ -4 & x-3 & -2 \\ -3 & -2 & x-4 \end{vmatrix}=0$$

(%i1) expand(determinant(matrix([(x-2),-3,-4],[-4,(x-3),-2],[-3,-2,(x-4)])));

(%o1) x^3-9x^2-2x+18

(%i2) solve([x^3-9*x^2-2*x+18=0],[x]);

(%o2) [x=$-\sqrt{2}$,x=$\sqrt{2}$,x=9]

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

※「determinant(矩陣)」指令表示計算矩陣結果。

※「expand ([算式] × [算式])」指令表示展開算式。

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

(2)

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ -2 & -1 & x+2 \end{vmatrix} = 0$$

(%i3) expand(determinant(matrix([x,-1,0],[0,x,-1],[-2,-1,(x+2)])));

(%o3) x^3+2x^2-x-2

(%i4) solve([x^3+2*x^2-x-2],[x]);

(%o4) [x=-2,x=-1,x=1]

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

※「determinant(矩陣)」指令表示計算矩陣結果。

※「expand ([算式] × [算式])」指令表示展開算式。

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

9. 座標空間中，一平面 E 的方程式為 $\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 0$，求點 P(2 , 1 , 5)到平面 E 的垂足座標

2-5 克拉瑪公式

P.137

例題 1：解二元一次方程組 $\begin{cases} 12x+15y=9 \\ 19x+21y=17 \end{cases}$

(%i1) A:matrix([12,15],[19,21]);

(%o1) $\begin{bmatrix} 12 & 15 \\ 19 & 21 \end{bmatrix}$

(%i2) X:matrix([9,15],[17,21]);

(%o2) $\begin{bmatrix} 9 & 15 \\ 17 & 21 \end{bmatrix}$

(%i3) Y:matrix([12,9],[19,17]);

(%o3) $\begin{bmatrix} 12 & 9 \\ 19 & 17 \end{bmatrix}$

(%i4) x=determinant(X)/determinant(A);

(%o4) x=2

(%i5) y=determinant(Y)/determinant(A);

(%o5) y=-1

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

※「determinant(矩陣)」指令表示計算矩陣結果。

隨堂練習：解方程組 $\begin{cases} 17x-23y=11 \\ 24x-27y=21 \end{cases}$

(%i1) A:matrix([17,-23],[24,-27]);

(%o1) $\begin{bmatrix} 17 & -23 \\ 24 & -27 \end{bmatrix}$

(%i2) X:matrix([11,-23],[21,-27]);

(%o2) $\begin{bmatrix} 11 & -23 \\ 21 & -27 \end{bmatrix}$

(%i3) Y:matrix([17,11],[24,21]);

(%o3) $\begin{bmatrix} 17 & 11 \\ 24 & 21 \end{bmatrix}$

(%i4) x=determinant(X)/determinant(A);

(%o4) x=2

(%i5) y=determinant(Y)/determinant(A);

(%o5) y=1

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

※「determinant(矩陣)」指令表示計算矩陣結果。

P.138

例題 2：解方程組 $\begin{cases} 2x+3y+7z=7 \\ 3x+4y+6z=13 \end{cases}$

令 z=t，且 t 為實數，將方程組的 t 移項，可得：

(%i1) z:t

(%o1) t

(%i2) 2*x+3*y =7-7*z;

(%o2) 3y+2x=7-7t

(%i3) 3*x+4*y =13-6*z;

(%o3) 4y+3x=13-6t

(%i4) A:matrix([2,3],[3,4]);

(%o4) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

(%i5) X:matrix([7-7*t,3],[13-6*t,4]);

(%o5) $\begin{bmatrix} 7-7t & 3 \\ 13-6t & 4 \end{bmatrix}$

(%i6) Y:matrix([2, 7-7*t],[3, 13-6*t]);

(%o6) $\begin{bmatrix} 2 & 7-7t \\ 3 & 13-6t \end{bmatrix}$

(%i7) expand(x=determinant(X)/determinant(A));

(%o7) x=10t+11

(%i8) expand(y=determinant(Y)/determinant(A));

(%o8) y=-9t-5

＊由上述可得 x=10t+11、y=-9t-5、z=t，t 為任意實數

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

※「determinant(矩陣)」指令表示計算矩陣結果。

※「expand ([算式] × [算式])」指令表示展開算式。

隨堂練習：解方程組$\begin{cases} x-y+4z=7 \\ 2x+y-z=3 \end{cases}$

令 z=t，且 t 為實數，將方程組的 t 移項，可得：

(%i1) z:t

(%o1) t

(%i2) x-y=7-4*z;

(%o2) x-y=7-4t

(%i3) 2*x+y=3+z;

(%o3) y+2x=t+3

(%i4) A:matrix([1,-1],[2,1]);

(%o4) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

(%i5) X:matrix([7-4*t,-1],[t+3,1]);

(%o5) $\begin{bmatrix} 7-4t & -1 \\ t+3 & 1 \end{bmatrix}$

(%i6) Y:matrix([1, 7-4*t],[2, t+3]);

(%o6) $\begin{bmatrix} 1 & 7-4t \\ 2 & t+3 \end{bmatrix}$

(%i7) expand(x=determinant(X)/determinant(A));

(%o7) x=$\frac{10}{3}-t$

(%i8) expand(y=determinant(Y)/determinant(A));

(%o8) y=$3t-\frac{11}{3}$

＊由上述可得 x=$\frac{10}{3}-t$ 、y=$3t-\frac{11}{3}$ 、z=t，t 為任意實數

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

※「determinant(矩陣)」指令表示計算矩陣結果。

※「expand ([算式] × [算式])」指令表示展開算式。

P.140

例題 3：利用克拉瑪公式解方程組 $\begin{cases} x+3y-z=-3 \\ 3x-y+2z=1 \\ 2x-y+z=-1 \end{cases}$

(%i1) D: matrix([1,3,-1],[3,-1,2],[2,-1,1]);

(%o1) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

(%i2) X: matrix([-3,3,-1],[1,-1,2],[-1,-1,1]);

(%o2) $\begin{bmatrix} -3 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

(%i3) Y: matrix([1,-3,-1],[3,1,2],[2,-1,1]);

(%o3) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

(%i4) Z: matrix([1,3,-3],[3,-1,1],[2,-1,-1]);

(%o4) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

(%i5) x=determinant(X)/determinant(D);

(%o5) x=-2

(%i6) y=determinant(Y)/determinant(D);

(%o6) y=1

(%i7) z=determinant(Z)/determinant(D);

(%o7) z=4

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

※「determinant(矩陣)」指令表示計算矩陣結果。

P.141

隨堂練習：利用克拉瑪公式解方程組 $\begin{cases} x+2y-3z=0 \\ 2x-y+z=8 \\ x-3y-2z=14 \end{cases}$

(%i1) D: matrix([1,2,1],[2,-1,-3],[-3,1,-2]);

(%o1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

(%i2) X: matrix([0,8,14],[2,-1,-3],[-3,1,-2]);

(%o2) $\begin{bmatrix} 0 & 8 & 14 \\ 2 & -1 & -3 \\ -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

(%i3) Y: matrix([1,2,1],[0,8,14],[-3,1,-2]);

(%o3) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 14 \\ -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

(%i4) Z: matrix([1,2,1],[2,-1,-3],[0,8,14]);

(%o4) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 0 & 8 & 14 \end{bmatrix}$

(%i5) x=determinant(X)/determinant(D);

(%o5) x=3

(%i6) y=determinant(Y)/determinant(D);

(%o6) y=-3

(%i7) z=determinant(Z)/determinant(D);

(%o7) z=-1

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

※「determinant(矩陣)」指令表示計算矩陣結果。

P.142

例題 4：求實數 λ 的值，使方程組 $\begin{cases} 5x+4y+2z=\lambda x \\ 4x+5y+2z=\lambda y \\ 2x+2y+2z=\lambda z \end{cases}$，有不全為 0 的解

