高中數學與ＭＡＸＩＭＡ：

以下將依據教育部審核教科書內容，以 MAXIMA 軟體解答例題、隨堂練習及自我評量以供高中生參考

高二上數學

-目次-

MAXIMA 指令簡介

※「factor(數值)」指令表示求因式分解。

※「primep(數值)」指令表示求是否為質數。

※「gcd(數值,數值)」指令表示求最大公因數。

※「lcm(數值,數值)」指令表示求最小公倍數。

※「load (functs)」指令表示先讀取此 function(函數)。

※「float(數值)」指令表示將結果轉換為小數。

※「abs(數值)」指令表示絕對值。

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

※「sqrt (數值)」指令表示數值開根號。

※「divisors (數值)」指令表示求出數值之因數。

※「quotient (被除數,除數)」指令表示求商。

※「remainder (被除數,除數)」指令表示求餘數。

※「imagpart(數值)」指令表示找出數值虛部係數

※「realpart(數值)」指令表示找出數值實部係數

※「conjugate (數值)」指令表示列出複數之共軛複數

※「expand ([算式] × [算式])」指令表示展開算式。

※「ratsimp ([算式] × [算式])」指令表示化簡算式。

※「radcan ([算式] × [算式])」指令表示化簡算式。

※「rootscontract((sqrt 數值)*(sqrt 數值))」指令執行乘開兩根號數值。

※「load (fourier_elim)」指令可執行不等式計算，須先載入。

※「fourier_elim([變數算式], [變數])([變數算式], [變數])」求解不等式。

※ 「harmonic (a, b, c, n)」表示分子為 a、分子為 b+(n-1)*c、n 項之數列；a/b, a/(b + c), a/(b + 2*c), ..., a/(b + (n - 1)*c)

※「**arithmetic (a, d, n)**」表示首項為 a、公差為 d、n 項之等差數列；a, a + d, a + 2*d, ..., a + (n - 1)*d.

※「**geometric (a, r, n)**」表示首項為 a、公比為 r、n 項之等差數列； a, a*r, a*r^2, ..., a*r^(n - 1).

※「**sum(計算式,變數,起始, 結束)**」指令表示含變數之算式由起始連加至結束。

※「**rat(數值)**」指令將數值轉換成分數形式。

※「**limit (變數算式, 變數, inf)**」指令表示算式變數無窮大，算式趨近於數值。

※「**collectterms(方程式 ，變數 1，變數 2，… ，變數 n)**」指令表示由方程式中，提出相同變數 1、變數 2…,變數 n。此指令使用時須先將方程式展開(expand)後，才可提出變數；並且方程式中不能有等號出現，須先自行移項整理。

※「**coefmatrix([F1,F2,F3],[x,y,z])**」指令為加入矩陣 (此矩陣不含常數項)，並將[F1,F2,F3]為欲轉換的線性方程，[x,y,z]為轉換的變數；

※「**augcoefmatrix([F1,F2,F3],[x,y,z])**」指令為加入擴增矩陣 (此矩陣含常數項)，並將[F1,F2,F3]為欲轉換的線性方程，[x,y,z]為轉換的變數；

※「**M:augcoefmatrix([方程式名稱 1，… ，方程式名稱 n]，[未知數 1，… ，未知數 n])**」指令表示方程組轉換後的增廣矩陣名稱定為 M，方程式有 1，… ，n 而未知數有未知數 1，… ，未知數 2，未知數 3。

※「**determinant(矩陣)**」指令表示計算矩陣結果。

※「**matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])**」指令表示 n×m 矩陣。

※「**augcoefmatrix([方程式 1,⋯,方程式 n]，[參數 1,⋯, 參數 n])**」指令表示

※「**compare (A 變數,B 變數)**」指令表示比較 A 變數、B 變數兩數值大小關係。

※「**plot2d ([方程式],[x,最小值,最大值],[y, 最小值,最大值])**」; 指令表示繪出方程式之圖形，其中 x 軸刻度介於最小值~最大值之間、y 軸刻度介於最小值~最大值之間。

※「transpose (矩陣)」指令表示將 $M_{n\times m}$ 轉置(行列互換)成 $M_{m\times n}$。

運算簡介

＋：MAXIMA 以+表示。

－：MAXIMA 以-表示。

× ：MAXIMA 以*表示。

÷ ：MAXIMA 以/表示。

a^2：MAXIMA 以 a^2 表示。

$\sqrt{a}$ ：MAXIMA 以 a^(1/2)或 sqrt(a)表示。

π ：MAXIMA 以%pi 表示。

***i* 虛數： MAXIMA 以%i 表示。**

A:5：將 A 定義為 5，其中:代表定義(未來輸入 A 就會跑出其定義之數值 5)。

kill(all)：將 maxima 中所有定義之數值清除。

kill(%i1)：將 maxima 中將(%i1)定義之數值清除。

．：表示內積。

$：不顯示計算結果。

第一章　向量

1-1　有向線段與向量

P.3

例題 1： 在圓 O 的內接正六邊形中，令 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{c}$，如下圖所示：

問 $\overrightarrow{AO}$、$\overrightarrow{BO}$、$\overrightarrow{FO}$、$\overrightarrow{OC}$、$\overrightarrow{OD}$、$\overrightarrow{OE}$、$\overrightarrow{CD}$、$\overrightarrow{ED}$ 與 $\overrightarrow{FE}$ 哪些向量分別與 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 相等？

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.4

隨堂練習：『馬走日』是象棋中馬的走法，下圖是象棋的部分棋盤，馬可以從 A 跳到 B，也可以跳到 C 或 D 等。我們用向量 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{AD}$ 表示馬走一步的情形？

(1)試問向量 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{AD}$ 是否相等

(2)若馬在 E 處，請在棋盤上用向量線段表示出馬走一步的所有情形

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.5

隨堂練習： 下圖為二組兩兩平行的直線組合，且每一小格都是菱形。試以 A 點為始點畫出 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 與 $\vec{a}$、$\vec{c}$。

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.7

例題 2： 已知 ABCDEF 為圓 O 的內接正六邊形，如下圖所示：求 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

隨堂練習：設 A、B、C 為平面上三點，求 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.8

例題 3：已知 ABCD 為四邊形，化簡下列各式：

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}$

(2) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DC}$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.9

隨堂練習：已知 ABCDE 為五邊形，化簡下列各式：

(1) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EB}$

(2) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DE}$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

例題 4：

設 ABCDEFGH 為長方體，並令 $\vec{a}=\overrightarrow{BC}$、$\vec{b}=\overrightarrow{AD}$、$\vec{c}=\overrightarrow{AE}$；試將下列各向量以 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 和 $\vec{c}$ 表示：

(1) $\overrightarrow{AG}$

(2) $\overrightarrow{DF}$

(3) $\overrightarrow{BH}$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

隨堂練習：如例題 4 所示，試以 $\vec{a}$ 、$\vec{b}$ 和 $\vec{c}$ 表示 $\overrightarrow{GD}$ 與 $\overrightarrow{CE}$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.11

例題 5：右圖為二組兩兩平行的直線組合，且每一小格都是菱形；試以 A 點為始點畫出 $\frac{1}{2}\vec{a}-3\vec{b}$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

隨堂練習：右圖為二組兩兩平行的直線組合，且每一小格都是菱形；試以 A 點為始點畫出 $2\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.13

例題 6：已知 $2(2\vec{a}+3\vec{b})-5(\vec{a}+\vec{x})+\vec{b}=\vec{0}$ ，試以 $\vec{a}$ 、$\vec{b}$ 表示 $\vec{x}$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

隨堂練習：已知 $5\vec{x}+3(\vec{a}-2\vec{b})=\vec{x}+\vec{a}$ ，試以 $\vec{a}$ 、$\vec{b}$ 表示 $\vec{x}$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

例題 7：如右圖，在△ABC 中，D 是 $\overline{AB}$ 的中點，E 是直線 AC 上的點，且 $\overline{AE}=2\overline{AC}$ ，試用 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AC}$ 表示向量 $\overrightarrow{DE}$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

隨堂練習：已知 ABCDEF 是正六邊形，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，試用$\vec{a}$與$\vec{b}$表示下列各向量：

(1) $\overrightarrow{AE}$

(2) $\overrightarrow{EC}$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.15

例題 8：已知△ABC 是邊長為 6 的正三角形，求

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 的值

(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ 的值

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.16

隨堂練習：已知向量$\vec{a}$與$\vec{b}$的夾角為 45°，且｜$\vec{a}$｜=2，｜$\vec{b}$｜=3，求$\vec{a}\cdot\vec{b}$的值

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.17

隨堂練習：右圖為五個等長的向量，試問向量$\vec{a}$與下列哪一個向量的內積最大？

(1) $\vec{a}$ (2) $\vec{b}$ (3) $\vec{c}$ (4) $\vec{d}$ (5) $\vec{e}$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.18

例題 9：已知｜$\vec{a}$｜=2，｜$\vec{b}$｜=3，且 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的夾角為 60°，求下列各值：

(1) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$

(2) ｜$3\vec{a}-2\vec{b}$｜

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.19

隨堂練習：已知｜$\vec{a}$｜=3，｜$\vec{b}$｜=4，且 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的夾角為 120°，求｜$\vec{a}-\vec{b}$｜的值

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.20

例題 10：已知向量$\vec{a}$與$\vec{b}$垂直，且｜$\vec{a}$｜=2，｜$\vec{b}$｜=4，設 k 為實數，且$k\vec{a}+\vec{b}$與$2\vec{a}-\vec{b}$互相垂直，求 k 之值。

※本題不建議使用 Maxima 解題※

隨堂練習：已知向量$\vec{a}$與$\vec{b}$的夾角為 30°，且｜$\vec{a}$｜=2，｜$\vec{b}$｜=$\sqrt{3}$，設 k 為實數，且$\vec{a}$與$k\vec{a}+2\vec{b}$互相垂直。

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.21 習題 1-1

一、基礎題：

1. O 為正方形 ABCD 對角線的交點，且 E、F、G、H 分別為線段 $\overline{OA}$、$\overline{OB}$、$\overline{OC}$、$\overline{OD}$ 的中點，試問下列何者為真？

(1) $\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OH}$ (2) $\overrightarrow{OA}=-2\overrightarrow{OG}$ (3) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}$ (4) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$

(5) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DB}$

※本大題不建議使用 Maxima 解題※

2.下圖為二組兩兩平行的直線組合，且每一小格都是菱形，$\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 表示下列各向量：

(1) $\overrightarrow{AB}$

(2) $\overrightarrow{CD}$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

3.ABCDEF 為一正六邊形，那麼下列內積向量中，何者最大？

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$

(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

(3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$

(4) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}$

(5) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.22

4. D 為 $\overline{AB}$ 的中點，$\overline{AB}:\overline{CE}=2:1$，設 $\overrightarrow{DE}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，求 x、y 的值

※本題不建議使用 Maxima 解題※

5. 已知向量$\vec{a}$與$\vec{b}$的夾角為60°，且｜$\vec{a}$｜$=1$，｜$\vec{b}$｜$=2$，設 k 為實數，求下列各值：

(1) $(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(3\vec{a}-\vec{b})$

(2) ｜$\vec{a}+2\vec{b}$｜

※本題不建議使用 Maxima 解題※

二、進階題：

6.下圖為同一平面上的三個正六邊形所連接而成，試用$\vec{a}$、$\vec{b}$表示$\overrightarrow{AB}$與$\overrightarrow{PQ}$：

※本題不建議使用 Maxima 解題※

7.已知平面向量$\vec{a}$、$\vec{b}$滿足｜$\vec{a}$｜=｜$\vec{b}$｜=1，｜$\vec{a}-\vec{b}$｜$=\sqrt{3}$

選出正確的選項：

(1) ｜$-\vec{a}$｜$= 1$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=1$

(3) $\vec{a}\cdot 2\vec{b}=2$

(4) $\vec{a}$與$\vec{b}$的夾角為60°

(5) $\vec{a}+\vec{b}$與$\vec{a}-\vec{b}$互相垂直

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.23

8.在△ABC 中，$\overline{AB}=5$、$\overline{BC}=6$、$\overline{CA}=7$，求下列各值：

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

9. 下圖為二組兩兩平行的直線組合，且每小格都是邊長為 1 的菱形。已知$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$，求$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

1-2　向量的基本應用

P.24

例題 1： 已知 D、E 分別為△ABC 兩邊 $\overline{AB}$ 、$\overline{AC}$ 的中點，試證：$\overline{DE} \mathbin{//} \overline{BC}$ 且 $\overline{DE}=\frac{1}{2}\overline{BC}$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.25

例題 2： 已知 ABCD 為一平行四邊形，試證：$\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=2(\overline{AB}^2+\overline{AD}^2)$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

隨堂練習： 在△ABC 中，$\overline{AB}=4$ 、$\overline{AC}=6$ 、$\overline{BC}=8$，D 為 $\overline{BC}$ 的中點，求中線 $\overline{AD}$ 的長度。

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.27

例題 3： 如圖所示，P 在△OAB 的 $\overline{AB}$ 邊上，且 $\overline{BP}=2\overline{AP}$ ，C 為 $\overline{OB}$ 的中點。設 $\overrightarrow{CP}=r\overrightarrow{CO}+s\overrightarrow{OP}$ ，求 r、s 的值

※本題不建議使用 Maxima 解題※

隨堂練習： 如右圖，在△OAB 中，$\overline{AP}$ ：$\overline{AB}=2：3$，$\overline{OQ}$ ：$\overline{QP}=2：1$

(1) 設 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$ ，求 x、y 的值

(2) 設 $\overrightarrow{OQ}=r\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}$ ，求 r、s 的值

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.28

例題 4：如圖：O、A、B 三點不共線，點 P 在直線 AB 上，且 $\overline{AP}=5$，$\overline{BP}=3$，設 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，求 x、y 的值

※本題不建議使用 Maxima 解題※

隨堂練習：如圖：O、A、B 三點不共線，點 P 在直線 AB 上，且 $\overline{BP}:\overline{AP}=5：3$，設 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，求 x、y 的值

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.30

例題 5：在△ABC 中，D 為 $\overline{AC}$ 邊的中點，且 $\overline{AE}:\overline{EB}=2：1$，$\overline{BD}$ 與 $\overline{CE}$ 交於 P 點，設 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，求 x、y 的值

(%i1) solve([3/2*x+y=1, x+2*y=1],[x,y]);

(%o1) [[x=$\frac{1}{2}$,y=$\frac{1}{4}$]]

＊P 點在直線 CE、BD 上，$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

隨堂練習：在△ABC 中，設二中線 $\overline{BE}$ 與 $\overline{CD}$ 的交點為 G (即 G 為重心)，且 $\overrightarrow{AG}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，求 x、y 的值

※本題不建議使用 Maxima 解題※

例題 6：已知 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 是兩個不平行的向量，且 $s(2\vec{a}+\vec{b})+t(3\vec{a}-2\vec{b})=7\vec{a}$，求實數 s、t 的值

(%i1) expand(s*(2*a+b)+t*(3*a-2*b)-7*a);

(%o1) -2bt+3at+bs+2as-7a

(%i2)collectterms(%o1,a,b);

(%o2) a(3t+2s-7)+b(s-2t)

(%i3)solve([3*t+2*s-7=0, s-2*t =0],[s,t]);

(%o3) [[s=2,t=1]]

＊$\vec{a}$ 以 a 表示；$\vec{b}$ 以 b 表示

＊先將原式 7a 移項至等號左邊再進行運算

※「expand ([算式] × [算式])」指令表示展開算式。

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

※「collectterms(方程式，變數 1，變數 2，…，變數 n)」指令表示由方程式中，提出相同變數 1、變數 2…,變數 n。此指令使用時須先將方程式展開(expand)後，才可提出變數；並且方程式中不能有等號出現，須先自行移項整理。

P.31

隨堂練習：已知 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 是兩個不平行的向量，且 $s(2\vec{a}+\vec{b})+t(\vec{a}+2\vec{b})=3\vec{a}$，求實數 s、t 的值

(%i1) expand(s*(2*a+b)+t*(a+2*b)-3*a);

(%o1) 2bt+at+bs+2as-3a

(%i2) collectterms(%o1,a,b);