P.143

隨堂練習：求實數 λ 的值，使方程組 $\begin{cases} 2x+y+z=\lambda x \\ 2x+3y+2z=\lambda y \\ x+y+2z=\lambda z \end{cases}$，有不全為 0 的解

例題 5：解方程組$\begin{cases} x+y+z=6 \\ x+2y-3z=-4 \\ x-y+9z=18 \end{cases}$

(%i1) D: determinant(matrix([1,1,1],[1,2,-3],[1,-1,9]));

(%o1) 0

係數行列式為 0，故無法使用克拉瑪，本題使用高斯消去法進行解題：

(%i2) F1:x+y+z=6; F2: x+2*y-3*z=-4; F3: x-y+9*z=18;

(%o2) x+y+z=6

(%o3) x+2y-3z=-4

(%o4) x-y+9z=18

[F1,F2,F3]為轉換的線性方程，[x,y,z]為轉換的參數；

augcoefmatrix 指令為加入擴增矩陣(此矩陣含常數項)；

M 定義為方程組轉換後的增廣矩陣

(%i4) M:augcoefmatrix([F1,F2,F3],[x,y,z]);

(%o4) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -6 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 9 & -18 \end{bmatrix}$

擴增矩陣的常數項應為(6,-4,8)，maxima 結果為(-6,4,-18)，其正負號相反

將矩陣 M 進行轉置，再將第 4 列乘上負號，再轉置回來

(%i5) M:transpose(M);

(%o5) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 9 \\ -6 & 4 & -18 \end{bmatrix}$

M[4]代表著矩陣 M 的第 4 列

(%i6) M[4]:M[4]*(-1);

(%o6) [6,-4,18]

(%i7) M:transpose(M);

(%o7) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & -3 & -4 \\ 1 & -1 & 9 & 18 \end{bmatrix}$

(新第一列定義為原矩陣第一列加第三列-得 M_{12} 為 0)

*其中$表示不顯示$之前之計算結果，只顯示$之後之計算結果

(%i8) M[1]:M[1]+M[3]$M;

(%o8) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 10 & 24 \\ 1 & 2 & -3 & -4 \\ 1 & -1 & 9 & 18 \end{bmatrix}$

(新第二列定義為原矩陣第二列減第三列-得 M_{21} 為 0)

(%i9) M[2]:M[2]-M[3]$M;

(%o9) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 10 & 24 \\ 0 & 3 & -12 & -22 \\ 1 & -1 & 9 & 18 \end{bmatrix}$

(新第一列定義為原矩陣第一列除 2-得 M_{31} 為 0)

(%i10) M[1]:M[1] /2 $M;

(%o10) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 12 \\ 0 & 3 & -12 & -22 \\ 1 & -1 & 9 & 18 \end{bmatrix}$

(新第三列定義為原矩陣第三列減第一列-得 M_{31} 為 0)

(%i11) M[3]:M[3]- M[1] $M;

(%o11) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 12 \\ 0 & 3 & -12 & -22 \\ 0 & -1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

(新第二列定義為原矩陣第二列加第三列乘 2-得 M_{22} 為 1)

(%i12) M[2]:M[2]+ M[3]*2 $M;

(%o12) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 12 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & -1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

(新第三列定義為原矩陣第三列加第二列-得 M_{32} 為 0)

(%i13) M[3]:M[3]+M[2] $M;

(%o13) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 12 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

＊由第三列可得 0x+0y+0z=-4，故本題無解

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

※「determinant(矩陣)」指令表示計算矩陣結果。

※「transpose (矩陣)」指令表示將 $M_{n\times m}$ 轉置(行列互換)成 $M_{m\times n}$。

P.144

隨堂練習：解方程組$\begin{cases} x-2y+z=-1 \\ 3x+2y-2z=3 \\ -4x+z=4 \end{cases}$

(%i1) D: determinant(matrix([1,-2,1],[3,2,-2],[-4,0,1]));

(%o1) 0

係數行列式為 0，故無法使用克拉瑪，本題使用高斯消去法進行解題：

(%i2) F1:x-2*y+z=-1; F2: 3*x+2*y-2*z=3; F3: -4*x+z=4;

(%o2) z-2y+x=-1

(%o3) -2z+2y+3x=3

(%o4) z-4x=4

[F1,F2,F3]為轉換的線性方程，[x,y,z]為轉換的參數；

augcoefmatrix 指令為加入擴增矩陣(此矩陣含常數項)；

M 定義為方程組轉換後的增廣矩陣

(%i4) M:augcoefmatrix([F1,F2,F3],[x,y,z]);

(%o4) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & -3 \\ -4 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$

擴增矩陣的常數項應為(-1,3,4)，maxima 結果為(1,-3,-4)，其正負號相反

將矩陣 M 進行轉置，再將第 4 列乘上負號，再轉置回來

(%i5) M:transpose(M);

(%o5) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$

M[4]代表著矩陣 M 的第 4 列

(%i6) M[4]:M[4]*(-1);

(%o6) [-1,3,4]

(%i7) M:transpose(M);

(%o7) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 & 3 \\ -4 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

(新第一列定義為原矩陣第一列加第二列-得 M_{12} 為 0)

<u>＊其中$表示不顯示$之前之計算結果，只顯示$之後之計算結果</u>

(%i8) M[1]:M[1]+M[2]$M;

(%o8) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 & 3 \\ -4 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

(新第三列定義為原矩陣第三列加第一列-得 M_{31} 為 0)

(%i9) M[3]:M[3]+M[1]$M;

(%o9) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

＊由第三列可得 0x+0y+0z=6，故本題無解

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

※「determinant(矩陣)」指令表示計算矩陣結果。

※「transpose (矩陣)」指令表示將 $M_{n\times m}$ 轉置(行列互換)成 $M_{m\times n}$。

例題 6：解方程組$\begin{cases} x-y-4z=1 \\ 2x+y+3z=4 \\ 4x-y-5z=6 \end{cases}$

(%i1) D: determinant(matrix([1,-1,-4],[2,1,3],[4,-1,-5]));

(%o1) 0

係數行列式為 0，故無法使用克拉瑪，本題使用高斯消去法進行解題：

(%i2) F1:x-y-4*z=1; F2: 2*x+y+3*z=4; F3: 4*x-y-5*z=6;

(%o2) -4z-y+x=1

(%o3) 3z+y+2x=4

(%o4) -5z-y+4x=6

[F1,F2,F3]為轉換的線性方程，[x,y,z]為轉換的參數；

augcoefmatrix 指令為加入擴增矩陣(此矩陣含常數項)；

M 定義為方程組轉換後的增廣矩陣

(%i4) M:augcoefmatrix([F1,F2,F3],[x,y,z]);

(%o4) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -4 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -4 \\ 4 & -1 & -5 & -6 \end{bmatrix}$

擴增矩陣的常數項應為(1,4,6)，maxima 結果為(-1,-4,-6)，其正負號相反

將矩陣 M 進行轉置，再將第 4 列乘上負號，再轉置回來

(%i5) M:transpose(M);

(%o5) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ -4 & 3 & -5 \\ -1 & -4 & -6 \end{bmatrix}$

M[4]代表著矩陣 M 的第 4 列

(%i6) M[4]:M[4]*(-1);

(%o6) [1,4,6]

(%i7) M:transpose(M);

(%o7) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & -5 & 6 \end{bmatrix}$

(新第三列定義為原矩陣第三列減第二列乘 2-得 M_{31} 為 0)

＊其中$表示不顯示$之前之計算結果，只顯示$之後之計算結果

(%i8) M[3]:M[3]-M[2]*2$M;

(%o8) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -11 & -2 \end{bmatrix}$

(新第二列定義為原矩陣第二列減第一列乘 2-得 M_{21} 為 0)

(%i9) M[2]:M[2]-M[1]*2$M;

(%o9) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & 11 & 2 \\ 0 & -3 & -11 & -2 \end{bmatrix}$

(新第三列定義為原矩陣第三列加第二列-得 M_{32} 為 0)

(%i10) M[3]:M[3]+ M[2] $M;

(%o10) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & 11 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

令 z=t 帶入上式，可得

(%i11) z:t;

(%o11) t

(%i12) solve([x-y-4*z=1,3*y+11*z=2],[x,y]);

(%o12) [[x=$\frac{t+5}{3}$,y=$-\frac{11t-2}{3}$]]

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

※「determinant(矩陣)」指令表示計算矩陣結果。

※「transpose (矩陣)」指令表示將 $M_{n\times m}$ 轉置(行列互換)成 $M_{m\times n}$。

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

P.145

隨堂練習：解方程組$\begin{cases} x-5y+4z=-3 \\ 2x+y+z=5 \\ 3x-4y+5z=2 \end{cases}$

(%i1) D: determinant(matrix([1,-5,4],[2,1,1],[3,-4,5]));

(%o1) 0

係數行列式為 0，故無法使用克拉瑪，本題使用高斯消去法進行解題：

(%i2) F1:x-5*y+4*z=-3; F2: 2*x+y+z=5; F3: 3*x-4*y+5*z=2;

(%o2) 4z-5y+x=-3

(%o3) z+y+2x=5

(%o4) 5z-4y+3x=2

[F1,F2,F3]為轉換的線性方程，[x,y,z]為轉換的參數；

augcoefmatrix 指令為加入擴增矩陣(此矩陣含常數項)；

M 定義為方程組轉換後的增廣矩陣

(%i4) M:augcoefmatrix([F1,F2,F3],[x,y,z]);

(%o4) $\begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -5 \\ 3 & -4 & 5 & -2 \end{bmatrix}$

擴增矩陣的常數項應為(-3,5,2)，maxima 結果為(3,-5,-2)，其正負號相反

將矩陣 M 進行轉置，再將第 4 列乘上負號，再轉置回來

(%i5) M:transpose(M);

(%o5) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & 1 & -4 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & -5 & -2 \end{bmatrix}$

M[4]代表著矩陣 M 的第 4 列

(%i6) M[4]:M[4]*(-1);

(%o6) [-3,5,2]

(%i7) M:transpose(M);

(%o7) $\begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & -4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

(新第二列定義為原矩陣第二列減第一列乘 2-得 M_{21} 為 0)

<u>＊其中$表示不顯示$之前之計算結果，只顯示$之後之計算結果</u>

(%i8) M[2]:M[2]-M[1]*2$M;

(%o8) $\begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 & -3 \\ 0 & 11 & -7 & 11 \\ 3 & -4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

(新第三列定義為原矩陣第三列減第一列乘 3-得 M_{31} 為 0)

(%i9) M[3]:M[3]-M[1]*3$M;

(%o9) $\begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 & -3 \\ 0 & 11 & -7 & 11 \\ 0 & 11 & -7 & 11 \end{bmatrix}$

(新第三列定義為原矩陣第三列減第二列-得 M_{32} 為 0)

(%i10) M[3]:M[3]-M[2] $M;

(%o10) $\begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 & -3 \\ 0 & 11 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

令 z=t 帶入上式，可得

(%i11) z:t;

(%o11) t

(%i12) solve([x-5*y+4*z=-3,11*y-7*z=11],[x,y]);

(%o12) [[x=$-\frac{9t-22}{11}$,y=$\frac{7t+11}{11}$]]

※「matrix([a_{11},a_{12},…,a_{1m}],…, [a_{n1},a_{n2},…,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

※「determinant(矩陣)」指令表示計算矩陣結果。

※「transpose (矩陣)」指令表示將 $M_{n\times m}$ 轉置(行列互換)成 $M_{m\times n}$。

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

P.145 習題 2-5

1. 利用克拉瑪公式解下列方程組：

(1)

$$\begin{cases} 7x-4y=18 \\ 5x+9y=6 \end{cases}$$

(%i1) A:matrix([7,-4],[5,9]);

(%o1) $\begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$

(%i2) X:matrix([18,-4],[6,9]);

(%o2) $\begin{bmatrix} 18 & -4 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$

(%i3) Y:matrix([7,18],[5,6]);

(%o3) $\begin{bmatrix} 7 & 18 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

(%i4) x=determinant(X)/determinant(A);

(%o4) $x=\frac{186}{83}$

(%i5) y=determinant(Y)/determinant(A);

(%o5) $y=-\frac{48}{83}$

(2)

$$\begin{cases} 12x+17y=8 \\ 25x+18y=-32 \end{cases}$$

(%i6) A:matrix([12,17],[25,18]);

(%o6) $\begin{bmatrix} 12 & 17 \\ 25 & 18 \end{bmatrix}$

(%i7) X:matrix([8,17],[-32,18]);

(%o7) $\begin{bmatrix} 8 & 17 \\ -32 & 18 \end{bmatrix}$

(%i8) Y:matrix([12,8],[25,-32]);

(%o8) $\begin{bmatrix} 12 & 8 \\ 25 & -32 \end{bmatrix}$

(%i9) x=determinant(X)/determinant(A);

(%o9) x=$-\frac{688}{209}$

(%i10) y=determinant(Y)/determinant(A);

(%o10) y=$\frac{584}{209}$

(3)

$$\begin{cases} x+3y+z=3 \\ x+5y+5z=1 \\ 2x+6y+3z=8 \end{cases}$$

(%i1) D: matrix([1,3,1],[1,5,5],[2,6,3]);

(%o1) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 5 \\ 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$

(%i2) X: matrix([3,3,1],[1,5,5],[8,6,3]);

(%o2) $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 5 \\ 8 & 6 & 3 \end{bmatrix}$

(%i3) Y: matrix([1,3,1],[1,1,5],[2,8,3]);

(%o3) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 8 & 3 \end{bmatrix}$

(%i4) Z: matrix([1,3,3],[1,5,1],[2,6,8]);

(%o4) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 8 \end{bmatrix}$

(%i5) x=determinant(X)/determinant(D);

(%o5) x=16

(%i6) y=determinant(Y)/determinant(D);

(%o6) y=-5

(%i7) z=determinant(Z)/determinant(D);

(%o7) z=2

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

※「determinant(矩陣)」指令表示計算矩陣結果。

2. 方程組$\begin{cases} kx+9y=0 \\ 4x+ky=0 \end{cases}$，有異於 x=0、y=0 的解，求 k 的值

P.146

3. 已知方程組$\begin{cases} 3x+3y-2z=2 \\ 4x+y+3z=-5 \\ 7x+4y+z=a \end{cases}$有解，求 a 的值並解出方程組

2-6 反方陣

P.150

例題 1：判斷下列各二階方陣是否可逆？可逆時求其反方陣

$$A=\begin{bmatrix}8 & 7\\ 7 & 3\end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & 4\end{bmatrix}\ ,\ C=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}$$

A 矩陣

(%i1) A:matrix([8,7],[7,3]);

(%o1) $\begin{bmatrix}8 & 7\\ 7 & 3\end{bmatrix}$

(%i2) invert(A);

(%o2) $\begin{bmatrix}-\frac{3}{25} & \frac{7}{25}\\ \frac{7}{25} & -\frac{8}{25}\end{bmatrix}$

B 矩陣

(%i3) B:matrix([0,2],[1,4]);

(%o3) $\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & 4\end{bmatrix}$

(%i4) invert(B);

(%o4) $\begin{bmatrix}-2 & 1\\ \frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}$

C 矩陣

(%i5) C:matrix([1,2],[2,4]);