(%o2) b(2t+s)+a(t+2s-3)

(%i3) solve([2*t+s=0, t+2*s-3=0],[s,t]);

(%o3) [[s=2,t=-1]]

＊先將原式 3a 移項至等號左邊再進行運算

※「expand ([算式] × [算式])」指令表示展開算式。

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

※「collectterms(方程式 ，變數 1，變數 2，… ，變數 n)」指令表示由方程式中，提出相同變數 1、變數 2…,變數 n。此指令使用時須先將方程式展開(expand)後，才可提出變數；並且方程式中不能有等號出現，須先自行移項整理。

P.32

例題 7：小明遛狗時，兩隻狗突然向前衝，假設大狗的拉力為 5 公斤重，小狗的拉力為 3 公斤重，小明至少要施多少力量才能拉住兩條狗？

(%i1) solve([5^2+2*5*3*cos(60/180*%pi)+3^2=x^2],[x]);

(%o1) [x=-7,x=7]

＊ $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=\left|-\vec{c}\right|^2$

＊ x 為小明施力大小，力道不為負值，故 x=7

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

P.33 習題 1-2

一、基礎題：

1. 已知平行四邊形兩鄰邊長為 3、5，有一對角線長為 7，求另一對角線長

(%i1) solve([7^2+x^2=2*(3^2+5^2)],[x]);

(%o1) [x=$-\sqrt{19}$,x=$\sqrt{19}$]

＊ $\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=2(\overline{AB}^2+\overline{AD}^2)$

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

2. △OAB 中，C 為 $\overline{OB}$ 中點，$\overline{AD}:\overline{BD}=2：3$，設 $\overrightarrow{OD}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，求 x、y 的值

(%i1) x=3/(2+3);

(%o1) x=$\frac{3}{5}$

(%i2) y=2/(2+3)*(1/2);

(%o2) y=$\frac{1}{5}$

＊ $\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OC}\Rightarrow\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

3. 在△ABC 中，$\overline{AD}:\overline{BD}=2:1$，設 $\overline{AE}:\overline{EC}=3:2$，$\overline{BE}$ 與 $\overline{CD}$ 交於 P 點，設 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，求 x、y 的值

(%i1) solve([3/2*x+y=1,x+5/3*y=1],[x,y]);

(%o1) [[x=$\frac{4}{9}$,y=$\frac{1}{3}$]]

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

4.已知 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 為不平行的非零向量，且 $x(2\vec{a}+\vec{b})+y(\vec{a}-2\vec{b})=5\vec{a}$，求實數 x、y 的值

(%i1) expand(x*(2*a+b)+y*(a-2*b)-5*a);

(%o1) -2by+ay+bx+2ax-5a

(%i2) collectterms(%o1,a,b);

(%o2) a(y+2x-5)+b(x-2y)

(%i3) solve([y+2*x-5=0, x-2*y=0],[x,y]);

(%o3) [[x=2,y=1]]

＊先將原式 5a 移項至等號左邊再進行運算

※「**expand ([算式] × [算式])**」指令表示展開算式。

※「**solve([變數算式], [變數])**」指令表示求解。

※「**collectterms(方程式 ，變數 1，變數 2，… ，變數 n)**」指令表示由方程式中，提出相同變數 1、變數 2…,變數 n。此指令使用時須先將方程式展開(expand)後，才可提出變數；並且方程式中不能有等號出現，須先自行移項整理。

5.設 O、A、B 三點不共線，下列選項中的 P 點何者必在直線 AB 上？

(1) $\overrightarrow{AP}+3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

(2) $\overrightarrow{OP}=\frac{2}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{5}\overrightarrow{OB}$

(3) $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$

(4) $\overrightarrow{OP}=\frac{5}{3}\overrightarrow{OA}-\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$

(5) $\overrightarrow{OP}=-\frac{7}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{OB}$

P.34

二、進階題：

6. 已知「在△ABC 中，若∠BAC 的角平分線交 $\overline{BC}$ 於 D，則 $\overline{BD}:\overline{DC}=\overline{AB}:\overline{CA}$ 」，試問：若在△ABC 中，$\overline{AB}=8$，$\overline{BC}=7$，$\overline{CA}=6$，∠BAC 的角平分線交 $\overline{BC}$ 於 D，則

(1) 設 $\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ ，求 x、y 的值

(%i1) x=6/(6+8);

(%o1) x=$\frac{3}{7}$

(%i2) y=8/(6+8);

(%o2) y=$\frac{4}{7}$

(2) 設 I 為△ABC 的內心，且 $\overrightarrow{AI}=r\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AC}$，求 r、s 的值

7.已知 G 為△ABC 的重心，求證：$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

8. 本題組將引導證明”半圓的圓周長為直角”:ABC 為半圓形上的三角形,O 為圓心，$\overline{BC}$ 為直徑，$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$、$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$

(1) 將 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AC}$ 分別用 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 表示

(2) 求 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AC}$ 的內積

(3) 證明∠BAC=90°

9. 小明欲在客廳掛上一幅 1 公斤重的畫，畫框背面有兩個位置固定的釘子 A、B，如果他想將畫對稱的掛在牆壁的掛鉤 O 上，使得∠AOB=120°，那麼應該準備可以承受多少拉力以上的掛繩才不至於斷掉？

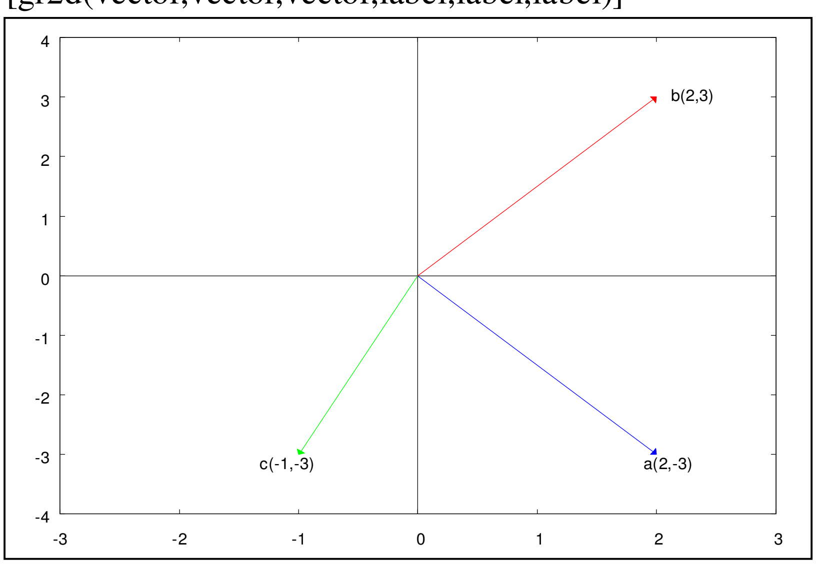
1-3 平面向量的座標表示法

P.38

例題 1：設向量$\vec{a}=(2,-3)$、$\vec{b}=(2,3)$及$\vec{c}=(-1,-3)$

(1) 在坐標平面上，以原點當始點，畫出向量$\vec{a}$、$\vec{b}$與$\vec{c}$

```
(%i1) load(draw);
(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/draw/draw.lisp
(%i2) draw2d(xrange=[-3,3],
      yrange=[-4,4],
      head_length=0.05,
      color=blue, vector([0,0],[2,-3]),
      color=red,vector([0,0],[2,3]),
      color=green, vector([0,0],[-1,-3]),
      line_type=dots,
      xaxis=true,xaxis_color=black,
      yaxis=true,yaxis_color= black,
      label(["a(2,-3)",2.1,-3.1]),
      label(["b(2,3)",2.3,3.1]),
      label(["c(-1,-3)",-1.1,-3.1]));
(%o2) [gr2d(vector,vector,vector,label,label,label)]
```



＊xrange=[-3,3], yrange=[-4,4]，表示繪製的圖形其 x 軸範圍由-3 至 3，y 軸範圍由-4 至 4 (其範圍可自行更改)。

＊head_length=0.05 ，表示繪製的箭頭尺寸為 0.05 (可自行更改)。

＊color=blue,vector([0,0],[2,-3])，表示向量線條為藍色，由(0 , 0)至(2 , -3)。

color=red,vector([0,0],[2,3])，表示向量線條為紅色，由(0 , 0)至(2 , 3)。

color=green,vector([0,0],[-1,-3])，表示向量線條為綠色，由(0 , 0)至(-1 , -3)。

＊xaxis=true,xaxis_color=black，表示顯示 x 軸，且顏色為黑色。

yaxis=true,yaxis_color= black，表示顯示 y 軸，且顏色為黑色。

＊label(["a(2,-3)",2.1,-3.1])，表示顯示 a(2,-3)，其座標為(2.1 , -3.1)。

label(["b(2,3)",2.3,3.1])，表示顯示 b(2,3)，其座標為(2.3 , 3.1)。

label(["c(-1,-3)",-1.1,-3.1])，表示顯示 c(-1,-3)，其座標為(-1.1 , -3.1)。

(2) 求$\vec{a}+3\vec{b}$及其長度

$\vec{a}+3\vec{b}$

(%i3)a:[2,-3];

(%o3) [2,-3]

(%i4)b:[2,3];

(%o4) [2,3]

(%i5)c:[-1,-3];

(%o5) [-1,-3]

(%i6)a+3*b;

(%o6) [8,6]

長度

(%i7) (8^2+6^2)^(1/2);

(%o7)10

(3) 求 $2\vec{a}-\vec{b}-2\vec{c}$ 及其長度

(%i8)2*a-b-2*c;

(%o8) [4,-3]

(%i9) (4^2+(-3)^2)^(1/2);

(%o9) 5

隨堂練習： 已知 $\vec{a}=(-1,1)$、$\vec{b}=(2,-1)$，求 $2\vec{a}-\vec{b}$ 及 $|2\vec{a}-\vec{b}|$

$2\vec{a}-\vec{b}$

(%i1)a:[-1,1];

(%o1) [-1,1]

(%i2)b:[2,-1];

(%o2) [2,-1]

(%i3) 2*a-b;

(%o3) [-4,3]

$|2\vec{a}-\vec{b}|$

(%i4) ((-4)^2+3^2)^(1/2);

(%o4)5

P.39

例題 2： 設 A (2 , 1)、B (-3 , 2)與 C (-1 , 3)為座標平面上的三點

(1) 求向量 $\overrightarrow{AC}$ 與 $\overrightarrow{BC}$

(%i1)A:[2,1];

(%o1) [2,1]

(%i2)B:[-3,2];

(%o2) [-3,2]

(%i3)C:[-1,3];

(%o3) [-1,3]

(%i4)AC=C-A;

(%o4) AC=[-3,2]

(%i5)BC=C-B;

(%o5) BC=[2,1]

(2) 已知 ABCD 為平行四邊形，求 D 點的座標

(%i6) D:[x,y];

(%o6) [x,y]

(%i7) AD=D-A;

(%o7) AD=[x-2,y-1]

(%i8)solve([x-2=2,y-1=1],[x,y]);

(%o8) [[x=4,y=2]]

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

隨堂練習：設 P (-2 , 5)及 Q 為座標平面上的兩點，已知$\vec{a}=(2,-1)$、$\vec{b}=(1,3)$，求 $\overrightarrow{PQ}=3\vec{a}-2\vec{b}$，求 Q 點座標

(%i1)a:[2,-1];

(%o1) [2,-1]

(%i2)b:[1,3];

(%o2) [1,3]

(%i3)PQ=3*a-2*b;

(%o3) PQ=[4,-9]

(%i4) solve([x-(-2)=4,y-5=-9],[x,y]);

(%o4) [[x=2,y=-4]]

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

P.41

例題 3：已知$\vec{a}=(1,2)$、$\vec{b}=(2,3)$與$\vec{c}=(3,4)$且實數 t 使得$(\vec{a}+t\vec{b})//\vec{c}$，求 t 的值

(%i1)a:[1,2];

(%o1) [1,2]

(%i2)b:[2,3];

(%o2) [2,3]

(%i3)c:[3,4];

(%o3) [3,4]

(%i4)a+t*b;

(%o4) [2*t+1,3*t+2]

(%i5) solve([(2*t+1)*4=3*(3*t+2)],[t]);

(%o5) [t=-2]

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

隨堂練習：設 A (2 , 1)、B (-2 , -1)與 C (4 , 2)為座標平面上的三點

(1) 求向量$\overrightarrow{AB}$與$\overrightarrow{BC}$

(%i1)A:[2,1];

(%o1) [2,1]

(%i2)B:[-2,-1];

(%o2) [-2,-1]

(%i3)C:[4,2];

(%o3) [4,2]

(%i4)AB=B-A;

(%o4) AB=[-4,-2]

(%i5)BC=C-B;

(%o5) BC=[6,3]

(2) A、B、C 三點是否共線？

P.42

例題 4：設 A (2 , 5)、B (-3 , 0)為座標平面上的兩點，P 點為直線 AB 上一點，且 $\overline{AP}:\overline{PB}=2:3$

(1) P 點在線段$\overline{AB}$上，求 P 點座標

(%i1)P=[(3*2+2*(-3))/(2+3), (3*5+2*0)/(2+3)];

(%o1) P=[0,3]

(2) P 點不在線段$\overline{AB}$上，求 P 點座標

＊設 P 座標為(x,y)

(%i2) A:[2,5];

(%o2) [2,5]

(%i3) A=[(1*x+2*(-3))/(2+1), (1*y+2*0)/(2+1)];

(%o3) [2,5]=[$\frac{x-6}{3}$,$\frac{y}{3}$]

(%i4) solve([(x-6)/3=2, y/3=5],[x,y]);

(%o4) [[x=12,y=15]]

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

P.43

隨堂練習： 已知 A (2 , -1)、B (-1 , 5)為座標平面上的兩點，P 點在線段 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{AP}:\overline{PB}=1:2$，求 P 點座標

(%i1) P=[(2*2+1*(-1))/(1+2), (2*(-1)+1*5)/(1+2)];

(%o1) P=[1,1]

例題 5： 設△ABC 三頂點的座標分別為 A (x_1 , y_1)、B (x_2 , y_2)、C (x_3 , y_3)，G 是△ABC 的重心，求 G 點座標

※本題不建議使用 Maxima 解題※

隨堂練習： 已知 A (3 , 2)、B (-2 , 1)與 C (5 , 6)為座標平面上的三點，求△ABC 的重心

＊設 G(重心)座標為(x,y)

(%i1) G=[(1*3+2*(((-2)+5)/2))/(1+2), (1*2+2*((1+6)/2))/(1+2)];

(%o1) G=[2,3]

P.45

例題 6： 已知 L 為通過 A (2 , 1)、B (-1 , 3)兩點的直線，求：

(1) L 的參數式

(%i1) AB=[(-1)-2,3-1];

(%o1) AB=[-3,2]

＊直線 L 通過 A (2 , 1)故，x=2-3t、y=1+2t

(2) 在 L 上找出異於 A、B 的第三個點

(%i2) [x=2-3*2,y=1+2*2];

(%o2) [x=-4,y=5]

隨堂練習：已知直線 L 的參數式為：{x=-1+at ; y=2-4t}(t 為實數)，且點 A (3 , 6)在 L 上，求 a 的值

(%i1) solve([2-4*t=6],[t]);

(%o1) [t=-1]

(%i2) solve([-1+a*(-1)=3],[a]);

(%o2) [a=-4]

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

P.46

例題 7：將直線參數式{x=2-3t ; y=2-4t}(t 為實數)，化為一般式

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.47

隨堂練習：已知直線 L：{x=3+2s ; y=-1+3t}(t 為實數)，求 L 的一般式

※本題不建議使用 Maxima 解題※

例題 8： 已知直線 L：3x-2y=5，求 L 的參數式

(%i1) solve([3*1-2*y1=5],[y1]);

(%o1) [y1=-1]

(%i2) solve([3*3-2*y2=5],[y2]);

(%o2) [y2=2]

(%i3) AB=[3-1,2-(-1)];

(%o3) AB=[2,3]

＊直線 L 通過 A (1 , -1)故，x=1+2t、y=-1+3t

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

隨堂練習： 已知兩直線 L1：x+3y+8=0；L2：{x=-2+t ; y=3-2t}(t 為實數)，求 L1 與 L2 的交點座標

(%i1) x:-2+t;

(%o1) -2+t

(%i2) y:3-2*t;

(%o2) 3-2t

(%i3) solve([x+3*y+8=0],[t]);

(%o3) [t=3]

(%i4) t:3;

(%o4) 3

(%i5) [-2+t, 3-2*t];

(%o5) [1,-3]

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

P.48 習題 1-3

一、基礎題：

1. 已知 A 點的座標為(1 , 2)，且 $\overrightarrow{AB}=(-3,4)$，求 B 點座標及｜$\overrightarrow{AB}$｜

B 點座標

(%i1) solve([x-1=-3,y-2=4],[x,y]);

(%o1) [[x=-2,y=6]]

｜$\overrightarrow{AB}$｜

(%i2) ((-3)^2+4^2)^(1/2);

(%o2) 5

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

2. 已知 $\vec{a}=(-2,1)$、$\vec{b}=(1,2)$，求 $\vec{a}-2\vec{b}$ 及｜$\vec{a}-2\vec{b}$｜

$\vec{a}-2\vec{b}$

(%i1) a:[-2,1];

(%o1) [-2,1]

(%i2) b:[1,2];

(%o2) [1,2]

(%i3) a-2*b;

(%o3) [-4,-3]

｜$\vec{a}-2\vec{b}$｜

(%i4) ((-4)^2+(-3)^2)^(1/2);

(%o4) 5

3. 設 $\vec{a}=(3,2)$ 、 $\vec{b}=(2,x)$ ，且 $\vec{a}$ 平行 $\vec{b}$ ，求 x 之值

(%i1) solve([3*x=2*2],[x]);
(%o1) [x=$\frac{4}{3}$]

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

4. 已知 A (-6 , 3)、B (4 , -7)為座標平面上的兩點，P 點在直線 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{AP}:\overline{PB}=3:2$ ，求 P 點座標

(%i1) P=[(2*(-6)+3*(4))/(3+2), (2*3+3*(-7))/(3+2)];

(%o1) P=[0,-3]

5. 已知 $\vec{a}=(1,1)$ 、 $\vec{b}=(-1,3)$ 、 $\vec{c}=(-1,7)$ ，設 $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$ ，求 x、y 的值

(%i1) solve([1*x+y*(-1)=-1,1*x+y*3=7],[x,y]);

(%o1) [[x=1,y=2]]

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

6. 設 A (a , 1)、B (3 , b)、C (7 , 3)與 D (5 , -1)為座標平面上的四點，若 ABCD 為平行四邊形，a+b 的值為何？

$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$

(%i1) solve([3-a=7-5,b-1=3-(-1)],[a,b]);

(%o1) [[a=1,b=5]]

(%i2) 1+5;

(%o2) 6

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

7. 關於直線 L：{x=1+2t ; y=4-3t} (t 為實數)；下列何者正確？

(1) L 的方向向量為(2 , -3)

(2) L 通過點(7 , -5)

(3) L 的斜率為 $\frac{3}{2}$

(4) L 的方程式為 3x+2y-11=0

(5)L 與直線 L’：{ x=3+2t ; y=1-3t }(t 為實數)，是同一直線

P.49

二、進階題：

8. 求已知兩直線 L1：{x=3+2t ; y=2-t}(t 為實數) ； L2：{x=3+s ; y=1-s}(s 為實數)，的交點

```
(%i1) solve([3+2*t =3+s, 2-t =1-s],[s,t]);
(%o1) [[s=-2,t=-1]]
(%i2) s:-2;
(%o2) -2
(%i3) t:-1;
(%o3) -1
(%i4) [3+2*t,2-t];
(%o4) [1,3]
(%i5) [3+s,1-s];
(%o5) [1,3]
```

＊兩直線 L1、L2 的交點為[1,3]

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

9.在梯形 ABCD 中，A (4 , 5)、B (1 , 1)、C (-1 , 4)，$\overline{AB}//\overline{CD}$ ，$\overline{CD}=2$，求 D 點的座標

設 P 點(x1,y1)為梯形 ABCD 中兩對角線之交點，D 點座標(x2,y2)；

(%i1) AB=sqrt((4-1)^2+(5-1)^2);

(%o1) AB=5

因 $\overline{AB}//\overline{CD}$ ，又 $\overline{AB}=5$ ，故 $\overline{AP}:\overline{CP}=\overline{BP}:\overline{DP}=5:2$

(%i2) P=[(2*4+5*(-1))/7, (5*4+2*5)/7];

(%o2) P=[$\frac{3}{7}$,$\frac{30}{7}$]

(%i3) D=[solve([(5*x2+2)/7=3/7],[x2]), solve([(5*y2+2)/7=30/7],[y2])];

(%o3) D=[[x2=$\frac{1}{5}$],[y2=$\frac{28}{5}$]]

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

10.已知 $\vec{a}=(2,6)$、$\vec{b}=(1,1)$，求使得｜$\vec{a}+t\vec{b}$｜有最小值的實數 t，又最小值為何？

1-4 平面向量的內積

P.51

例題 1： 已知 $\vec{a}=(7,1)$ 、 $\vec{b}=(3,4)$ 求

(1) 求 $\vec{a}\cdot\vec{b}$

(%i1) a:[7,1];

(%o1) [7,1]

(%i2) b:[3,4];

(%o2) [3,4]

(%i3) a.b;

(%o3) 25

(2) $\vec{a}$ 及與 $\vec{b}$ 的夾角

$|\vec{a}|$

(%i4) (a.a)^(1/2);

(%o4) $5\sqrt{2}$

(%i5) (b.b)^(1/2);

(%o5) 5

(%i6) solve([cos(x/180*%pi)=(a.b)/(((a.a)^(1/2))*((b.b)^(1/2)))],[x]);

solve: using arc-trig functions to get a solution.

Some solutions will be lost.

(%o6) [x=45]

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

隨堂練習：在△ABC 中，三頂點座標為 A (-2 , 3)、B (2 , -2)、C (3 , 7)，求

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

(%i1) A:[-2,3];

(%o1) [-2,3]

(%i2) B:[2,-2];

(%o2) [2,-2]

(%i3) C:[3,7];

(%o3) [3,7]

(%i4) (B-A).(C-A);

(%o4) 0

(2) ∠BAC 的度數

(%i4) solve([cos(x/180*%pi)=((B-A).(C-A))/((((B-A).(B-A))^(1/2))*((C-A).(C-A))^(1/2))],[x]);

solve: using arc-trig functions to get a solution.

Some solutions will be lost.

(%o4) [x=90]

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

P.52

例題 2：設 k 為實數，$\vec{a}=(1,-3)$ 、$\vec{b}=(2,-1)$ ，若 $(\vec{a}+k\vec{b})\perp\vec{b}$ ，則 k 的值為何？

(%i1) a:[1,-3];

(%o1) [1,-3]

(%i2) b:[2,-1];

(%o2) [2,-1]

(%i3) a+k*b;

(%o3) [2*k+1,-k-3]

(%i4) solve([(a+k*b).b=0],[k]);

(%o4) [k=-1]

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

P.53

隨堂練習：已知直線 L：2x+3y-5=0，試問下列哪些向量可為 L 的法向量？

(1) $\overrightarrow{n_1}=(-3,2)$

(2) $\overrightarrow{n_2}=(2,3)$

(3) $\overrightarrow{n_3}=(-2,-3)$

(4) $\overrightarrow{n_4}=(4,6)$

(5) $\overrightarrow{n_5}=(3,-2)$

P.54

例題 3：求兩直線 L_1：3x+y-3=0 與 L_2：2x-y+1=0 的交角

設直線 L_1 的法向量為 n1=(3 , 1)；直線 L_2 的法向量為 n2=(2 , -1)

(%i1) n1:[3,1];

(%o1) [3,1]

(%i2) n2:[2,-1];

(%o2) [2,-1]

(%i3) radcan(solve([cos(x/180*%pi)=(n1.n2)/(((n1).(n1))^(1/2)).(((n2).(n2))^(1/2))],[x]));

solve: using arc-trig functions to get a solution.

Some solutions will be lost.

(%o3) [x=45]

(%i4) 180-45;

(%o4) 135

＊ L_1與L_2有一交角 x 為 45°，另一交角為 135°

※「radcan ([算式] × [算式])」指令表示化簡算式。

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

隨堂練習：已知 L_1：$\sqrt{3}x-y+1=0$ 與 L_2：$x-\sqrt{3}y+2=0$ 的交角

設直線 L_1 的法向量為 n1=($\sqrt{3}$, -1)；直線 L_2 的法向量為 n2=(1 , $-\sqrt{3}$)

(%i1) n1:[sqrt(3),-1];

(%o1) [$\sqrt{3}$,1]

(%i2) n2:[1, -sqrt(3)];

(%o2) [1,$-\sqrt{3}$]

(%i3) radcan(solve([cos(x/180*%pi)=(n1.n2)/(((n1).(n1))^(1/2)).(((n2).(n2))^(1/2))],[x]));

solve: using arc-trig functions to get a solution.

Some solutions will be lost.

(%o3) [x=30]

(%i4) 180-30;

(%o4) 150

＊ L_1與L_2有一交角 x 為 30°，另一交角為 150°

※「radcan ([算式] × [算式])」指令表示化簡算式。

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

P.56

例題 4： 求點 P (3 , 1)到直線 L：3x-4y+5=0 的距離

(%i1) d=abs(3*3-4*1+5)/(3^2+(-4)^2)^(1/2);

(%o1) d=2

※「abs(數值)」指令表示絕對值。

隨堂練習： 求點 P (-1 , 2)到直線 L：12x-5y-4=0 的距離

(%i1) d=abs(12*(-1)-5*2-4)/(12^2+(-5)^2)^(1/2);

(%o1) d=2

※「abs(數值)」指令表示絕對值。

P.57

例題 5： 求兩平行直線 L_1：3x+4y+2=0 與 L_2：6x+8y+7=0 的距離

(%i1) expand((3*x+4*y+2=0)*2);

(%o1) 8y+6x+4=0

(%i2) d=abs(4-7)/(6^2+8^2)^(1/2);

(%o2) $d=\frac{3}{10}$

※「expand ([算式] × [算式])」指令表示展開算式。

※「abs(數值)」指令表示絕對值。

隨堂練習： 求兩平行直線 L_1：x-2y+3=0 與 L_2： x-2y-2=0 的距離

(%i1) d=abs(3-(-2))/(1^2+(-2)^2)^(1/2);

(%o1) $d=\sqrt{5}$

※「abs(數值)」指令表示絕對值。

例題 6： 已知兩直線 L_1：2x-y+1=0 與 L_2：x-2y+5=0，求兩直線的交角平分線方程式

(%i1) abs(2*x-y+1)/(2^2+(-1)^2)^(1/2) = abs(x-2*y+5)/(1^2+(-2)^2)^(1/2);

(%o1) $\frac{|y-2x-1|}{\sqrt{5}}=\frac{|2y-x-5|}{\sqrt{5}}$

＊上式可知 y-2x-1=2y-x-5 或 y-2x-1=-2y+x+5，整理後可得兩直線的交角平分線方程式為 x+y-4=0 或 x-y+2=0

※「abs(數值)」指令表示絕對值。

P.58

隨堂練習： 求兩直線 L_1：3x+4y-7=0 與 L_2：4x+3y+2=0，的交角平分線方程式

(%i1) abs(3*x+4*y-7)/(3^2+4^2)^(1/2) = abs(4*x+3*y+2)/(4^2+3^2)^(1/2);

(%o1) $\frac{|4y+3x-7|}{5}=\frac{|3y+4x+2|}{5}$

＊上式可知 4y+3x-7=3y+4x+2 或 4y+3x-7=-3y-4x-2，整理後可得兩直線的交角平分線方程式為 x-y+9=0 或 7x+7y-5=0

※「abs(數值)」指令表示絕對值。

P.59

例題 7： 設實數 x、y 滿足 3x+y=24，求 $9x^2+y^2$ 的最小值，並求當 $9x^2+y^2$ 有最小值時，x 與 y 的值

P.60

隨堂練習： 設實數 x、y 滿足 4x-3y=50，求 x^2+y^2 的最小值，並求當 x^2+y^2 最小值，x 與 y 值

例題 8： 設實數 x、y 滿足 $4x^2+9y^2=25$，求 8x-9y 的最大值與最小值，並分別求當 8x-9y

有最大值與最小值時，x 與 y 值

隨堂練習：設實數 x、y 滿足 $x^2+4y^2=8$，求 x-2y 的最大值與最小值，並分別求當 x-2y 有最大值與最小值時，x 與 y 值

例題 9：已知 $\vec{a}=(7,4)$ 、$\vec{b}=(1,2)$ ，求 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的正射影及正射影的長

(%i1) a:[7,4];

(%o1) [7,4]

(%i2) b:[1, 2];

(%o2) [1,2]

(%i3) c:(a.b/b.b)*b;

(%o3) [3,6]

(%i4) (c.c)^(1/2);

(%o4) $3\sqrt{5}$

隨堂練習：已知 $\vec{a}=(1,-2)$ 、$\vec{b}=(-4,3)$ ，求 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的正射影及正射影的長

(%i1) a:[1,-2];

(%o1) [1,-2]

(%i2) b:[-4, 3];

(%o2) [-4,3]

(%i3) c:(a.b/b.b)*b;

(%o3) $[\frac{8}{5},-\frac{6}{5}]$

(%i4) (c.c)^(1/2);

(%o4) 2

P.63 **習題 1-4**

一、基礎題：

1. 已知 A、B、C 的座標分別為 A (-2 , 2)、B (-1 , 4)、C (7 , 5)，求

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

(%i1) A:[-2,2];

(%o1) [-2,2]

(%i2) B:[-1,4];

(%o2) [-1,4]

(%i3) C:[7,5];

(%o3) [7,5]

(%i4) (B-A).(C-A);

(%o4) 15

(2) ∠BAC 的度數

(%i4) radcan(solve([cos(x/180*%pi)=((B-A).(C-A))/((((B-A).(B-A))^(1/2))*((C-A).(C-A))^(1/2))],[x]));

solve: using arc-trig functions to get a solution.

Some solutions will be lost.

(%o4) [x=45]

※「radcan ([算式] × [算式])」指令表示化簡算式。

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

2. 設 t 為實數，$\vec{a}=(3,1)$、$\vec{b}=(1,2)$，若 $(\vec{a}+t\vec{b})\perp\vec{b}$，則 t 的值為何？

(%i1) a:[3,1];

(%o1) [3,1]

(%i2) b:[1,2];

(%o2) [1,2]

(%i3) a+t*b;

(%o3) [t+3,2t+1]

(%i4) solve([(a+t*b).b=0],[t]);

(%o4) [t=-1]

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

3. 求下列各小題中直線 L1 與 L2 的交角：

(1) L_1：x+2y-2=0 ， L_2：x-3y+5=0

(%i1) n1:[1,2];

(%o1) [1,2]

(%i2) n2:[1, -3];

(%o2) [1,-3]

(%i3) radcan(solve([cos(x/180*%pi)=(n1.n2)/((((n1).(n1))^(1/2)).(((n2).(n2))^(1/2)))],[x]));

solve: using arc-trig functions to get a solution.

Some solutions will be lost.

(%o3) [x=135]

(%i4) 180-135;

(%o4) 45

＊ L_1與L_2有一交角 x 為 135°，另一交角為 45°

(2) L_1：$\sqrt{3}x-y+1=0$ ， L_2：x=2

(%i1) n1:[sqrt(3),-1];

(%o1) [$\sqrt{3}$,-1]

(%i2) n2:[2, 0];

(%o2) [2, 0];

(%i3) radcan(solve([cos(x/180*%pi)=(n1.n2)/(((n1).(n1))^(1/2)).(((n2).(n2))^(1/2))],[x]));

solve: using arc-trig functions to get a solution.

Some solutions will be lost.