(%o5) $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}$

(%i6) invert(C);

(%o6) Division by 0

-- an error. To debug this try debugmode(true);

(%i7) determinant(C);

(%o7) 0

＊det(C)=0，故 C 方陣不可逆，無反方陣

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

※「determinant(矩陣)」指令表示計算矩陣結果。

※「invert(矩陣)」指令表示求矩陣之反矩陣。

隨堂練習：判斷下列各二階方陣是否可逆？可逆時求其反方陣，

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & 5\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 5 & 10\end{bmatrix}$$

A 矩陣

(%i1) A:matrix([1,0],[-2,5]);

(%o1) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & 5\end{bmatrix}$

(%i2) invert(A);

(%o2) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5}\end{bmatrix}$

B 矩陣

(%i3) B:matrix([1,2],[5,10]);

(%o3) $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 5 & 10\end{bmatrix}$

(%i4) invert(B);

(%o4) Division by 0

-- an error. To debug this try debugmode(true);

(%i5) determinant(B);

(%o5) 0

＊det(B)=0，故 B 方陣不可逆，無反方陣

※「**matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])**」指令表示 n×m 矩陣。

※「**determinant(矩陣)**」指令表示計算矩陣結果。

※「**invert(矩陣)**」指令表示求矩陣之反矩陣。

P.154

例題 2：利用基本列運算求 $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 5 & 14\end{bmatrix}$ 的反方陣

(%i1) A:matrix([1,3,1,0],[5,14,0,1]);

(%o1) $\begin{bmatrix}1 & 3 & 1 & 0\\ 5 & 14 & 0 & 1\end{bmatrix}$

將 A 矩陣之 A_{11}、A_{22} 元素化為 1，A_{12}、A_{21} 元素化為 0

(新第二列定義為原矩陣第二列減第一列乘 5-得 A_{21} 為 0)

(%i2) A[2]:A[2]-A[1]*5$A;

(%o2) $\begin{bmatrix}1 & 3 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -5 & 1\end{bmatrix}$

(新第二列定義為原矩陣第二列乘-1-得 A_{22} 為 1)

(%i3) A[2]:A[2]*(-1)$A;

(%o3) $\begin{bmatrix}1 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 5 & -1\end{bmatrix}$

(新第一列定義為原矩陣第一列減第二列乘 3-得 A_{12} 為 0)

(%i4) A[1]:A[1]-A[2]*3$A;

(%o4) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -14 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

＊ $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 14 \end{bmatrix}$的反方陣為$\begin{bmatrix} -14 & 3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

隨堂練習：利用基本列運算求 $B=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$的反方陣

(%i1) B:matrix([2,1,1,0],[5,3,0,1]);

(%o1) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

將 B 矩陣之 B_{11}、B_{22} 元素化為 1，B_{12}、B_{21} 元素化為 0

(新第一列定義為原矩陣第一列除 2-得 B_{11} 為 1)

(%i2) B[1]:B[1]/2$B;

(%o2) $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(新第二列定義為原矩陣第二列減第一列乘 5-得 M_{21} 為 0)

(%i3) B[2]:B[2]- B[1]*5$B;

(%o3) $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \end{bmatrix}$

(新第二列定義為原矩陣第二列乘 2-得 M_{22} 為 1)

(%i4) B[2]:B[2]*2$B;

(%o4) $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{bmatrix}$

(新第一列定義為原矩陣第一列減第二列除 2-得 M_{12} 為 0)

(%i4) B[1]:B[1]- B[2]/2$B;

(%o4) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{bmatrix}$

＊ $B=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ 的反方陣為 $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

例題 3：求三階方陣 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -3 & 6 \end{bmatrix}$ 的反方陣

(%i1) A:matrix([1,2,-1,1,0,0],[2,3,4,0,1,0],[-1,-3,6,0,0,1]);

(%o1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

將 A 矩陣之 A_{11}、A_{22}、A_{33} 元素化為 1，A_{12}、A_{13}、A_{21}、A_{23}、A_{31}、A_{32} 元素化為 0

(新第二列定義為原矩陣第二列減第一列乘 2-得 A_{21} 為 0)

(%i2) A[2]:A[2]-A[1]*2$A;

(%o2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 6 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(新第三列定義為原矩陣第三列加第一列-得 A_{31} 為 0)

(%i3) A[3]:A[3]+ A[1]$A;

(%o3) $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(新第一列定義為原矩陣第一列加第二列乘 2-得 A_{12} 為 0)

(%i4) A[1]:A[1]+A[2]*2$A;

(%o4) $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 11 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(新第二列定義為原矩陣第二列乘(-1)-得 A_{22} 為 1)

(%i5) A[2]:A[2] *(-1)$A;

(%o5) $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 11 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(新第三列定義為原矩陣第三列加第二列-得 A_{32} 為 0)

(%i6) A[3]:A[3]+A[2] $A;

(%o6) $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 11 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(新第三列定義為原矩陣第三列乘(-1)-得 A_{33} 為 1)

(%i7) A[3]:A[3]*(-1) $A;

(%o7) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 11 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

(新第一列定義為原矩陣第一列減第三列乘 11-得 A_{13} 為 0)

(%i8) A[1]:A[1]-A[3]*11 $A;

(%o8) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 30 & -9 & 11 \\ 0 & 1 & -6 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

(新第二列定義為原矩陣第二列加第三列乘 6-得 A_{23} 為 0)

(%i9) A[2]:A[2]+A[3]*6 $A;

(%o9) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 30 & -9 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & -16 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

＊ $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -3 & 6 \end{bmatrix}$ 的反方陣為 $\begin{bmatrix} 30 & -9 & 11 \\ -16 & 5 & -6 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

P.155

隨堂練習：求方陣 $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 的反方陣

(%i1) A:matrix([1,-2,-4,1,0,0],[0,1,-3,0,1,0],[0,0,1,0,0,1]);

$$(\%o1)\ \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

將 A 矩陣之 A_{11}、A_{22}、A_{33} 元素化為 1，A_{12}、A_{13}、A_{21}、A_{23}、A_{31}、A_{32} 元素化為 0

(新第一列定義為原矩陣第一列加第二列乘 2-得 A_{12} 為 0)

(%i2) A[1]:A[1]+A[2]*2$A;

$$(\%o2)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -10 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(新第一列定義為原矩陣第一列加第三列乘 10-得 A_{31} 為 0)

(%i3) A[1]:A[1]+ A[3]*10$A;

$$(\%o3)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(新第二列定義為原矩陣第二列加第三列乘 3-得 A_{23} 為 0)

(%i4) A[2]:A[2]+A[3]*3$A;

$$(\%o4)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

＊ $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 的反方陣為 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

※「matrix([a_{11},a_{12},…,a_{1m}],…, [a_{n1},a_{n2},…,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

P.158

例題 4： 求方陣 $A=\begin{bmatrix}3 & -1 & 1\\5 & 2 & 0\\4 & 3 & -2\end{bmatrix}$ 的反方陣

(%i1) A:matrix([3,-1,1],[5,2,0],[4,3,-2]);

(%o1) $\begin{bmatrix}3 & -1 & 1\\5 & 2 & 0\\4 & 3 & -2\end{bmatrix}$

(%i2) invert(A);

(%o2) $\begin{bmatrix}\frac{4}{15} & -\frac{1}{15} & \frac{2}{15}\\-\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\-\frac{7}{15} & \frac{13}{15} & -\frac{11}{15}\end{bmatrix}$

＊方陣 $A=\begin{bmatrix}3 & -1 & 1\\5 & 2 & 0\\4 & 3 & -2\end{bmatrix}$ 的反方陣為 $\begin{bmatrix}\frac{4}{15} & -\frac{1}{15} & \frac{2}{15}\\-\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\-\frac{7}{15} & \frac{13}{15} & -\frac{11}{15}\end{bmatrix}$