(%o3) [x=30]

(%i4) 180-30;

(%o4) 150

＊ L_1與L_2有一交角 x 為 30°，另一交角為 150°

※「radcan ([算式] × [算式])」指令表示化簡算式。

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

4. 求下列各小題中直線L_1與L_2的距離：

(1) L_1：2x-y=2 ， L_2：2x-y=-3

(%i1) d=abs(3-(-2))/(2^2+(-1)^2)^(1/2);

(%o1) d=$\sqrt{5}$

(2) L_1：3x+4y+1=0 ， L_2：6x+8-3=0

(%i1) expand((3*x+4*y+1=0)*2);

(%o1) 8y+6x+2=0

(%i2) d=abs(2-(-3))/(8^2+6^2)^(1/2);

(%o2) d=$\frac{1}{2}$

※「abs(數值)」指令表示絕對值。

※「expand ([算式] × [算式])」指令表示展開算式。

5. 已知 x、y 為實數，且 $x^2+y^2=9$，求 3x-4y+5 的最大值與最小值

6. 設 P 為 x 軸上的一點，且 P 點到直線 3x-4y-6=0 的距離為 3，求 P 點的座標

```
(%i1) solve([abs(3*x-4*0-6)/(3^2+(-4)^2)^(1/2)=3],[x]);
(%o1) [abs(3*x-6)=15]
(%i2) load (fourier_elim);
(%o2) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier_elim/fourier_elim.lisp
(%i3) fourier_elim([abs(3*x-6)=15],[x]);
(%o3) [x=7] or [x=-3]
```

*P 點座標為(7 , 0)或(-3 , 0)

※「abs(數值)」指令表示絕對值。

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

※「expand ([算式] × [算式])」指令表示展開算式。

※「load (fourier_elim)」指令可執行不等式計算，須先載入。

※「fourier_elim([變數算式], [變數])([變數算式], [變數])」求解不等式。

7.已知平面兩非零向量 $\vec{a}=(x_1, y_1)$ 與 $\vec{b}=(x_2, y_2)$，且 $|\vec{a}||\vec{b}|=|\vec{a}\cdot\vec{b}|$，選出正確選項：

(1) $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 方向相同

(2) $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 平行

(3) 沒有實數 t 滿足 $\vec{a}+t\vec{b}=\vec{0}$

(4) $x_1x_2+y_1y_2=0$

(5) $x_1y_2-x_2y_1=0$

P.64

二、進階題：

8. 設 x 為實數，$\vec{a}=(x,4)$、$\vec{b}=(1,2)$，若$\vec{a}$在$\vec{b}$上的正射影為(-2 , -4)，則 x 的值為何？

(%i1) a:[x,4];

(%o1) [x,4]

(%i2) b:[1, 2];

(%o2) [1,2]

(%i3) c:[-2, -4];

(%o3) [-2,-4]

(%i4) solve([(a.b/b.b)*b=c],[x]);

(%o4) $[[\frac{(x+18)}{5},\frac{(x+18)}{5}]=0]$

(%i5) solve([(x+18)/5=0],[x]);

(%o5) [x=-18]

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

9. 求兩直線 L_1：x+2y-4=0 與 L_2：2x-y+3=0，的交角平分線方程式

已知兩直線 L_1：2x-y+1=0 與 L_2：x-2y+5=0，求兩直線的交角平分線方程式

(%i1) abs(x+2*y-4)/((1^2+2^2)^(1/2)) = abs(2*x-y+3)/((2^2+(-1)^2)^(1/2));

(%o1) $\frac{|2y+x-4|}{\sqrt{5}}=\frac{|y-2x-3|}{\sqrt{5}}$

＊上式可知 2y+x-4=y-2x-3 或 y-2x-1=-y+2x+3，整理後可得兩直線的交角平分線方程式為 3x+y-1=0 或 4x-2y+4=0

※「abs(數值)」指令表示絕對值。

10. 已知一正方形的中心為 P (1 , 1)，他一邊所在直線的方程式為 x+2y+2=0

(1) 求此正方形的面積

正方形一邊所在直線的方程式為 x+2y+2=0，另一邊直線方程式設為 x+2y+k=0，兩對邊 A 與 C 之參數式分別為 A { x=-2-2t ; y=t }、C { x=-k-2s ; y=s }

(%i1) solve([(-2-2*t-k-2*s)/2=1],[k]);

(%o1) [k=-2t-2s-4]

(%i2) t:2*1-s;

(%o2) 2-s

(%i3) expand(k=-2*t-2*s-4);

(%o3) k=-8

兩平行線之距離為正方形之邊長，平行線方程式分別為 x+2y+2=0、x+2y-8=0

(%i4) abs(2-(-8))/sqrt(1^2+2^2);

(%o4) $2\sqrt{5}$

(%i5) 2*sqrt(5)*2*sqrt(5);

(%o5) 20

＊正方形面積為 20

※「abs(數值)」指令表示絕對值。

(2) 求此正方形的兩對角線所在直線之方程式

設 x+2y-8=0 通過 C 點，其座標為(z , $-\frac{z-8}{2}$)，因正方形邊長為 $2\sqrt{5}$ ，故中心點至 P (1 , 1)長度為 $\sqrt{10}$

(%i4) x:z;

(%o4) z

(%i5) solve([x+2*y-8=0],[y]);

(%o5) [y=$-\frac{z-8}{2}$]

(%i6) rootscontract((2*sqrt(5))/sqrt(2));

(%o6) $\sqrt{10}$

(%i7) solve([sqrt((1-z)^2+(1-(-(z-8)/2))^2)=sqrt(10)],[z]);

(%o7) [z=0,z=4]

(%i8) z:0

(%o8) 0

(%i9) [z , -(z-8)/2];

(%o9) [0,4]

(%i10) z:4

(%o10) 4

(%i11) [z , -(z-8)/2];

(%o11) [4,2]

將點 P (1 , 1)與 C(0 , 4)帶入直線方程式 ax+by=c

(%i12) solve([a+b=4*b],[a]);

(%o12) [a=3b]

計算結果為 a:b=3:1，直線方程式為 3x+y=c

(%i13) solve([3*1+1=c,3*0+4=c],[c]);

solve: dependent equations eliminated: (2)

(%o13) [[c=4]]

將點 P (1 , 1)與 C(4 , 2)帶入直線方程式 ax+by=c

(%i14) solve([a+b=4*a+2*b],[a]);

(%o14) [a=$\frac{-b}{3}$]

計算結果為 a:b=1:-3，直線方程式為 x-3y=c

```
(%i15) solve([1-3*1=c,4-3*2=c],[c]);
solve: dependent equations eliminated: (2)
(%o15) [[c=-2]]
```

＊兩對角線方程式為 3x+y=4 與 x-3y=-2

11. 大明在一半徑為一公里的半圓形游泳池游泳,他先由池畔的 A 點沿直線採自由式游到湖邊的某點 C，在沿直線採蛙式游到 B 點，如右圖所示，其中 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 為湖的直徑,已知大明游自由式速度為每小時 2 公里,游蛙式速度為每小時 1.5 公里，請問大明運動時間最長為多少小時？

P.65

第一章　綜合練習

一、概念題

1.如圖：哪一選項中的向量與另兩個向量$\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{QO}$的和等於零向量？

(1) $\overrightarrow{AO}$

(2) $\overrightarrow{BO}$

(3) $\overrightarrow{CO}$

(4) $\overrightarrow{DO}$

(5) $\overrightarrow{EO}$

2. 已知 A (-2 , 6)、B (-5 , 2)、C (-1 , -1)與 D (2 , 3)為座標平面上四點，選出正確選項

```
(%i1) A:[-2,6];
(%o1) [-2,6]
(%i2) B:[-5, 2];
(%o2) [-5,2]
(%i3) C:[-1, -1];
(%o3) [-1,-1]
(%i4) D:[2, 3];
(%o4) [2,3]
```

(1) $\overrightarrow{AB}$與$\overrightarrow{BC}$互相垂直

```
(%i5) if (B-A).(B-C)=cos(90/180*%pi) then answer=yes else answer=no;
(%o5) answer=yes
```

(2) $\overrightarrow{AB}$與$\overrightarrow{CD}$互相垂直

(%i6) if (B-A).(C-D)=cos(90/180*%pi) then answer=yes else answer=no;

(%o6) answer=no

(3) $\overrightarrow{AC}$與$\overrightarrow{BD}$互相垂直

(%i7) if (A-C).(D-B)=cos(90/180*%pi) then answer=yes else answer=no;

(%o7) answer=yes

(4) $\overrightarrow{AC}$與$\overrightarrow{AD}$互相垂直

(%i8) if (C-A).(D-A)=cos(90/180*%pi) then answer=yes else answer=no;

(%o8) answer=no

(5) $\overrightarrow{AD}$與$\overrightarrow{CD}$互相垂直

(%i9) if (D-A).(D-C)=cos(90/180*%pi) then answer=yes else answer=no;

(%o9) answer=yes

＊上述判別式 if (B-A).(B-C)=cos(90/180*%pi) then answer=yes else answer=no，判別式表示如果等號成立，其結果顯示 answer=yes，否則(等號不成立)，結果顯示 answer=no

3.如圖，△ABC 中，$\overline{AD}$是$\overline{BC}$的高，∠B=30°，∠C=40°，下列向量的內積何者為負？

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$

(3) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}$

(4) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}$

(5) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BA}$

P.66

二、程序題

4.已知非零向量$\vec{a}$與$\vec{b}$滿足$|\vec{a}|=2|\vec{b}|$，且$\vec{a}+\vec{b}$與$2\vec{a}-5\vec{b}$垂直，求$\vec{a}$與$\vec{b}$的夾角

5.設兩直線 L_1：{ x=3+7t ; y=2-t }(t 為實數)與 L_2：{ x=3+s ; y=1-s }(s 為實數)的交角 θ，求 cosθ 的值

6.在平行四邊形 ABCD 中，E、F 分別為$\overline{CD}$是$\overline{BE}$的中點，如下圖所示：設 $\overrightarrow{AF}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$，求 x、y 的值

7.已知 A (a , 1)、B (3 , 5)、C (b , 3)與 D (5 , c)為座標平面上四點，若 ABCD 為菱形，則 a、b、c 的值為何？

(%i1) A:[a,1];

(%o1) [a,1]

(%i2) B:[3, 5];

(%o2) [3,5]

(%i3) C:[b, 3];

(%o3) [b,3]

(%i4) D:[5, c];

(%o4) [5,c]

(%i5) solve([(1+3)/2=(5+c)/2],[c]);

(%o5) [c=-1]

菱形四邊長相等，求出線段長等號兩邊各取平方

(%i6) solve([(a-3)^2+(1-5)^2=(a-5)^2+(1-(-1))^2],[a]);

(%o6) [a=1]

(%i7) solve([(b-3)^2+(3-5)^2=(b-5)^2+(3-(-1))^2],[b]);

(%o7) [b=7]

＊ A(1 , 1)、C (7 , 3)、D (5 , -1)

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

三、數學解題

8.設△ABC 為平面上的一個三角形，P 為平面上一點且 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ ，其中 t 為一實數，求 t 的最大範圍，使得 P 落在△ABC 的底部

9.求兩直線 L_1：3x+4y-10=0 與 L_2：4x+3y-11=0 的鈍角平分線方程式

P.67

10. 為提醒大眾車站附近某自動販賣機經常咬錢，有人發想在機上貼一個小圓與一個缺六分之一圓的大圓相切的圖案，如右圖所示，基於空間考量，圖形的寬度要為 24 單位長，且小圓必須與直線 PQ 有兩相異交點，大圓著色成本每平方單位須要 6 圓，小圓著色成本每單位則須要 45 圓，設小圓半徑為 x，大圓半徑為 y：

(1)已知 x、y 滿足 ax+by=24，求常數 a、b 的值

(2)求著色總費用(以 x、y 表示)

(3)當 x、y 為何，著色費用最低

第二章　空間向量

2-1　空間概念

P.71

例題 1：ABCDEFGH 為一長方體 8 點，下列哪些選項式正確的？

(1) 直線 AE 與直線 AB 交於一點

(2) 直線 AE 與直線 DH 平行

(3) 直線 AE 與直線 CG 歪斜

(4) 直線 AE 與直線 FG 歪斜

(5) 直線 AE 與直線 FH 歪斜

P.72

隨堂練習：ABCDE 為一個立體圖形，ABCD 為一正方形，其餘四個三角形均為正三角形，下列哪些選項是正確的？

(1) 直線 AD 與直線 AB 交於一點

(2) 直線 AD 與直線 BC 平行

(3) 直線 AD 與直線 CE 歪斜

(4) 直線 AE 與直線 BC 歪斜

(5) 直線 AE 與直線 DC 歪斜

P.76

例題 2：邊長為 2 的正四面體 ABCD，從頂點 A 對底面 BCD 做垂直線 AQ 交底面於 Q 點，我們稱線段 $\overline{AQ}$ 為四面體的高，求高 $\overline{AQ}$

(%i1) AQ=(2^2-(2/3*sqrt(3))^2)^(1/2);

(%o1) $\frac{2^{3/2}}{\sqrt{3}}$

＊ Q 為三角形 BCD 的外心，為 $\overline{BQ}=\frac{2}{3}\times\sqrt{3}$ ($\frac{2}{3}\times$中線長)

P.79

例題 3： 一個邊長為 2 的正四面體 ABCD，此四面體任意兩面的夾角為 θ，求 $\cos\theta$

(%i1) cosx=((sqrt(3))^2+(sqrt(3))^2-(2)^2)/(2*sqrt(3)*sqrt(3));

(%o1) $\cos x=\frac{1}{3}$

隨堂練習： 一個每邊長均為 2 的立體圖形，其中 ABCD 為正方形，其餘四個三角形三角形均為正三角形，設底面 ABCD 與側面 ABE 所夾的兩面角 θ，求 $\cos\theta$

(%i1) cosx=(2^2+(sqrt(3))^2-(sqrt(3))^2)/(2*2*sqrt(3));

(%o1) $\cos x=\frac{1}{\sqrt{3}}$

P.81

例題 4： 阿明在 8 公尺高的塔頂上俯瞰成直線狀的小溪流，已知塔底中心到小溪的最近點 R 是 15 公尺，試問塔頂至溪流的最短距離為何？

(%i1) sqrt(8^2+15^2);

(%o1) 17

隨堂練習： 已知 ACBD 為一邊長 12 公尺的正方形，點 Q 為正方形的中心，且在 Q 點有一棵樹垂直於平面 ABCD，若現在由正方形的四邊線分別與樹上離地面 8 公尺處的 P 點各拉 1 條等長的繩子來支撐樹，則 4 條繩子應如何拉設，才能使繩子的長度最短？

P.82 習題 2-1

一、基礎題：

1.右圖是一個立體圖形，其中 ABCD 為一正方形，試問下列哪些直線與直線 AD 歪斜？

(1) 直線 CD

(2) 直線 BC

(3) 直線 CF

(4) 直線 FA

(5) 直線 FB

2.下列有關空間的敘述，哪些是正確的？

(1) 不相交的兩直線 L_1 與 L_2 必然平行

(2) 若直線 L_1 落在平面 E 上，且直線 L_2 與 E 平行，則 L_1 與 L_2 平行

(3) 若兩相異直線 L_1 與 L_2 均與平面 E 垂直，則 L_1 與 L_2 必然平行

(4) 若兩相異直線 L_1 與 L_2 均與直線 L 垂直，則 L_1 與 L_2 必然平行

3.下列有關空間的敘述，哪些是正確的？

(1) 若直線與平面的交點超過一個，則整條直線均落在平面上

(2) 過已知平面外一點，恰有一條直線與此平面平行

(3) 過已知平面外一點，恰有一條直線與此平面垂直

(4) 若兩相異平面均與一已知值線垂直，則此二平面必然平行

4.ABCDEFGH 為一長方體，其中 $\overline{AB}=12$ 、 $\overline{BC}=4$ 、 $\overline{CG}=3$ ，求 $\overline{AG}$ 的長

(%i1) AC=sqrt(12^2+4^2);

(%o1) $AC=4\sqrt{10}$

(%i2) AG=sqrt((4*sqrt(10))^2+3^2);

(%o2) AG=13

P.83

二、進階題：

5. 右圖為一個邊長為$\sqrt{2}$的正立方體(每一面都是正方形)，設 O 為的中點，求$\overline{CO}$長

(%i1) FH=sqrt(sqrt(2)^2+ sqrt(2)^2);

(%o1) FH=2

(%i2) OC=sqrt(sqrt(2)^2+(2/2)^2);

(%o2) $OC=\sqrt{3}$

6. 右圖為一個邊長均為 2 的立體圖形，其中 ABCD 為一正方形，其餘四個三角形均為正三角形

(1)從頂點 E 對底面 ABCD 做垂直線 EQ 交底面於 Q 點，求高$\overline{EQ}$的長

(%i1) CA=sqrt(2^2+2^2);

(%o1) $CA=2^{3/2}$

(%i2) EQ=sqrt(2^2-(2*sqrt(2)/2)^2);

(%o2) $EQ=\sqrt{2}$

(2)設側面 ABE 與側面 ADE 的兩面角為θ，求$\cos\theta$

2-2　空間概念

P.85

例題 1：右圖是座標空間中的一個長方體，求 D、E、F、G 各點的座標

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.86

隨堂練習：右圖是座標空間中的一個長方體，求 D、E、F、G 各點的座標

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.87

例題 2：已知 P (1 , 2 , 3)、Q (5 , -3 , -17)為座標空間中兩點，求 $\overline{PQ}$

(%i1) PQ=sqrt((5-1)^2+((-3)-2)^2+((-17)-3)^2);

(%o1) PQ=21

隨堂練習：已知 P (-2 , 2 , -3)、Q (1 , -2 , 9)為座標空間中兩點，求 $\overline{PQ}$

(%i1) PQ=sqrt((1-(-2))^2+((-2)-2)^2+(9-(-3))^2);

(%o1) PQ=13

P.88

例題 3：已知 A (2 , 3 , 6)、B (-1 , 5 , 0)、C (4 , -3 , 3)為座標空間中三點，證明△ABC 為等腰直角三角形

(%i1) AB:sqrt(((-1)-2)^2+(5-3)^2+(0-6)^2);

(%o1) 7

(%i2) BC:sqrt((4-(-1))^2+((-3)-5)^2+(3-0)^2);

(%o2) $7\sqrt{2}$

(%i3) AC:sqrt((4-2)^2+((-3)-3)^2+(3-6)^2);

(%o3) 7

(%i4) if sqrt(AB^2+AC^2)= sqrt(BC^2) then answer=yes else answer=no;

(%o4) answer=yes

＊$\overline{AB}=\overline{AC}$邊長相等，且符合畢氏定理$\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2}=\sqrt{\overline{BC}^2}$為直角三角形，故本題為等腰直角三角形。

＊上述判別式 if sqrt(AB^2+AC^2)= sqrt(BC^2) then answer=yes else answer=no，判別式表示如果等號成立，其結果顯示 answer=yes，否則(等號不成立)，結果顯示 answer=no

隨堂練習：已知 A (1 , -1 , 6)、B (2 , 3 , 2)、C (3 , -4 , 0)為座標空間中三點，求△ABC 的最大邊長

(%i1) AB:sqrt((2-1)^2+(3-(-1))^2+(2-6)^2);

(%o1) $\sqrt{33}$

(%i2) BC:sqrt((3-2)^2+((-4)-3)^2+(0-2)^2);

(%o2) $3\sqrt{6}$

(%i3) AC:sqrt((3-1)^2+((-4)-(-1))^2+(0-6)^2);

(%o3) 7

(%i4) compare (AB,BC);

(%o4) <

(%i5) compare (AB,AC);

(%o5) <

(%i6) compare (BC,AC);

(%o6) >

＊BC > AC > AB

※「compare (A 變數,B 變數)」指令表示比較 A 變數、B 變數兩數值大小關係。

P.89 **習題 2-2**

一、基礎題：

1.ABCDEFGH 是空間座標中的一個長方體，其長、寬、高分別為 5、2、3

(1)寫出個頂點座標

(2)求出 $\overline{BG}$ 及 $\overline{AG}$ 的長

※本題不建議使用 Maxima 解題※

2. 已知 A (3 , 4 , 3)、B (6 , 5 , 5)、C (5 , 7 , 2)為座標空間中三點，證明△ABC 為正三角形

(%i1) AB=sqrt((6-3)^2+(5-4)^2+(5-3)^2);

(%o1) $AB=\sqrt{14}$

(%i2) BC=sqrt((5-6)^2+(7-5)^2+(2-5)^2);

(%o2) $BC=\sqrt{14}$

(%i3) AC=sqrt((5-3)^2+(7-4)^2+(2-3)^2);

(%o3) $AC=\sqrt{14}$

3. 已知 A (4 , 1 , -3)、B (-2 , 3 , 1)為座標空間中二點，P 為 x 軸上一點，且 $\overline{AP}=\overline{BP}$，求 P 點座標

(%i1) solve([sqrt((4-x)^2+(1-0)^2+((-3)-0)^2)=sqrt(((-2)-x)^2+(3-0)^2+(1-0)^2)],[x]);

(%o1) $\sqrt{x^2-8x+26}=\sqrt{x^2+4x+14}$

(%i2) solve([x^2-8*x+26=x^2+4*x+14],[x]);

(%o2) [x=1]

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

4. 已知 P (2 , 3 , 4)為座標空間中一點，求下列各值：

(1) P 點到原點 O 的距離

(%i1) sqrt((2-0)^2+(3-0)^2+(4-0)^2);

(%o1) $\sqrt{29}$

＊原點 O 座標為(0 , 0 , 0)

(2) P 點到 yz 平面的距離

(%i2) sqrt((2-0)^2+(3-3)^2+(4-4)^2);

(%o2) 2

＊yz 平面意指 x 座標為 0，y 與 z 座標不考慮(與 P 點 y 與 z 座標相同)

(3) P 點到 x 軸的距離

(%i3) sqrt((2-2)^2+(3-0)^2+(4-0)^2);

(%o3) 5

＊x 軸意指 y 與 z 座標為 0，x 座標不考慮(與 P 點 x 座標相同)

(4) P 點到 z 軸的距離

(%i4) sqrt((2-0)^2+(3-0)^2+(4-4)^2);

(%o4) $\sqrt{29}$

＊x 軸意指 x 與 y 座標為 0，z 座標不考慮(與 P 點 z 座標相同)

2-3 空間向量的座標表示法

P.94

例題 1： 設 $\vec{a}=(1,3,5)$、$\vec{b}=(4,-4,2)$，求 $\vec{a}+\vec{b}$、$\vec{a}-\vec{b}$ 與 $2\vec{a}-3\vec{b}$

(%i1) a:[1,3,5];

(%o1) [1,3,5]

(%i2) b:[4,-4,2];

(%o2) [4,-4,2]

(%i3) a+b;

(%o3) [5,-1,7]

(%i4) a-b;

(%o4) [-3,7,3]

(%i5) 2*a-3*b;

(%o5) [-10,18,4]

隨堂練習： 設 $\vec{a}=(3,-2,5)$、$\vec{b}=(-2,1,3)$，求 $\vec{a}+2\vec{b}$ 與 $3\vec{a}-4\vec{b}$

(%i1) a:[3,-2,5];

(%o1) [3,-2,5]

(%i2) b:[-2,1,3];

(%o2) [-2,1,3]

(%i3) a+2*b;

(%o3) [-1,0,11]

(%i4) 3*a-4*b;

(%o4) [17,-10,3]

例題 2： 已知$\vec{a}=(1,2,-2)$、$\vec{b}$的長度為 6，且$\vec{a}$和$\vec{b}$同方向，求$\vec{b}$

(%i1) a:[1,2,-2];

(%o1) [1,2,-2]

(%i2) sqrt(1^2+2^2+(-2)^2);

(%o2) 3

(%i3) b=6/3*a;

(%o3) b= [2,4,-4]

P.95

隨堂練習： 已知 P (6 , -3 , 1)、Q (1 , -8 , 11)為座標空間中兩點，R 為線段$\overline{PQ}$上一點，

且$\overline{PR}:\overline{RQ}=3:2$，求 R 點座標

(%i1) P:[6,-3,1];

(%o1) [6,-3,1]

(%i2) Q:[1,-8,11];

(%o2) [1,-8,11]

(%i3) R=2/5*(P-Q)+Q;

(%o3) R=[3,-6,7]

＊因$\overline{PR}:\overline{RQ}=3:2$，R 為$\frac{2}{5}(\overline{QP})$+Q

(%i4) R=3/5*(Q-P)+P;

(%o4) R=[3,-6,7]

＊因$\overline{PR}:\overline{RQ}=3:2$，R 為$\frac{3}{5}(\overline{PQ})$+P

P.96

例題 3： 已知$\vec{a}=(1,1,2)$、$\vec{b}=(1,-2,-1)$兩向量的夾角為θ，求$\vec{a}\cdot\vec{b}$與θ

(%i1) a:[1,1,2];

(%o1) [1,1,2]

(%i2) b:[1,-2,-1];

(%o2) [1,-2,-1]

(%i3) radcan(solve([cos(x/180*%pi)=(a.b)/(((a.a))^(1/2)).(((b.b))^(1/2))],[x]));

solve: using arc-trig functions to get a solution.

Some solutions will be lost.

(%o3) [x=120]

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

※「radcan ([算式] × [算式])」指令表示化簡算式。

P.97

隨堂練習： 求$\vec{a}=(2,3,1)$與$\vec{b}=(5,-3,-1)$的夾角θ

(%i1) a:[2,3,1];

(%o1) [2,3,1]

(%i2) b:[5,-3,-1];

(%o2) [5,-3,-1]

(%i3) radcan(solve([cos(x/180*%pi)=(a.b)/(((a.a))^(1/2)).(((b.b))^(1/2))],[x]));

solve: using arc-trig functions to get a solution.

Some solutions will be lost.

(%o3) [x=90]

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

※「radcan ([算式] × [算式])」指令表示化簡算式。

例題 4：右圖是一長方體，其中$\overline{AB}=3$、$\overline{BC}=\overline{CG}=1$，設兩對角線$\overline{BH}$與$\overline{DF}$相交於 P 點，且∠FPB=$\theta$，求 cos$\theta$

設 D 座標為(0 , 0 , 0)

(%i1) D:[0,0,0];

(%o1) [0,0,0]

(%i2) F:[1,3,1];

(%o2) [1,3,1]

(%i3) H:[0,0,1];

(%o3) [0,0,1]

(%i4) B:[1,3,0];

(%o4) [1,3,0]

(%i5) DF:F-D;

(%o5) [1,3,1]

(%i6) HB:B-H;

(%o6) [1,3,-1]

(%i7) cosx=(DF.HB)/(((DF.DF))^(1/2)).(((HB.HB))^(1/2));

(%o7) $\cos x=\frac{9}{11}$

P.97

隨堂練習：右圖是一個邊長為 1 的正立方體，∠FPB=θ，求 cosθ

設 D 座標為(0 , 0 , 0)

(%i1) B:[1,1,0];

(%o1) [1,1,0]

(%i2) G:[0,1,1];

(%o2) [0,1,1]

(%i3) H:[0,0,1];

(%o3) [0,0,1]

(%i4) BH:H-B;

(%o4) [-1,-1,1]

(%i5) BG:G-B;

(%o5) [-1,0,1]

(%i6) cosx=(BH.BG)/(((BH.BH))^(1/2)).(((BG.BG))^(1/2));

(%o6) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

例題 5：已知 $\vec{a} = (4, 5, 2)$ 、$\vec{b} = (1, 2, 2)$ ，求 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 的正射影及正射影的長

(%i1) a:[4,5,2];

(%o1) [4,5,2]

(%i2) b:[1,2,2];

(%o2) [1,2,2]

(%i3) c:((a.b)/(sqrt(b.b)^2)).b;

(%o3) [2,4,4]

(%i4) sqrt(c.c);

(%o4) 6

隨堂練習：已知 $\vec{a} = (1, 2, 2)$ 、$\vec{b} = (2,1,1)$ ，求 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 的正射影及正射影的長

(%i1) a:[1,2,2];

(%o1) [1,2,2]

(%i2) b:[2,1,1];

(%o2) [2,1,1]

(%i3) c:((a.b)/(sqrt(b.b)^2)).b;

(%o3) [2,1,1]

(%i4) sqrt(c.c);

(%o4) $\sqrt{6}$

P.100

例題 6：已知三實數 x、y、z 滿足 $x^2+4y^2+9z^2=3$，求 x+2y+3z 的最大值，並求當 x+2y+3z 最大值時，x、y、z 的值

※本題不建議使用 Maxima 解題※

例題 7：由周長 12 之三角形的三邊分別向外做正方形，試問當三角形為何種三角形時，三個正方形面積和會有最小值？又其值為多少？

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.101

隨堂練習：已知三實數 x、y、z 滿足 x+2y+2z=3，求 $x^2+y^2+z^2$ 的最小值，並求當 $x^2+y^2+z^2$ 最小值時，x、y、z 的值

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.102 習題 2-3

一、基礎題：

1. 已知 $\vec{a}=(1,2,-1)$ 、$\vec{b}=(5,1,4)$ ，求：

(%i1) a:[1,2,-1];

(%o1) [1,2,-1]

(%i2) b:[5,1,4];

(%o2) [5,1,4]

(1) $\vec{a}+\vec{b}$ 及 $2\vec{a}-\vec{b}$

(%i3) n:a+b;

(%o3) [6,3,3]

(%i4) m:2*a-b;

(%o4) [-3,3,-6]

(2) $\vec{a}+\vec{b}$ 及 $2\vec{a}-\vec{b}$ 的夾角

(%i5) solve([cos(x/180*%pi)=(n.m)/(n.n)^(1/2). (m.m)^(1/2)],[x]);

solve: using arc-trig functions to get a solution.

Some solutions will be lost.

(%o5) [x=120]

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

2. 已知 P (1 , 2 , 2)、Q (2 , -3 , 5)與 R (4 , y , z)為座標空間中三點，且 P、Q、R 為三點共線，求 y、z

3. 已知$\vec{a}=(2,1,3)$、$\vec{b}=(1,-1,2)$，若向量$\vec{c}=(5,\ y,\ z)$與$\vec{a}$、$\vec{b}$均垂直，求 y、z

4. 已知 P (1 , -3 , 5)、Q (5 , 5 , 1)為座標空間中兩點，R 為線段$\overline{PQ}$上一點，且 $\overline{PR}:\overline{RQ}=3:1$，求 R 點座標

(%i1) P:[1,-3,5];

(%o1) [1,-3,5]

(%i2) Q:[5,5,1];

(%o2) [5,5,1];

(%i3) R=1/4*(P-Q)+Q;

(%o3) R=[4,3,2]

＊因 $\overline{PR}:\overline{RQ}=3:1$，R 為$\frac{1}{4}(\overline{\text{QP}})$+Q

(%i4) R=3/4*(Q-P)+P;

(%o4) R=[4,3,2]

＊因 $\overline{PR}:\overline{RQ}=3:1$，R 為$\frac{3}{4}(\overline{\text{PQ}})$+P

5.ABCDEFGH 為座標空間的一個正立方體，下列哪些選項是正確的？

(1) D 點座標(2, 0 , 2)

(2) $\overrightarrow{EC}=(2,0,2)$

(3) $|\overrightarrow{GB}|=2\sqrt{2}$

(4) $\overrightarrow{DB}\perp\overrightarrow{FC}$

(5) $\overrightarrow{DB}$和$\overrightarrow{BF}$的夾角為 60°

6. 座標空間中 A (1 , 2 , 3)、B (4 , 3 , 1)與 C (2 , -3 , 5)為平行四邊形的三個頂點，，求 D 點座標

(%i1) solve([4-1=2-x],[x]);

(%o1) [x=-1]

(%i2) solve([3-2=-3-y],[y]);

(%o2) [y=-4]

(%i3) solve([1-3=5-z],[z]);

(%o3) [z=7]

＊平行四邊形 D 點座標為(-1 , -4 , 7)

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

P.103

二、進階題：

7. 已知三實數 x、y、z 滿足 $x^2+y^2+z^2=9$，求 2x-3y+6z 的最大值與最小值，並找出滿足最大值與最小值時的 x、y、z 值

※本題不建議使用 Maxima 解題※

8. 右圖是座標空間中一個邊長為 6 的正立方體，其被一平面截出一個四邊形 ABCD，其中 B、D 分別為邊的中點，且 $\overline{EA}:\overline{AF}=2:1$，求：

(1) $\overrightarrow{AD}$ 和 $\overrightarrow{AB}$

(%i1) A:[6,0,3];

(%o1) [6,0,3]

(%i2) B:[6,6,3];

(%o2) [6,6,3]

(%i3) D:[0,0,3];

(%o3) [0,0,3]

(%i4) AD:D-A;

(%o4) [-6,0,0]

(%i5) AB:B-A;

(%o5) [0,6,0]

(2) cos(∠DAB)的值

(%i6) solve([cos(x/180*%pi)=(AB.AD)/(AB. AB)^(1/2). (AD. AD)^(1/2)],[x]);

solve: using arc-trig functions to get a solution.