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

※「invert(矩陣)」指令表示求矩陣之反矩陣。

隨堂練習： 判斷下列各二階方陣是否可逆？可逆時求其反方陣，

$B=\begin{bmatrix}3 & 2 & 2\\1 & 0 & 2\\-1 & -1 & 0\end{bmatrix}$、$C=\begin{bmatrix}3 & 2 & 2\\1 & 0 & 2\\-1 & 1 & 0\end{bmatrix}$

B 矩陣

(%i1) B:matrix([3,2,2],[1,0,2],[-1,-1,0]);

(%o1) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

(%i2) invert(B);

(%o2) Division by 0

-- an error.　To debug this try debugmode(true);

(%i3) determinant(B);

(%o3) 0

＊det(C)=0，故 C 方陣不可逆，無反方陣

C 矩陣

(%i4) C:matrix([3,2,2],[1,0,2],[-1,1,0]);

(%o4) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(%i5) invert(C);

(%o5) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{8} & \frac{5}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

※「determinant(矩陣)」指令表示計算矩陣結果。

※「invert(矩陣)」指令表示求矩陣之反矩陣。

P.160 習題 2-6

1. 判斷下列各二階方陣是否可逆？可逆時求其反方陣

$$A=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 3 & 11\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 7 & -3\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 6 & -9\end{bmatrix}$$

A 矩陣

(%i1) A:matrix([1,4],[3,11]);

(%o1) $\begin{bmatrix}1 & 4\\ 3 & 11\end{bmatrix}$

(%i2) invert(A);

(%o2) $\begin{bmatrix}-11 & 4\\ 3 & -1\end{bmatrix}$

B 矩陣

(%i3) B:matrix([2,0],[7,-3]);

(%o3) $\begin{bmatrix}2 & 0\\ 7 & -3\end{bmatrix}$

(%i4) invert(B);

(%o4) $\begin{bmatrix}\frac{2}{7} & 1\\ \frac{7}{6} & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}$

C 矩陣

(%i5) C:matrix([2,-3],[6,-9]);

(%o5) $\begin{bmatrix}2 & -3\\ 6 & -9\end{bmatrix}$

(%i6) invert(C);

(%o6) Division by 0

-- an error. To debug this try debugmode(true);

(%i7) determinant(C);

(%o7) 0

∗det(C)=0，故 C 方陣不可逆，無反方陣

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

※「determinant(矩陣)」指令表示計算矩陣結果。

※「invert(矩陣)」指令表示求矩陣之反矩陣。

2. 方陣 A 為$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$與$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$的乘積，求方陣 A 的反方陣

(%i1) A:matrix([1,-1,2],[2,1,-1]). matrix([2,-1],[1,2],[-1,3]);

(%o1) $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$

(%i2) invert(A);

(%o2) $\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{15} \end{bmatrix}$

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

※「invert(矩陣)」指令表示求矩陣之反矩陣。

3. 二階方陣 A 的反方陣是 $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$，求矩陣 A

(%i1) A:(1/2)*matrix([4,2],[3,1]);

(%o1) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(%i2) invert(A);

(%o2) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

＊A 的反方陣再次反方陣結果即為 A 方陣

※「matrix([a_{11},a_{12},…,a_{1m}],…, [a_{n1},a_{n2},…,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

※「invert(矩陣)」指令表示求矩陣之反矩陣。

4. 求方陣 $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ 的反方陣

(%i1) A: matrix([1,-2,2],[1,-1,-4],[-1,1,3]);

(%o1) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

(%i2) invert(A);

(%o2) $\begin{bmatrix} -1 & -8 & -10 \\ -1 & -5 & -6 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

※「matrix([a_{11},a_{12},…,a_{1m}],…, [a_{n1},a_{n2},…,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

※「invert(矩陣)」指令表示求矩陣之反矩陣。

5. 矩陣 $A=\begin{bmatrix} x & y & z \\ u & v & w \end{bmatrix}$ 滿足 $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y & z \\ u & v & w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & -4 & 8 \end{bmatrix}$，試求矩陣 A

(%i1) solve([2*x+u=4,2*y+v=-2,2*z+w=3,-3*x-u=1,-3*y-v=-4,-3*z-w=8],[x,y,z,u,v,w]);

(%o1) [[x=-5,y=6,z=-11,u=14,v=-14,w=25]]

＊ $A=\begin{bmatrix} -5 & 6 & -11 \\ 14 & -14 & 25 \end{bmatrix}$

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

6. 若方陣 $A=\begin{bmatrix} 3 & x \\ 2-x & -3 \end{bmatrix}$ 的反方陣是 A 本身，設 x 的值

(%i1) A: matrix([3,x],[2-x,-3]);

(%o1) $\begin{bmatrix} 3 & x \\ 2-x & -3 \end{bmatrix}$

(%i2) invert(A);

(%o2) $\begin{bmatrix} -\dfrac{3}{(x-2)x-9} & -\dfrac{x}{(x-2)x-9} \\ \dfrac{x-2}{(x-2)x-9} & \dfrac{3}{(x-2)x-9} \end{bmatrix}$

(%i1) solve([3=-3/((x-2)*x-9),x=-x/((x-2)*x-9),2-x=(x-2)/((x-2)*x-9),-3=3/((x-2)*x-9)],[x]);

(%o1) [[x=-2],[x=4]]

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

※「invert(矩陣)」指令表示求矩陣之反矩陣。

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

7. 設 A 是三階方陣且滿足 $A\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\-4\\3\end{bmatrix}$，$A\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\0\\3\end{bmatrix}$，$A\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\4\\10\end{bmatrix}$，求方陣 A。

假設 A 矩陣為 $\begin{bmatrix} r & s & t \\ u & v & w \\ x & y & z \end{bmatrix}$

(%i1) A: matrix([r,s,t],[u,v,w],[x,y,z]);

(%o1) $\begin{bmatrix} r & s & t \\ u & v & w \\ x & y & z \end{bmatrix}$

(%i2) A.matrix([1],[-1],[1]);

(%o2) $\begin{bmatrix} t-s+r \\ w-v+u \\ z-y+x \end{bmatrix}$

(%i3) A.matrix([1],[0],[1]);

(%o3) $\begin{bmatrix} t+r \\ w+u \\ z+x \end{bmatrix}$

(%i4) A.matrix([0],[1],[1]);

(%o4) $\begin{bmatrix} t+s \\ w+v \\ z+y \end{bmatrix}$

(%i5)solve([t-s+r=5,w-v+u=-4,z-y+x=3,t+r=5,w+u=0,z+x=3,t+s=1,w+v=4,z+y=10],[r,s,t,u,v,w,x,y,z]);

(%o5) [[r=4,s=0,t=1,u=0,v=4,w=0,x=-7,y=0,z=10]]

＊A 矩陣為 $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -7 & 0 & 10 \end{bmatrix}$

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

8. 對任意可逆方陣 A 與正整數 k，定義 $A^{-k}=(A^{-1})^k$，設 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，求 $A^{-2}=(A^2)^{-1}$

(%i1) A:matrix([1,1,2],[1,2,1],[2,1,1]);

(%o1) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(%i2) invert(A.A);

(%o2) $\begin{bmatrix} \frac{11}{16} & -\frac{5}{16} & -\frac{5}{16} \\ -\frac{5}{16} & \frac{11}{16} & -\frac{5}{16} \\ -\frac{5}{16} & -\frac{5}{16} & \frac{11}{16} \end{bmatrix}$

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

※「invert(矩陣)」指令表示求矩陣之反矩陣。

9. 設 $A=\begin{bmatrix}2 & 4\\5 & 6\end{bmatrix}$，驗證 $A^2-8A-8I_2=O_2$，據此計算 $A^4-8A^3-9A^3+9A+3I_2$