Some solutions will be lost.

(%o6) [x=90]

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

2-4 平面方程式

P.104

例題 1：求通過點 P (1 , 2 , 3)，且以 $\vec{n}=(3,-2,1)$ 為法向量的平面方程式

(%i1) expand(3*(x-1)+(-2)*(y-2)+1*(z-3)=0);

(%o1) z-2y+3x-2=0

※「expand ([算式] × [算式])」指令表示展開算式。

隨堂練習：求通過點 P (1 , 0 , -2)，且以 $\vec{n}=(-1,3,2)$ 為法向量的平面方程式

(%i1) expand((-1)*(x-1)+3*(y-0)+2*(z-(-2))=0);

(%o1) 2z+3y-x+5=0

※「expand ([算式] × [算式])」指令表示展開算式。

P.107

隨堂練習：平面 E 的方程式為 3x+4y+5z=6，下列哪些選項是正確的？

(1) 點(1 , -3 , 3)在平面 E 上

(%i1) if 3*1+4*(-3)+5*3=6 then answer=yes else answer=no;

(%o1) answer=yes

(2) 點(3 , -2 , 1)在平面 E 上

(%i2) if 3*3+4*(-2)+5*1=6 then answer=yes else answer=no;

(%o2) answer=yes

＊上述判別式 if 3*1+4*(-3)+5*3=6 then answer=yes else answer=no，判別式表示如果等號成立，其結果顯示 answer=yes (點帶入平面方程式成立-點在平面上)，否則(等號不成立)，結果顯示 answer=no (點帶入平面方程式不成立-點不在平面上)

(3) 向量(3 , 4 , 5)為平面 E 上的一個法向量

(4) 向量(6 , 8 , 10)為平面 E 上的一個法向量

(5) 向量(-3 , -4 , -5)為平面 E 上的一個法向量

例題 2：求通過 P (3 , 2 , 1)和平面 x-2y+3z=-4 平行的平面方程式

(%i1) solve([3-2*2+3*1+d=0],[d]);

(%o1) [d=-2]

＊平面方程式為 x-2y+3z-2=0

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

隨堂練習：求通過 P (-2 , 5 , 1)和平面 x+y-4z=2 平行的平面方程式

(%i1) solve([(-2)+5-4*1+d=0],[d]);

(%o1) [d=1]

＊平面方程式為 x+y-4z+1=0

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

P.108

例題 3：求通過 P (1 , -1 , 2)、Q (2 , 0 , 4)、R (3 , 2 , 5)三點的平面方程式

(%i1) P:[1,-1,2];

(%o1) [1,-1,2]

(%i2) Q:[2,0,4];

(%o2) [2,0,4]

(%i3) R:[3,2,5];

(%o3) [3,2,5]

(%i4) PQ:Q-P;

(%o4) [1,1,2]

(%i5) PR:R-P;

(%o5) [2,3,3]

(%i6) n:[a,b,c];

(%o6) [a,b,c]

(%i7) n.PQ=0;

(%o7) 2c+b+a=0

(%i8) n.PR=0;

(%o8) 3c+3b+2a=0

(%i9) expand((%o8)-(%o7)*2);

(%o9) b-c=0

(%i10)solve([b-c=0],[b]);

(%o10) [b=c]

(%i11)b:c

(%o11) c

(%i12) 2*c+b+a=0;

(%o12) 3c+a=0

(%i13) solve([3*c+a=0],[a]);

(%o13) [a=-3c]

(%i14) a:-3*c

(%o14) -3c

(%i15) [a,b,c]

(%o15) [-3c,c,c]

(%i16) expand((-3)*(x-1)+1*(y-(-1))+1*(z-2)=0);

(%o16) z+y-3x+2=0

※「expand ([算式] × [算式])」指令表示展開算式。

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

隨堂練習：求通過 P (1 , -1 , 3)、Q (2 , 1 , 1)、R (1 , 3 , 1)三點的平面方程式

(%i1) P:[1,-1,3];

(%o1) [1,-1,3]

(%i2) Q:[2,1,1];

(%o2) [2,1,1]

(%i3) R:[1,3,1];

(%o3) [1,3,1]

(%i4) PQ:Q-P;

(%o4) [1,2,-2]

(%i5) PR:R-P;

(%o5) [0,4,-2]

(%i6) n:[a,b,c];

(%o6) [a,b,c]

(%i7) n.PQ=0;

(%o7) -2c+2b+a=0

(%i8) n.PR=0;

(%o8) 4b-2c=0

(%i9) expand((%o8)-(%o7));

(%o9) 2b-a=0

(%i10)solve([2*b-a=0],[b]);

(%o10) [b=$\frac{a}{2}$]

(%i11) b:a/2

(%o11) $\frac{a}{2}$

(%i12) 4b-2c=0;

(%o12) 2a-2c=0

(%i13) solve([2*a-2*c=0],[c]);

(%o13) [c=a]

(%i14) c:a

(%o14) a

(%i15) [a,b,c]

(%o15) [a,$\frac{a}{2}$,a]

(%i16) expand(1*(x-1)+(1/2)*(y-(-1))+1*(z-3)=0);

(%o16) $z+\frac{y}{2}+x-\frac{7}{2}=0$

※「expand ([算式] × [算式])」指令表示展開算式。

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

P.109

例題 4：求通過 P (1 , 0 , 0)、Q (0 , 2 , 0)、R (0 , 0 , 3)三點的平面方程式

(%i1) solve([a*1+b*0+c*0=d, a*0+b*2+c*0=d, a*0+b*0+c*3=d],[a,b,c]);

(%o1) [[$a=d,b=\frac{d}{2},c=\frac{d}{3}$]]

(%i2) d*x+(d/2)*y+(d/3)*z=d;

(%o2) $\frac{dz}{3}+\frac{dy}{2}+dx=d$

(%i3) (1*z)/3+(1*y)/2+1*x=1

(%o3) $\frac{z}{3}+\frac{y}{2}+x=1$

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

隨堂練習：求通過 P (3 , 0 , 0)、Q (0 , 4 , 0)、R (0 , 0 , -5)三點的平面方程式

(%i1) solve([a*3+b*0+c*0=d, a*0+b*4+c*0=d, a*0+b*0+c*(-5)=d],[a,b,c]);

(%o1) [[$a=\frac{d}{3}, b=\frac{d}{4}, c=-\frac{d}{5}$]]

(%i2) (d/3)*x+(d/4)*y+(-d/5)*z=d;

(%o2) $-\frac{dz}{5}+\frac{dy}{4}+\frac{dx}{3}=d$

(%i3) -(1*z)/5+(1*y)/4+(1*x)/3=1

(%o3) $-\frac{z}{5}+\frac{y}{4}+\frac{x}{3}=1$

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

P.111

例題 5：求兩平面 E_1：x+2y-z=3 和 E_2：-x+y-2z=3 的夾角

(%i1) n1: [1,2,-1];

(%o1) [1,2,-1]

(%i2) n2: [-1,1,-2];

(%o2) [-1,1,-2]

(%i3) solve([cos(x/180*%pi)=(n1. n2)/(n1.n1)^(1/2). (n2. n2)^(1/2)],[x]);

solve: using arc-trig functions to get a solution.

Some solutions will be lost.

(%o3) [x=60]

(%i4)180 – 60;

(%o4) 120

＊夾角 x 為 60°，故兩平面夾角為 60°與 120°

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

隨堂練習：求兩平面 E_1：x+y-2z=5 和 E_2：x+3y+2z=4 的夾角

(%i1) n1: [1,1,-2];

(%o1) [1,1,-2]

(%i2) n2: [1,3,2];

(%o2) [1,3,2]

(%i3) solve([cos(x/180*%pi)=(n1.n2)/(n1.n1)^(1/2). (n2. n2)^(1/2)],[x]);

solve: using arc-trig functions to get a solution.

Some solutions will be lost.

(%o3) [x=90]

(%i4)180 – 90;

(%o4) 90

＊夾角 x 為 90°，故兩平面夾角為 90°

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

P.113

例題 6：求點(1 , 2 , 3)到平面 2x+3y-6z=11 的距離

(%i1) abs(2*1+3*2-6*3-11)/sqrt(2^2+3^2+(-6)^2);

(%o1) 3

※「abs(數值)」指令表示絕對值。

隨堂練習：求點(3 , 2 , -1)到平面 x-2y-2z=7 的距離

(%i1) abs(1*3-2*2-2*(-1)-7)/sqrt(1^2+(-2)^2+(-2)^2);

(%o1) 2

※「abs(數值)」指令表示絕對值。

P.114

例題 7：求兩平行平面 E_1：6x-2y-3z=1 和 E_2：6x-2y-3z =15 的距離

(%i1) abs(1-15)/sqrt(6^2+(-2)^2+(-3)^2);

(%o1) 2

※「abs(數值)」指令表示絕對值。

隨堂練習：已知兩平行平面 E_1：2x-2y-z=1 和 E_2：2x-2y-z=k 的距離為 2，求 k 的值

(%i1) load (fourier_elim);

(%o1)C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier_elim/fourier_elim.lisp

(%i2) fourier_elim([abs(1-k)/sqrt(2^2+(-2)^2+(-1)^2)=2],[k]);

(%o2) [k=7] or [k=-5]

※「abs(數值)」指令表示絕對值。

※「load (fourier_elim)」指令可執行不等式計算，須先載入。

※「fourier_elim([變數算式], [變數])([變數算式], [變數])」求解不等式。

P.115 習題 2-4

一、基礎題：

1. 平面 E 的方程式為 x+y+z=3，下列哪些敘述是正確的？

(1) 點(2 , 1 , 0)在 E 上

(2) 向量(1 , 1 , 2)為 E 上的一個法向量

(3) 圓點到 E 的距離為 $\sqrt{3}$

(4) 平面 x+y-z=-3 和 E 平行

(5) 平面 x+y+2z=0 和 E 垂直

2. 求通過點 P (1 , -2 , 3)，且以 $\vec{n}=(2,-1,4)$ 為法向量的平面方程式

(%i1) expand(2*(x-1)+(-1)*(y-(-2))+4*(z-3)=0);

(%o1) 4z-y+2x-16=0

※「expand ([算式] × [算式])」指令表示展開算式。

3. 求通過 P (4 , 3 , -1)、Q (1 , 3 , 2)、R (-1 , 1 , 3)三點的平面方程式

(%i1) P:[4,3,-1];

(%o1) [4,3,-1]

(%i2) Q:[1,3,2];

(%o2) [1,3,2]

(%i3) R:[-1,1,3];

(%o3) [-1,1,3]

(%i4) PQ:Q-P;

(%o4) [-3,0,3]

(%i5) PR:R-P;

(%o5) [-5,-2,4]

(%i6) n:[a,b,c];

(%o6) [a,b,c]

(%i7) n.PQ=0;

(%o7) 3c-3a=0

(%i8) n.PR=0;

(%o8) 4c-2b-5a=0

(%i9)solve([3*c-3*a=0],[a]);

(%o9) [a=c]

(%i10) a:c

(%o10) c

(%i11) 4*c-2*b-5*a=0;

(%o11) -c-2b=0

(%i12) solve([-c-2*b=0],[b]);

(%o12) [b=$\frac{c}{2}$]

(%i13) b:-c/2

(%o13) $-\frac{c}{2}$

(%i14) [a,b,c]

(%o14) [c,$-\frac{c}{2}$,c]

(%i15) expand(1*(x-4)-(1/2)*(y-3)+1*(z-(-1))=0);

(%o15) $z-\frac{y}{2}+x-\frac{3}{2}=0$

※「expand ([算式] × [算式])」指令表示展開算式。

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

4. 求兩平面 x+4y-z=3 和 x-y=3 的夾角

(%i1) n1: [1,4,-1];

(%o1) [1,4,-1]

(%i2) n2: [1, -1,0];

(%o2) [1, -1,0]

(%i3) solve([cos(x/180*%pi)=(n1. n2)/(n1.n1)^(1/2). (n2. n2)^(1/2)],[x]);

solve: using arc-trig functions to get a solution.

Some solutions will be lost.

(%o3) [x=120]

(%i4)180 – 120;

(%o4) 60

＊夾角 x 為 120˚，故兩平面夾角為 60˚與 120˚

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

5. 求點(2 , -3 , -1)到平面 3x-y-2z+3=0 的距離

(%i1) abs(3*2-1*(-3)-2*(-1)+3)/sqrt(3^2+(-1)^2+(-2)^2);

(%o1) $\sqrt{14}$

※「abs(數值)」指令表示絕對值。

6. 求兩平行平面 E_1：2x+y+2z=-3 和 E_2：2x+y+2z=9 的距離

(%i1) abs(-3-9)/sqrt(2^2+1^2+2^2);

(%o1) 4

※「abs(數值)」指令表示絕對值。

二、進階題：

7. 已知座標空間中四點(0 , 0 , 0)、(1 , 2 , 3)、(2 , 3 , 1)與(1 , 1 , a)共平面，求 a 之值

(%i1) P:[0,0,0];

(%o1) [0,0,0]

(%i2) Q:[1,2,3];

(%o2) [1, 2, 3]

(%i3) R:[2,3,1];

(%o3) [2,3,1]

(%i4) PQ:Q-P;

(%o4) [1,2,3]

(%i5) PR:R-P;

(%o5) [2,3,1]

(%i6) n:[a,b,c];

(%o6) [a,b,c]

(%i7) n.PQ=0;

(%o7) 3c+2b+a=0

(%i8) n.PR=0;

(%o8) c+3b+2a=0

(%i9) expand((%o8)*2-(%o9));

(%o9) 5c+b=0

(%i10)solve([5*c+b=0],[b]);

(%o10) [b=-5c]

(%i11) b:-5*c

(%o11) -5c

(%i12) 3*c+2*b+a=0;

(%o12) a-7c=0

(%i13) solve([a-7*c=0],[a]);

(%o13) [a=7*c]

(%i14) a:7*c

(%o14) 7c

(%i15) [a,b,c]

(%o15) [7c,-5c,c]

(%i16) expand(7*(x-0)-5*(y-0)+1*(z-0)=0);

(%o16) z-5y+7x=0

(%i17) solve([a-5*1+7*1=0],[a]);

(%o17) [a=-2]

※「expand ([算式] × [算式])」指令表示展開算式。

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

8. 在座標空間中，已知平面 E 通過(2 , 0 , 0)、(0 , 1 , 0)、(0 , 0 , 1)三點，求：

(1) E 的方程式

(%i1) solve([a*2+b*0+c*0=d,a*0+b*1+c*0=d, a*0+b*0+c*1=d],[a,b,c]);

(%o1) [[a=$\frac{d}{2}$d,b=d,c=d]]

(%i2) (d/2)*x+d*y+d*z=d;

(%o2) $dz+dy+\frac{dx}{2}=d$

(%i3) 1*z+1*y+(1/2)*x=1

(%o3) $z+y+\frac{x}{2}=1$

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

(2) 原點(0 , 0 , 0)到 E 的距離

(%i4) abs(1*0+1*0+(1/2)*0-1)/sqrt(1^2+1^2+(1/2)^2);

(%o4) $\frac{2}{3}$

※「abs(數值)」指令表示絕對值。

P.115

9. 已知平面 E 通過點 P (2 , 1 , -1)且與二平面 E_1：2x+y-z=3 和 E_2：x+2y+z=0 均垂直，求 E 的方程式

10. 在座標空間中有一個正立方體 ABCD-EFGH，其中一面 EFGH 所在的平面方程式為 x-2y+2z=3，且 A 點座標為(5 , -2 , 3)，求：

(1) 正立方體的面 ABCD 所在的平面方程式

(2) 次正立方體的邊長

2-5 空間直線方程式

P.118

例題 1： 已知直線 L 通過點 A (2 , 1 , -3)、B (4 , 2 , 1)，求 L 的參數式

(%i1) A:[2,1,-3];

(%o1) [2,1,-3];

(%i2) B:[4,2,1];

(%o2) [4,2,1]

(%i3) AB=B-A

(%o3) AB=[2,1,4]

＊L 通過點 A，且 $\overline{AB}=(2,1,4)$ 為 L 的一個方向向量，故其參數式為 L：{x=2+2t ; y=2+t ; z=-3+4t }

P.119

隨堂練習： 已知直線 L 通過點 A (-3 , 4 , 1)，且 $\vec{v}=(1,2,3)$ 為 L 的一個方向向量，求 L 的參數式

＊L 通過點 A，且 $\vec{v}=(1,2,3)$ 為 L 的一個方向向量，故其參數式為 L：{x=-3+t ; y=4+2t ; z=1+3t }

P.120

例題 2： 已知直線 L 通過點 P (2 , 1 , 3)、Q (3 , -2 , 1)，求 L 的對稱比例式

(%i1) P:[2,1,3];

(%o1) [2,1,3];

(%i2) Q:[3,-2,1];

(%o2) [3,-2,1]

(%i3) PQ=Q-P

(%o3) PQ=[1,-3,-2]

＊L 通過點 P，且 $\overline{PQ}=(1,-3,-2)$ 為 L 的一個方向向量，故其對稱比例式為

$$L:\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-3}{-2}$$

隨堂練習：已知直線 L 通過點 P (4 , -2 , -3)、Q (1 , 0 , 1)，求 L 的對稱比例式

(%i1) P:[4,-2,-3];

(%o1) [4,-2,-3];

(%i2) Q:[1,0,1];

(%o2) [1,0,1]

(%i3) PQ=Q-P

(%o3) PQ=[-3,2,4]

＊L 通過點 P，且 $\overline{PQ}=(-3,2,4)$ 為 L 的一個方向向量，故其對稱比例式為

$$L:\frac{x-4}{-3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+3}{4}$$

例題 3：求兩平面 3x+2y+z=4 和 x+2y+3z=-4 的交線 L 之參數式

(%i1) A:3*x+2*y+z=4;

(%o1) 3x+2y+z=4

(%i2) B:x+2*y+3*z=-4;

(%o2) x+2y+3z=-4

(%i3) A-B;

(%o3) 2x-2z=8

(%i4) Q:[x,y,z];

(%o4) [x,y,z]

(%i5) solve([2*x-2*z=-5],[x]);

(%o5) [x=z+4]

(%i6) x:z+4;

(%o6) z+4

(%i7) solve([x+2*y+3*z=-4],[y]);

(%o7) [y=-2z-4]

(%i8) y:-2*z-4;

(%o8) -2z-4

(%i9) Q;

(%o9) [z+4,-2z-4,z]

令 z=t

(%i10) z:t;

(%o10) t

(%i11) [z+4,-2*z-4,z];

(%o11) [t+4,-2t-4,t]

＊L 之參數式為{ x=4+t ; y= -4-2t ; z=t }

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

P.121

隨堂練習：求兩平面 x+y-2z=4 和 3x+2y+z=4 的交線 L 之參數式

(%i1) A:x+y-2*z=4;

(%o1) -2z+y+x=4

(%i2) B:3*x+2*y+z=4;

(%o2) z+2y+3x=4

(%i3) expand(2*A-B);

(%o3) -5z-x=4

(%i4) Q:[x,y,z];

(%o4) [x,y,z]

(%i5) solve([-5*z-x=4],[x]);

(%o5) [x=-5z-4]

(%i6) x: -5*z-4;

(%o6) -5z-4

(%i7) solve([A],[y]);

(%o7) [y=7z+8]

(%i8) y: 7*z+8;

(%o8) 7z+8

(%i9) Q;

(%o9) [-5z-4,7z+8,z]

令 z=t

(%i10) z:t;

(%o10) t

(%i11) [-5*z-4,7*z+8,z];

(%o11) [-5t-4,7t+8,t]

＊L 之參數式為{ x=-4-5t ; y= 8+7t ; z=t }

※「expand ([算式] × [算式])」指令表示展開算式。

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

P.122

例題 4：求點 P (3 , 2 , 6)到直線 L：$\frac{x+1}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{-3}$ 的距離

(%i1) Q:[-1+2*t,2*t,2-3*t];

(%o1) [2t-1,2t,2-3t]

(%i2) P:[3,2,6];

(%o2) [3,2,6]

(%i3) PQ:Q-P;

(%o3) [2t-4,2t-2,-3t-4]

(%i4) n: [2,2,-3];

(%o4) [2,2,-3]

(%i5) solve([PQ.n=0],[t]);

(%o5) [t=0]

(%i6) t:0;

(%o6) 0

(%i7) [2*t-4,2*t-2,-3*t-4];

(%o7) [-4,-2,-4]

(%i8) PQ: [-4,-2,-4];

(%o8) [-4,-2,-4]

點到直線 L 的距離

(%i9) sqrt(PQ.PQ);

(%o9) 6

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

P.123

隨堂練習：設 L：$\frac{x-5}{2}=\frac{y-6}{-3}=\frac{z-3}{-2}$，點 P (1 , 1 , -2)到直線，求

(1) P 點到直線 L 的垂足

(%i1) Q:[5+2*t,6-3*t,3-2*t];

(%o1) [2t+5,6-3t,3-2t]

(%i2) P:[1,1,-2];

(%o2) [1,1,-2]

(%i3) PQ:Q-P;

(%o3) [2t+4,5-3t,5-2t]

(%i4) n: [2, -3,-2];

(%o4) [2, -3,-2]

(%i5) solve([PQ.n=0],[t]);

(%o5) [t=1]

(%i6) t:1;

(%o6) 1

(%i7) Q=[5+2*t,6-3*t,3-2*t];

(%o7) Q=[7,3,1]

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

(2) P 點到直線 L 的距離

(%i8) PQ:[6,2,3];

(%o8) [6,2,3]

(%i9) sqrt(PQ.PQ);

(%o9) 7

例題 5：求兩平行線 L_1：$\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-2}$ 和 L_2：$\frac{x-2}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+1}{-2}$ 的距離

取 L_1 線上一點 P (1 , -1 , 3)

(%i1) P:[1,-1,3];

(%o1) [1,-1,3]

由 P 點做一垂直線 PQ 交 L_2 於 Q 點：

(%i2) Q:[2+3*t,2+2*t,-1-2*t];

(%o2) [3t+2,2t+2,-2t-1]

(%i3) PQ:Q-P;

(%o3) [3t+1,2t+3,-2t-4]

L_2 方向向量

(%i4) n2: [3, 2,-2];

(%o4) [3, 2,-2]

(%i5) solve([PQ.n2=0],[t]);

(%o5) [t=-1]

(%i6) t:-1;

(%o6) -1

(%i7) PQ:[3*t+1,2*t+3,-2*t-4];

(%o7) [-2,1,-2]

(%i8) sqrt(PQ.PQ);

(%o8) 3

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

P.124

隨堂練習：設兩平行線 L_1：$\frac{x-1}{-2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+2}{2}$ 和 L_2：$\frac{x-5}{2}=\frac{y-6}{-3}=\frac{z-3}{-2}$ 的距離

取 L_1 線上一點 P (1 , 1 , -2)

(%i1) P:[1,1,-2];

(%o1) [1,1,-2]

由 P 點做一垂直線 PQ 交 L_2 於 Q 點：

(%i2) Q:[5+2*t,6-3*t,3-2*t];

(%o2) [2t+5,6-3t,3-2t]

(%i3) PQ:Q-P;

(%o3) [2t+4,5-3t,5-2t]

L_2 方向向量

(%i4) n2: [2, -3,-2];

(%o4) [2,-3,-2]

(%i5) solve([PQ.n2=0],[t]);

(%o5) [t=1]

(%i6) t:1;

(%o6) 1

(%i7) PQ: [2*t+4,5-3*t,5-2*t];

(%o7) [6,2,3]

(%i8) sqrt(PQ.PQ);

(%o8) 7

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

例題 6：求兩直線 L_1：$\frac{x-7}{4}=\frac{y}{-1}=\frac{z+3}{2}$和 L_2：$\frac{x+3}{2}=\frac{y+8}{3}=\frac{z+8}{1}$的交點座標

由題目可知 L_1 之對稱比例式可寫成如下：(其中 s 為實數)

(%i1) L1:[4*s+7,-s,2*s-3];

(%o1) [4s+7,-s,2s-3]

由題目可知 L_2 之對稱比例式可寫成如下：(其中 t 為實數)

(%i2) L2:[2*t-3,3*t-8,t-8];

(%o2) [2t-3,3t-8,t-8]

(%i3) solve([4*s+7=2*t-3,-s=3*t-8],[t,s]);

(%o3) [[t=3,s=-1]]

(%i4) t:3;

(%o4) 3

(%i5) s:-1;

(%o5) -1

(%i6) if 2*s-3= t-8 then answer=yes else answer=no;

(%o6) answer=yes

(%i7)L1:[4*s+7,-s,2*s-3];

(%o7) [3,1,-5]

(%i8)L2:[2*t-3,3*t-8,t-8];

(%o8) [3,1,-5]

＊判別式 if 2*s-3= t-8 then answer=yes else answer=no，將 t、s 帶入並判斷是否符合判別式，表示如果等號成立，其結果顯示 answer=yes，否則(等號不成立)，結果顯示 answer=no

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

P.125

隨堂練習：說明直線 L_1：$\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z}{-1}$ 和 L_2：$\frac{x+3}{1}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z-1}{1}$ 是兩條歪斜線

由題目可知 L_1 之對稱比例式可寫成如下：(其中 s 為實數)

(%i1) L1:[2*s-1,-2*s+2,-s];

(%o1) [2s-1,2-2s,-s]

由題目可知 L_2 之對稱比例式可寫成如下：(其中 t 為實數)

(%i2) L2:[t-3,-4*t+1,t+1];

(%o2) [t-3,1-4t,t+1]

(%i3) solve([2*s-1= t-3, -2*s =-4*t+1],[t,s]);

(%o3) [[t=$-\frac{1}{3}$,s=$-\frac{7}{6}$]]

(%i4) t:-1/3;

(%o4) $-\frac{1}{3}$

(%i5) s:-7/6;

(%o5) $-\frac{7}{6}$

(%i6) if -s = t+1 then answer=yes else answer=no;

(%o6) answer=no

＊判別式 if 2*s-3= t-8 then answer=yes else answer=no，將 t、s 帶入並判斷是否符合判別式，表示如果等號成立，其結果顯示 answer=yes，否則(等號不成立)，結果顯示 answer=no

＊將 L_1、L_2 兩式 x 與 y 聯立解出之值帶入 y，結果並不滿足，故兩線無交點，又因方像向量不平行，故 L_1、L_2 為歪斜線

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

P.126

例題 7： 已知直線 L_1：$\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z}{-1}$ 和 L_2：$\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z-1}{1}$ 是兩條歪斜線，求其公垂線段長

*設公垂線 L 與 L_1 相交於 P 點，與 L_2 相交於 Q 點

P 點座標：(其中 s 為實數)

(%i1) P:[2*s-1,-2*s+2,-s];

(%o1) [2s-1,2-2s,-s]

Q 點座標：(其中 t 為實數)

(%i2) Q:[t+3,-4*t+1,t+1];

(%o2) [t-3,1-4t,t+1]

(%i3) PQ:Q-P;

(%o3) [t-2s+4,-4t+2s-1,t+s+1]

$\overline{PQ}$ 線段和直線 L_1 與 L_2 之方向向量均垂直

(%i4) n1:[2,-2,-1];

(%o4) [2,-2,-1]

(%i5) n2:[1,-4,1];

(%o5) [1,-4,1]

(%i6) expand(PQ. n1=0);

(%o6) 9t-9s+9=0

(%i7) expand(PQ. n2=0);

(%o7) 18t-9s+9=0

(%i8) solve([9*t-9*s+9=0, 18*t-9*s+9=0],[s,t]);

(%o8) [[s=1,t=0]]

(%i9) s:1;t:0;

(%o9)1

(%o10) 0

(%i11) P:[2*s-1,-2*s+2,-s];

(%o11) [1,0,-1]

(%i12) Q:[t+3,-4*t+1,t+1];

(%o12) [3,1,1]

(%i13)PQ:Q-P;

(%o13) [2,1,2]

(%i14) sqrt(PQ. PQ);

(%o14) 3

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

※「expand ([算式] × [算式])」指令表示展開算式。

隨堂練習：已知直線 L_1：$\frac{x-3}{2}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z-7}{2}$ 和 L_2：$\frac{x+1}{4}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{-1}$ 是兩條歪斜線，求其公垂線段長

＊設公垂線 L 與 L_1 相交於 P 點，與 L_2 相交於 Q 點

P 點座標：(其中 s 為實數)

(%i1) P:[2*s+3,-3*s+3,2*s+7];

(%o1) [2s+3,3-3s,2s+7]

Q 點座標：(其中 t 為實數)

(%i2) Q:[4*t-1,- t+2,-t+1];

(%o2) [4t-1,2-t,1-t]

(%i3) PQ:Q-P;

(%o3) [4t-2s-4,-t+3s-1,-t-2s-6]

$\overline{PQ}$線段和直線 L_1 與 L_2 之方向向量均垂直

(%i4) n1:[2,-3,2];

(%o4) [2,-3,2]

(%i5) n2:[4,-1,-1];

(%o5) [4,-1,-1]

(%i6) expand(PQ. n1=0);

(%o6) 9t-17s-17=0

(%i7) expand(PQ. n2=0);

(%o7) 18t-9s-9=0

(%i8) solve([9*t-17*s-17=0, 18*t-9*s-9=0],[s,t]);

(%o8) [[s=-1,t=0]]

(%i9) s: -1;t:0;

(%o9) -1

(%o10) 0

(%i11) P:[2*s+3,-3*s+3,2*s+7];

(%o11) [1,6,5]

(%i12) Q:[4*t-1,- t+2,-t+1];

(%o12) [-1,2,1]

(%i13)PQ:Q-P;

(%o13) [-2,-4,-4]

(%i14) sqrt(PQ. PQ);

(%o14) 6

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

※「expand ([算式] × [算式])」指令表示展開算式。

P.127

例題 8： 已知平面 E 的方程式為 2x-y+3z=3，討論下列二直線與平面 E 的相交情形：

L_1：$\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{1}$ 、L_2：$\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{-1}$

(1) 設點 P(x1,y1,z1)是直線 L_1 與平面 E 的交點：(其中 s 為實數)

(%i1) P:[3*s+1,3*s+2,s+3];

(%o1) [3s+1,3s+2,s+3]

(%i2) E:2*x1-y1+3*z1=3;

(%o2) 3z1-y1+2x1=3

(%i3) x1:3*s+1;y1:3*s+2;z1:s+3;

(%o3) 3*s+1

(%o4) 3*s+2

(%o5) s+3

(%i6) solve([E],[s]);

(%o6) [s=-1]

(%i7) s:-1;

(%o7) -1

(%i8) P:[3*s+1,3*s+2,s+3];

(%o8) [-2,-1,2]

(2) 設點 P(x2,y2,z2)是直線 L_2 與平面 E 的交點：(其中 t 為實數) $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{-1}$

(%i9) P:[3*t+1,3*t+2,-t+3];

(%o9) [3t+1,3t+2,3-t]

(%o10) E:2*x2-y2+3*z2=3;

(%o10) 3z2-y2+2x2=3

(%i11) x2:3*t+1;y2:3*t+2;z2:-t+3;

(%o11) 3t+1

(%o12) 3t+2

(%o13) 3-t

(%i14) solve([E],[t]);

(%o14) []

＊[]表示無解，故直線 L_2 和平面 E 不相交(即平行)

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

P.128

隨堂練習：已知平面 E 的方程式為 2x-y+3z=3，討論直線 L：$\frac{x-3}{3}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-1}$與平面 E 的相交情形