10. 設 $A=\begin{bmatrix}4 & 2\\-3 & -1\end{bmatrix}$，n 是正整數，下面是計算 A^n 的一種方法，試依此方法求出 A^n

(1) 設 X 是 2×1 階矩陣，求 λ 值，使得 AX=λX 有異於 $X=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

(2) 設上面(1)的 λ 值是 λ_1 與 λ_2，解 AX=λ_1X、AY=λ_2Y，取一組不全為零的解 $X=\begin{bmatrix}p\\q\end{bmatrix}$、$Y=\begin{bmatrix}r\\s\end{bmatrix}$，設 $P=\begin{bmatrix}p & r\\q & s\end{bmatrix}$，計算 $P^{-1}AP$ 的值

(3) 計算 $(P^{-1}AP)^n=P^{-1}A^nP$ 的值，進而求出 A^n 的值

第三章　不等式

3-1　絕對不等式

P.167

例題 1：利用柯西不等式證明：對任意 n 個實數 a_1、a_2、…、a_n，

$$\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^2 \le \frac{a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+\cdots+a_n^{\ 2}}{n}$$

P.168

隨堂練習：利用柯西不等式證明：對任意 a、b，$|a\cos\theta+b\sin\theta|\le\sqrt{a^2+b^2}$

例題 2：設 x、y、z 是實數且 $x^2+4y^2+4z^2=9$，求 $x+2y+z$ 的最大值及最大值發生時 x、y、z 的值

P.169

隨堂練習：設 x、y、z 是實數且 $x^2+4y^2+4z^2=36$，求 $x-2y+2z$ 的最小值及最小值發生時 x、y、z 的值

例題 3：設 x、y、z 是實數且 $2x+y-2z=12$，求 $x^2+y^2+z^2$ 的最小值及最小值發生時 x、y、z 的值

P.170

隨堂練習：設 a、b、c 是實數且 $a+2b-3c=22$，求 $a^2+4b^2+c^2$ 的最小值及最小值發生時 a、b、c 的值

例題 4： 設 a_1、a_2、⋯、a_n 是 n 個正數，證明：$(a_1+2a_2+\cdots+na_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_2}+\cdots+\frac{n}{a_n}\right)\geq\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

隨堂練習： 設 a_1、a_2、⋯、a_n 是 n 個正數，證明：$(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{4}{a_2}+\cdots+\frac{n^2}{a_n}\right)\geq\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

P.173

例題 5：

(1) 設 a、b、c 是正數，證明：$\frac{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)}{abc}\geq 8$

(2) 當(1)小題的不等式等號成立時，求 a、b、c 的值

P.174

隨堂練習： 設 a、b、c 是正數，利用算幾不等式證明：$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\geq 6$

P.175

例題 6： 利用算幾不等式證明：對任意正整數 n，$\sqrt[n]{1\times2\times3\times\cdots\times n}\leq\frac{n+1}{2}$

隨堂練習： 設 n 為正整數，利用算幾不等式證明：$\sqrt[n]{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}\leq n$

例題 7： 座標空間中，由 x 軸上的向量 $\overline{OA}$，y 軸上的向量 $\overline{OC}$ 與 z 軸上的向量 $\overline{OS}$ 所張開的長方體如圖所示，這長方體的頂點 Q 落在平面 E：x+2y+3z=6 上，求這長方體的最大體積及此時頂點 Q 的座標。

P.176

隨堂練習： 例題 7 中的長方體，若已知其頂點 Q 落在球面 $x^2+y^2+z^2=27$ 上，求此長

方體的最大體積。

例題 8： 座標空間中，設點 P 是球面 S：$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=16$ 上的點，球點 P 到平面 E：2x+2y-z=23 的最長距離與最短距離，以及發生最長距離與最短距離時點 P 之座標。

P.177

隨堂練習： 坐標平面上 A(2 , 0)、B(0 , 4)，點 P 在線段 AB 上，求點 P 到兩座標軸距平方合的最小值，以及發生最小值時點 P 的座標

P.178

例題 9： 甲、乙、丙、丁、戊五人的數學月考平均成績為 70 分，已知甲的成績是 60 分，求這五人數學成績變異數的最小值。(採用母群體變異數 $\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j-\bar{x})^2$)

P.179

隨堂練習： 例題 9 中，已知甲的成績是 60 分且乙的成績是 92 分，求這五人數學成績變異數的最小值。

例題 10： 一長方體形狀的無蓋容器，容積是 32 立方公分，長、寬、高各是多少時才會使這容器的外表面積達到最小？並求這最小外表面積

P.180

隨堂練習： 一長方體形狀的無蓋容器，其外表面積是 48 平方公分，求這容器最大容積；又當這容器有最大容積時，其長、寬、高各是多少？

P.180 習題 3-1

1. 設 a、b、x、y 都是實數且滿足 $a^2+b^2=9$、$x^2+y^2=16$，求 ax+by 的最大值與最小值

2. 設 a、b、c 都是正數，證明：$\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\geq 3$

3. 設 x、y、z 是實數且滿足 2x+y-4z=9，求 $x^2+y^2+4z^2=16$ 的最小值及最小值發生時 x、y、z 的值。

4. 一農夫想用 66 公尺長之竹籬圍成一長方形菜圃，並在其中一邊正中央留著寬 2 公尺的出入口，如右圖所示，求此農夫所圍成長方形菜圃的最大面積

5. 設 a、b、c 都是正實數且 a+b+c 都是正實數且 a+b+c=1，證明：$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\leq\sqrt{3}$

6. 設 x 為實數，求 $x^2-x-4+\frac{4}{x^2-x+1}$ 之最小值

7. 設 x、y 為實數，求 $x^2+y^2+(x+y-1)^2$ 之最小值

P.181

8. 設 a>0 且 b>0，比較下列四數的大小：$\frac{a+b}{2}$、$\sqrt{ab}$、$\frac{2ab}{a+b}$、$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

9. 依長方形禮盒，用一條長 140 公分的緞帶圍繞其高與長及高與寬，各繞一圈後打結，若段帶兩端需各留 10 公分打結，求此禮盒的最大體積。

10. 一無蓋的長方體容器，容積是 12 立方公尺，其內部塗上特定的防護漆，底部漆料的價格為用在四側漆料價格的 3 倍，再使塗漆最便宜的情況下，求這長方體容器的長、寬、高。

3-2 條件不等式

P.183

例題 1： 解不等式 $(x+1)^2(x-2)(x-3)>0$

(%i1) load (fourier_elim);

(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier_elim/fourier_elim.lisp

(%i2) fourier_elim([(x+1)^2*(x-2)*(x-3)>0], [x]);

(%o2) [3<x] or [x<-1] or [-1<x,x<2]

※「load (fourier_elim)」指令可執行不等式計算，須先載入。

※「fourier_elim([變數算式], [變數])」求解不等式。

隨堂練習： 解不等式 $(x-1)^2(x-4)^3(x-5)<0$

(%i1) load (fourier_elim);

(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier_elim/fourier_elim.lisp

(%i2) fourier_elim([(x-1)^2*(x-4)^3*(x-5)<0], [x]);

(%o2) [4<x,x<5] or [5<x,-(x-4)^3>0]

※「load (fourier_elim)」指令可執行不等式計算，須先載入。

※「fourier_elim([變數算式], [變數])」求解不等式。

P.184

例題 2： 解不等式 $x^6-1\geq 0$

隨堂練習： 解不等式 $x^4-16\leq 0$

(%i1) load (fourier_elim);

(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier_elim/fourier_elim.lisp

```
(%i2) fourier_elim([x^4-16<=0],[x]);
(%o2) [x=-2] or [x=2] or [-2<x,x<2]
```

※「load (fourier_elim)」指令可執行不等式計算，須先載入。

※「fourier_elim([變數算式], [變數])」求解不等式。

.

例題 3：解不等式 $x^2-\left|\ x\ \right|-6<0$

```
(%i1) load (fourier_elim);
(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier_elim/fourier_elim.lisp
(%i2) fourier_elim([x^2-abs(x)-6<0],[x]);
(%o2) [x=0] or [0<x,x<3] or [-3<x,x<0]
```

※「load (fourier_elim)」指令可執行不等式計算，須先載入。

※「fourier_elim([變數算式], [變數])」求解不等式。

P.185

隨堂練習：解不等式 $x^2+\left|\ x\ \right|-20>0$

```
(%i1) load (fourier_elim);
(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier_elim/fourier_elim.lisp
(%i2) fourier_elim([x^2+abs(x)-20>0],[x]);
(%o2) [4<x] or [x<-4]
```

※「load (fourier_elim)」指令可執行不等式計算，須先載入。

※「fourier_elim([變數算式], [變數])」求解不等式。

例題 4：解不等式 $\dfrac{x^2-2x}{x+4}\geq 1$

```
(%i1) load (fourier_elim);
```

(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier_elim/fourier_elim.lisp

(%i2) fourier_elim([(x^2-2*x)/(x+4)>=1],[x]);

(%o2) [x=-1] or [x=4] or [4<x] or [-4<x,x<-1]

※「load (fourier_elim)」指令可執行不等式計算，須先載入。

※「fourier_elim([變數算式], [變數])」求解不等式。

隨堂練習：解不等式 $\dfrac{x-5}{x^2-7x+12}>0$

(%i1) load (fourier_elim);

(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier_elim/fourier_elim.lisp

(%i2) fourier_elim([(x-5)/(x^2-7*x+12)>0],[x]);

(%o2) [5<x] or [3<x,x<4]

※「load (fourier_elim)」指令可執行不等式計算，須先載入。

※「fourier_elim([變數算式], [變數])」求解不等式。

P.188

例題 5：解在坐標平面上作出下列不等式的圖形：

(1) x+y>0

(2) -3x+2y+6≦0

P.189

隨堂練習：在坐標平面上作出不等式 x-4y≧3 的圖形：

例題 6：在坐標平面上作出下列聯立不等式的圖形：$\begin{cases} x\ge 0，\ y\ge 0 \\ 2x+y\le 12 \end{cases}$

P.190

隨堂練習：在坐標平面上作出下列聯立不等式的圖形：$\begin{cases} x \geq 0 \text{，} y \geq 0 \\ 4x+3y \geq 12 \end{cases}$

例題 7：在坐標平面上作出下列不等式的圖形：(x+2y-4)(x-3y+3)<0

隨堂練習：在坐標平面上作出不等式(x-2y+2)(x+2y-4)>0 的圖形

P.191

例題 8：設 x、y 是實數且 $x^2+y^2=25$ ，求 $\dfrac{y}{x+10}$ 的最大值與最小值

P.192

隨堂練習：設 x、y 是實數且 $(x-1)^2+y^2=25$ ，求 $\dfrac{y}{x-14}$ 的最大值與最小值

例題 9：如圖所示，點 P(x , y)是座標平面上頂點為 A(0 , 2)、B(2 , 3)、C(1 , 0)的三角形 ABC 所圍區域(含三角形的三邊)的一點，求 x^2+y^2 的最大值與最小值

P.193

隨堂練習：坐標平面上，點 P(x , y)滿足不等式 x≧0、y≧0、2x+y≦6，求 $(x-3)^2+(y-5)^2$ 的最大值與最小值。

例題 10：設 x、y 是實數且滿足 $x^2+2xy+y-6=0$ ，求 x+y 的範圍。

隨堂練習：設 x、y 是實數且滿足 $x^2+xy+y^2=15$ ，求 x+y 的最大值與最小值。

例題 11：在坐標平面上，求拋物線 $y=4-x^2$ 上最靠近點 P(0 , 2)的點座標。

P.194

隨堂練習：在坐標平面上，求拋物線 $y=3-x^2$ 上最靠近原點 O 的點座標。

P.194 **習題 3-2**

1. 解下列不等式：

(1) $x^2+4x+3\geq 0$

(%i1) load (fourier_elim);

(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier_elim/fourier_elim.lisp

(%i2) fourier_elim([x^2+4*x+3>=0],[x]);

(%o2) [x=-3] or [x=-1] or [-1<x] or [x<-3]

※「load (fourier_elim)」指令可執行不等式計算，須先載入。

※「fourier_elim([變數算式], [變數])」求解不等式。

(2) $(x^2+x-30)\,(x^2-x+2)<0$

(3) $x^6>x^3$

P.195

2. 二次不等式 $2x^2+ax+b<0$ 的解為 $-1<x<6$ ，求 a 與 b 的值

3. 在座標平面上，描繪下列不等式的圖形：

(1) $x-2y<0$

(2) $x^2+4y^2\geq 0$

(3) $x\leq 4$ ， $y\leq 6$ ， $2x+y-6\geq 0$

4. 座標平面上三角形 ABC 三頂點的座標分別是 A(2 , 0)、B(0 , 3)、C(2 , 5)，以二元一次不等式組表示三角形 ABC 的內部區域。

5. 設 x、y 是實數，$2x^2+3y^2\le 6$ 的限制條件下，求 2x+3y 的最大值與最小值。

6. 解下列不等式：

(1) $\frac{1}{x-1}<1$

(%i1) load (fourier_elim);

(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier_elim/fourier_elim.lisp

(%i2) fourier_elim([1/(x-1)<1],[x]);

(%o2) [2<x] or [x<1]

(2) $\frac{(x+1)(x-3)}{x^2-9}\ge 0$

(%i1) load (fourier_elim);

(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier_elim/fourier_elim.lisp

(%i2) fourier_elim([(x+1)*(x-3)/(x^2-9)>=0],[x]);

(%o2) [x=-1] or [-1<x,x<3] or [3<x] or [x<-3]

※「load (fourier_elim)」指令可執行不等式計算，須先載入。

※「fourier_elim([變數算式], [變數])」求解不等式。

7. 設 x、y 是實數且滿足 $3x^2+4y^2=12x$，求 x^2-4y^2-2x 的最大值與最小值。

8. 設 x、y 是實數且滿足 $x^2-4x+4y^2=1$，求 x+y 的最大值與最小值。

9. 函數 $f(x)=\frac{x^2+3x+3}{x^2+x+1}$ 的定義域是所有實數的集合，求 f(x) 的最大值與最小值。

(提示：令 $y=\frac{x^2+3x+3}{x^2+x+1}$，整理為 $(y-1)x^2+(y-3)x+(y-3)=0$，當時 $y\ne 1$，這是 x 的二次方程式，有實數解)

10. 設 x、y 是實數且滿足$x^2+y^2\le 10$，求x^2+2y^2-2x+3的最大值與最小值，並求最大值與最小值發生時 x、y 的值。

3-3 線性規劃

P.196

例題 1： 某製造商生產 A、B 兩種產品，每公斤成本分別為 10 元和 20 元，且每公斤利潤分別為 30 元和 40 元。若工廠每天產能的上限為 1200 公斤且每天可用的資金上限為 20000 元，則此製造商該如何分配產量以求取最大利潤？試列出此問題的數學模型？

P.197

隨堂練習： 甲、乙兩種營養食品，甲售價 100 公克 30 元，含蛋白質 30%、醣類 10%與脂肪 5%；乙售價 100 公克 25 元，含蛋白質 10%、醣類 40%與脂肪 10%。假設每人每天對蛋白質、醣類與脂肪的需求量分別為 90 公克、200 公克、50 公克，如何使用此兩種營養食品使得花費最少？試列出此問題的數學模型。

P.200

例題 2： 求例題 1 的最佳解與最佳目標函數值

P.201

隨堂練習： 求 x、y，使得 w=x+2y 具有最大值，且滿足限制條件：$\begin{cases} 2x+y\le 10 \\ x\ge 0，y\ge 0 \end{cases}$

例題 3： 求 x、y，使得 w=-x-y 具有最小值，且滿足限制條件：$\begin{cases} 3x+y\le 6 \\ x+2y\le 4 \\ x\ge 0，y\ge 0 \end{cases}$

P.202

隨堂練習： 求 x、y，使得 w=2x-5y 具有最小值，且滿足限制條件：$\begin{cases} 3x+8y\le 12 \\ 2x+3y\le 6 \\ x\ge 0\text{ , }y\ge 0 \end{cases}$

例題 4： 求 x、y，使得 w=2x+y 具有最大值，且滿足限制條件：$\begin{cases} x+y\ge 5 \\ 3x+2y\ge 12 \\ x\ge 0\text{ , }y\ge 0 \end{cases}$

P.203

隨堂練習： 求 x、y，使得 w=3x+5y 具有最小值，且滿足限制條件：$\begin{cases} x+y\le 10 \\ 3x+4y\le 36 \end{cases}$

例題 5： 求 x、y，使得 w=-x-2y 具有最小值，且滿足限制條件：$\begin{cases} x+2y\le 30 \\ 3x+y\le 30 \\ x\ge 0\text{ , }y\ge 0 \end{cases}$

P.204

隨堂練習： 例題 5 中，把目標函數改為 w=9x+3y，其餘不改變，試求目標函數的最大值及最佳解。

P.205

例題 6： 求 x、y，使得 w=2x+y 具有最大值，且滿足限制條件：$\begin{cases} x+y\le 6 \\ x-y\ge -6 \\ 1\le y\le 4 \end{cases}$

隨堂練習： 例題 6 中，改求目標函數的最小值，其餘不改變，試求最佳解。

P.206

例題 7：某化學工廠生產 A、B 兩種肥料，每噸的利潤分別為 1080 元與 900 元，生產過程中每噸所需的材料費與工本費如下表所列：

	材料費	工本費
A 肥料	2000	500
B 肥料	1500	600

在控制材料費不超過 93000 元且工本費不超過 30000 的情況下，這工廠應生產多少噸 A 肥料與 B 肥料，才能獲得最大利潤？

P.207

隨堂練習：某家電子公司生產 A、B 兩款手機，兩款手機的材料費及工時如下表所列：

	材料費	工本費
A 肥料	2000	50
B 肥料	1500	30

又生產 A 手機每隻利潤為 300 元，而 B 手機每隻利潤是 200 元，在限制材料費不多於 60 萬元且生產工時不超過 13500 小時的情況下，這家電子公司應生產手機 A、B 各多少隻才能獲得最大利潤？

P.208

例題 8：有 A、B 兩種投資，A 投資每年報酬率為 5%，B 投資每年報酬率為 10%，因為投資報酬率高的，相對的風險性也比較高，專家建議至少要將 $\frac{1}{3}$ 的資金放在 A 投資，而 B 投資不可超過總金額的 $\frac{1}{2}$，若現有總資金 300000 元且 A

的投資至少要 B 投資資金的一半，試問該如何分配資金使得報酬最大？

P.209

隨堂練習：有一債券基金報酬率為 6%，另一股票基金之年報酬率為 15%，若投資在股票基金的基金不得多於總資金的六成，且債券基金的資金必須占總資金的二成以上，又債券基金的資金必須大於股票基金的資金 $\frac{1}{3}$，試問該如何分配資金 20 萬元，使得報酬最大？

例題 9：某工廠生產 A、B 兩種產品，而每種產品包含三道連續製程，且每一製程每次只能製造單一產品，其在每個製程所需的時間如下表所示：

產品	生產每單位產品所需時間(分鐘)		
	製程 1	製程 2	製程 3
A	12	6	9
B	6	18	12

假設產品 A 每單位利潤 4 千元，產品 B 每單位利潤 6 千元，如果每個製程每天開工 12 小時，試問該如何分配產量使得利潤最大？

P.210

隨堂練習：例題 9 中，所有資料不變，如何分配產量使得三個製程總停滯時間最少？

P.211

例題 10：假設某人每天最多有 12 小時可以支配在工作與玩樂上，而玩樂每小時的快樂指數是工作的 3 倍，已知此人每天至少需要 7 小時才能把分內工作完成，

且玩樂不得超過 3 小時，試問應該如何支配時間使得快樂指數最高？

隨堂練習：例題 10 中：

(1) 如果玩樂每小時的快樂指數為工作的 2 倍，應該如何支配時間使得快樂指數最高？

(2) 若玩樂每小時的快樂指數為工作的快樂指數的 k 倍(k>0)，當 k 為何值時才會使此人把 12 小時全放在工作上？

P.212 **習題 3-3**

1. 以圖解法求 x 與 y，使得 w=3x+2y 有最小值，且滿足限制條件：$\begin{cases} 3x+4y\geq 12 \\ 3x-2y\leq 0 \\ x\geq 0 \end{cases}$

2. 利用線性規劃基本原理求 x 與 y，使得 w=5x+y 有最小值，且滿足限制條件：

$$\begin{cases} x+y\leq 10 \\ 3x+y\geq 4 \\ x\geq 0\text{，}\ y\geq 0 \end{cases}$$

3. F 為不等式，與所圍成的區域，在 F 中找出使得下列函數有最大值的點：

(1) w=x+y

(2) w=x-y

(3) w=x+5y

4. 滿足限制條件：$\begin{cases} 2x+y\geq 6 \\ 2x-y\geq 2 \\ y\leq 6 \end{cases}$ 的情形下，求 x 與 y 使得 w=6x-7y 有最小值

5. 若 x、y 滿足限制條件：$\begin{cases} x+y\leq 6 \\ x-y\geq -6 \\ |\ y\ |\leq 3 \end{cases}$，的情形下，求 x 與 y 使得 w=x+y 的最大值與最小值

6. 求 x 與 y，使得 w=5x+3y 有最小值，且滿足限制條件：$\begin{cases} 2x+y\le 6 \\ 2x+5y\le 10 \\ y\ge 0 \end{cases}$

7. 某家具工廠製造書桌和椅子，每張需要的材料費、工資及利潤如下表所示：

	材料費	工本費	利潤
書桌	200	150	400
椅子	80	100	200

如果每天材料費上限為 32000 元，而工資上限為 36000 元，試問工廠該如何分配每天的產量以達到最佳獲利？

8. 欲將兩種大小不同的鋼板截成 A、B、C 三種規格，各種鋼板可以截得 A、B、C 這三種規格的件數如下：

	A 規格	B 規格	C 規格
鋼板 1	10	3	2
鋼板 2	10	1	10

若欲得 A、B、C 三種規格的成品分別為 70 件、9 件、30 件，已知鋼板 1 每片 2000 元，鋼板 2 每片 2400 元，試問這兩種鋼板各需購買多少片可使成本最少？

9. f(x)為一次函數，已知$1\le f(1)\le 2$、$3\le f(2)\le 5$，求 f(4)的最大值及最小值

10. 求 w=3x-2y 的最大值與最小值，且滿足下列限制條件：$\begin{cases} x+y+u=3 \\ x+y+v=-1 \\ |x| \le 4\ ,\ y \ge 0\ ,\ u \ge 0\ ,\ v \le 0 \end{cases}$

11. 令 F 為聯立不等式$\begin{cases} 2x+3y \ge 6 \\ 3x-2y \le 9 \\ x+5y \le 20 \\ x \ge 0\ ,\ y \ge 0 \end{cases}$所圍成的區域，設 a 為實數，試求 a 的最大範圍使得 w=ax+y 在(5 , 3)有最大值