設點 P(x,y,z)是直線 L 與平面 E 的交點：(其中 s 為實數)

(%i1) P:[3*s+3,3*s,-s-1];

(%o1) [3s+3,3s,-s-1]

(%i2) E:2*x-y+3*z=3;

(%o2) 3z-y+2x=3

(%i3) x: 3*s+3;y: 3*s;z: -s-1;

(%o3) 3s+3

(%o4) 3s

(%o5) -s-1

(%i6) solve([E],[s]);

(%o6) [s=s]

＊[s=s]表示任意解，故直線 L 在平面 E 上 (即重疊)

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

例題 9：求包含點 P (-1 , 1 , 5)和直線 L：$\frac{x}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{-5}$的平面 E 之方程式

設點 Q(0,1,2)是直線 L 上一點：

(%i1) Q:[0,1,2];

(%o1) [0,1,2]

$\vec{v}$為 L 的一個方向向量

(%i2) v:[1,1,-5];

(%o2) [1,1,-5]

(%i3) P: [-1,1,5];

(%o3) [-1,1,5]

(%i4) PQ:Q-P;

(%o4) [1,0,-3]

設$\vec{n}=(a,b,c)$為平面 E 的法向量；且$\vec{n}$與$\vec{v}$、$\overline{PQ}$均垂直

(%i5) n:[a,b,c];

(%o5) [a,b,c]

(%i6) expand(PQ.n=0);

(%o6) a-3c=0

(%i7) expand(v.n=0);

(%o7) -5c+b+a=0

(%i8) solve([a-3*c=0],[a]);

(%o8) [a=3c]

(%i9) a:3*c;

(%o9) 3c

(%i10) solve([-5*c+b+a=0],[b]);

(%o10) [b=2c]

(%i11) b:2*c;

(%o11) 2c

(%i12) n:[a,b,c];

(%o12) [3c,2c,c]

由上可知$\vec{n}=c(3,2,1)$，即(3,2,1)為平面 E 的一法向量，又 P 點在平面 E 上

(%i13) expand(3*(x-(-1))+2*(y-1)+1*(z-5)=0);

(%o13) z+2y+3x-4=0

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

※「expand ([算式] × [算式])」指令表示展開算式。

P.129

隨堂練習：求包含點 P (1 , 2 , 3)和直線 L：$\frac{x-3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1}$的平面 E 之方程式

設點 Q(3,0,1)是直線 L 上一點：

(%i1) Q:[3,0,1];

(%o1) [3,0,1]

$\vec{v}$為 L 的一個方向向量

(%i2) v:[2,1,-1];

(%o2) [2,1,-1]

(%i3) P: [1,2,3];

(%o3) [1,2,3]

(%i4) PQ:Q-P;

(%o4) [2,-2,-2]

設 $\vec{n}=(a,b,c)$ 為平面 E 的法向量；且 $\vec{n}$ 與 $\vec{v}$ 、$\overline{PQ}$ 均垂直

(%i5) n:[a,b,c];

(%o5) [a,b,c]

(%i6) expand(PQ.n=0);

(%o6) -2c-2b+2a=0

(%i7) expand(v.n=0);

(%o7) -c+b+2a=0

(%i8) solve([-2c-2b+2a=0, -c+b+2a=0],[a,b]);

(%o8) $[[a=\frac{2c}{3}, b=-\frac{c}{3}]]$

(%i9) a:(2*c)/3;

(%o9) $\frac{2c}{3}$

(%i11) b: -c/3;

(%o11) $-\frac{c}{3}$

(%i12) n:[a,b,c];

(%o12) $[\frac{2c}{3}, -\frac{c}{3}, c]$

由上可知 $\vec{n}=[\frac{2c}{3},-\frac{c}{3},c]$，即 $\frac{c}{3}(2,-1,3)$ 為平面 E 的一法向量，又 P 點在平面 E 上

(%i13) expand(2*(x-1)+(-1)*(y-2)+3*(z-3)=0);

(%o13) 3z-y+2x-9=0

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

※「expand ([算式] × [算式])」指令表示展開算式。

P.130 習題 2-5

一、基礎題：

1. 直線 L 的對稱比例式為 $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{-3}$，下列哪些敘述是正確的？

(1) 點(1 , -2 , 3)在 L 上

(2) 點(0 , 0 , 0)在 L 上

(3) 向量(1 , 2 , -3)為 L 的一個方向向量

(4) 向量(2 , 4 , 6)為 L 的一個方向向量

(5) {x=2+t ; y=2t ; z=-3t}(t 為實數)，是 L 的參數式

2. 求通過點 A (1 , 5 , -3)和 B (3 , 4 , 1)的直線之參數式與對稱比例式

(1) 參數式

(%i1) A:[1,5,-3];

(%o1) [1,5,-3];

(%i2) B:[3,4,1];

(%o2) [3,4,1]

(%i3) AB=B-A

(%o3) AB= [2,-1,4]

＊L 通過點 A，且 $\overline{AB}=(2,-1,4)$ 為 L 的一個方向向量，故其參數式為 L：{x=1+2t ; y=5-t ; z=-3+4t }

(2) 對稱比例式

＊L 通過點 A，且 $\overline{AB}=(2,-1,4)$ 為 L 的一個方向向量，故其對稱比例式為 $L:\frac{x-1}{2}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z+3}{4}$

3. 求兩平面 x+2y+3z=2 和 3x+2y+z=2 的交線之對稱比例式

4. 求兩平行線 L_1：$\frac{x-3}{2}=\frac{y+4}{2}=\frac{z+6}{-1}$和 L_2：$\frac{x-1}{-2}=\frac{y}{-2}=\frac{z+2}{1}$的距離

取 L_1 線上一點 P (3 , -4 , -6)

(%i1) P:[3,-4,-6];

(%o1) [3,-4,-6]

由 P 點做一垂直線 PQ 交 L_2 於 Q 點：

(%i2) Q:[1-2*t, -2*t,-2+t];

(%o2) [1-2t,-2t,t-2]

(%i3) PQ:Q-P;

(%o3) [-2t-2,4-2t,t+4]

L_2 方向向量

(%i4) n2: [-2, -2,1];

(%o4) [-2,-2,1]

(%i5) solve([PQ.n2=0],[t]);

(%o5) [t=0]

(%i6) t:0;

(%o6) 0

(%i7) PQ= [-2*t-2,4-2*t,t+4];

(%o7) [-2,4,4]

(%i8) sqrt(PQ.PQ);

(%o8) 6

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

5. 求兩相交直線 L_1：$\frac{x-2}{4}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{2}$ 和 L_2：$\frac{x}{2}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-2}{1}$ 的交點座標

由題目可知 L_1 之對稱比例式可寫成如下：(其中 s 為實數)

(%i1) L1:[4*s+2,-s-1,2*s+3];

(%o1) [4s+2,-s-1,2s+3]

由題目可知 L_2 之對稱比例式可寫成如下：(其中 t 為實數)

(%i2) L2:[2*t,3*t+3,t+2];

(%o2) [2t,3t+3,t+2]

(%i3) solve([4*s+2=2*t,-s-1=3*t+3],[t,s]);

(%o3) [[t=-1,s=-1]]

(%i4) t:-1; s:-1;

(%o4) -1

(%o5) -1

(%i6) if 2*s+3= t+2 then answer=yes else answer=no;

(%o6) answer=yes

(%i7) L1:[4*s+2,-s-1,2*s+3];

(%o7) [-2,0,1]

(%i8) L2:[2*t,3*t+3,t+2];

(%o8) [-2,0,1]

＊判別式 if 2*s-3= t-8 then answer=yes else answer=no，將 t、s 帶入並判斷是否符合判別式，表示如果等號成立，其結果顯示 answer=yes，否則(等號不成立)，結果顯示 answer=no

※「**solve([變數算式], [變數])**」指令表示求解。

6. 求兩歪斜線 L_1：$\frac{x-11}{4}=\frac{y+5}{-3}=\frac{z+7}{-1}$ 和 L_2：$\frac{x+5}{3}=\frac{y-4}{-4}=\frac{z-6}{-2}$ 的公垂線段長

＊設公垂線 L 與 L_1 相交於 P 點，與 L_2 相交於 Q 點

P 點座標：(其中 s 為實數)

(%i1) P:[4*s+11,-3*s-5,-s-7];

(%o1) [4s+11,-3s-5,-s-7]

Q 點座標：(其中 t 為實數)

(%i2) Q:[3*t-5,-4*t+4,-2*t+6];

(%o2) [3t-5,4-4t,6-2t]

(%i3) PQ:Q-P;

(%o3) [3t-4s-16,-4t+3s+9,-2t+s+13]

$\overline{PQ}$ 線段和直線 L_1 與 L_2 之方向向量均垂直

(%i4) n1:[4,-3,-1];

(%o4) [4,-3,-1]

(%i5) n2:[3,-4,-2];

(%o5) [3,-4,-2]

(%i6) expand(PQ.n1=0);

(%o6) 26t-26s-104=0

(%i7) expand(PQ. n2=0);

(%o7) 29t-26s-110=0

(%i8) solve([26*t-26*s-104=0, 29*t-26*s-110=0],[s,t]);

(%o8) [[s=-2,t=2]]

(%i9) s:-2;t:2;

(%o9)-2

(%o10) 2

(%i11) P:[2*s-1,-2*s+2,-s];

(%o11) [-5,6,2]

(%i12) Q:[t+3,-4*t+1,t+1];

(%o12) [5,-7,3]

(%i13) PQ:[3*t-4*s-16,-4*t+3*s+9,-2*t+s+13];

(%o13) [-2,-5,7]

(%i14) sqrt(PQ. PQ);

(%o14) $\sqrt{78}$

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

※「expand ([算式] × [算式])」指令表示展開算式。

P.131

二、進階題：

7. 在座標空間中有一個正立方體 ABCD-EFGH，其中一面 EFGH 所在的平面方程式為 x-2y+2z=3，且 A 點座標為(5 , -2 , 6)，求：

(1) E 點座標

(2) 直線 AE 的對稱比例式

8. 求包含二相交直線 L_1：$\frac{x-3}{2}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{-1}$ 和 L_2：$\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{2}$ 的平面方程式

設平面法向量為(a , b , c)，代入 L_1(2a+2b-c=0)與 L_2(a+b+2c=0)，求出 a:b:c

為方便計算 a:b:c 表示成[a,b,c]

(%i1)[a,b,c]=[determinant(matrix([2,-1],[1,2])),determinant(matrix([-1,2],[2,1])),determinant(matrix([2,2],[1,1]))];

(%o1) [a,b,c]=[5,-5,0]

化簡之後 a:b:c=1:-1:0，將 L_1 上一點(3 , -2 , 1)與 L_2 上一點(3 , -2 , 1)帶入 x-y+k=0

(%i2) x:3; y:-2;

(%o2) 3

(%o3) -2

(%i4) solve([x-y+k=0],[k]);

(%o4) [k=-5]

9. 晚會需要投射兩盞燈光在舞台處交會，現在我們設定空間座標，一道燈光由點(0 , 0 , 2) 朝向 (5 , 8 , 3) 投射，另一道燈光則由點(0 , 7 , a) 沿平行x軸方向投射，試問：

(1) 當 a 為何時，兩投射燈光會交會？

一道燈光由點(0 , 7 , a) 沿平行 x 軸方向投射，故設兩燈光交點為(x , 7 , a)

(%i1) P:[0,0,2];

(%o1) [0,0,2]

(%i2) Q:[5,8,3];

(%o2) [5,8,3]

(%i3) PQ:Q-P;

(%o3) [5,8,1]

方向向量參數為(5t,8t,1t)，設兩燈光交點為(0+5t,0+8t,2+1t)

(%i4) solve([0+8*t=7],[t]);

(%o4) $[t=\frac{7}{8}]$

(%i5) x:5*(7/8);

(%o5) $\frac{35}{8}$

(%i6) a:2+(7/8);

(%o6) $\frac{23}{8}$

(2) 兩道燈光在舞台處交會的座標為何？

(%i7) [x,7,a];

(%o7) $[\frac{35}{8}, 7, \frac{23}{8}]$

2-6　一次方程組

P.132

例題 1： 驢與騾身上各揹著上百公斤的重物，他們互相埋怨，驢對騾說：只要把你背的重量給我一百公斤，我所背的就是你的兩倍；騾對驢說：沒錯，可是如果你背的給我一百公斤，我背的就是你的三倍。試問：騾與驢各背了多少公斤的重物

設驢揹著 x 公斤，騾揹著 y 公斤

(%i1) solve([x+100=2*(y-100),y+100=3*(x-100)],[x,y]);

(%o1) [[x=220,y=260]]

＊驢揹著 220 公斤，騾揹著 260 公斤

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

P.133

隨堂練習： 大和尚與小和尚共有 100 人，某天早餐它們總共吃了一百顆饅頭，只知大和尚每人吃三顆饅頭，小和尚三人吃一顆饅頭，問大和尚與小和尚分別人數為多少？

設大和尚 x 人，小和尚 y 人

(%i1) solve([x+y=100,3*x+(1/3)*y=100],[x,y]);

(%o1) [[x=25,y=75]]

＊大和尚 25 人，小和尚 75 人

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

P.134

例題 2：麵包店特賣麵包，每日中午 12 點出爐 100 個；每位顧客最多可買 3 個，其價位分別為：1 個 6 元、2 個 11 元、3 個 15 元，某日麵包已銷售一空，只知顧客為 50 位，共收入 531 元；試問購買 1 個、2 個、3 個麵包的顧客分別為多少？

設買一個麵包之客人為 x 人、二個麵包之客人為 y 人、三個麵包之客人為 y 人

(%i1) solve([x+y+z=50, x+2*y+3*z=100,6*x+11*y+15*z=531],[x,y,z]);

(%o1) [[x=19,y=12,z=19]]

＊買一個麵包之客人為 19 人、二個麵包之客人為 12 人、三個麵包之客人為 19 人

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

隨堂練習：已知某一個三位數，其 3 個數字相加的和為 10，個位數與百位數對調後得到的新數比原數多 297，百位數與十位數對調得到新數比原數少 180，求此三位數？

設個位數為 x、十位數為 y、百位數為 z

(%i1)solve([x+y+z=10,(x+10*y+100*z)-(z+10*y+100*x)=-297,(x+10*y+100*z)-(x+10*z
+100*y)=180],[x,y,z]);

(%o1) [[x=6,y=1,z=3]]

＊此數為 316

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

P.136

例題 3：利用克拉瑪公式解方程組{ 3x-2y=8 , 2x+y=3 }

(%i1) A:matrix([3,-2],[2,1]);

(%o1) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

(%i2) X:matrix([8,-2],[3,1]);

(%o2) $\begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

(%i3) Y:matrix([3,8],[2,3]);

(%o3) $\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

(%i4) x=determinant(X)/determinant(A);

(%o4) x=2

(%i5) y=determinant(Y)/determinant(A);

(%o5) y=-1

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

※「determinant(矩陣)」指令表示計算矩陣結果。

P.137

隨堂練習：利用克拉瑪公式解方程組{ 2x-5y=1 ,3x+2y=11 }

(%i1) A:matrix([2,-5],[3,2]);

(%o1) $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

(%i2) X:matrix([1,-5],[11,2]);

(%o2) $\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 11 & 2 \end{bmatrix}$

(%i3) Y:matrix([2,1],[3,11]);

(%o3) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 11 \end{bmatrix}$

(%i4) x=determinant(X)/determinant(A);

(%o4) x=3

(%i5) y=determinant(Y)/determinant(A);

(%o5) y=1

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

※「determinant(矩陣)」指令表示計算矩陣結果。

P.138

例題 4：求行列式 $\begin{vmatrix} 33 & 44 \\ 45 & 61 \end{vmatrix}$ 的值

(%i1) A:matrix([33,44],[45,61]);

(%o1) $\begin{bmatrix} 33 & 44 \\ 45 & 61 \end{bmatrix}$

(%i2) determinant(A);

(%o2) 33

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

※「determinant(矩陣)」指令表示計算矩陣結果。

P.139

隨堂練習：求行列式 $\begin{vmatrix} 1234 & 1236 \\ 1237 & 1239 \end{vmatrix}$ 的值

(%i1) A:matrix([1234,1236],[1237,1239]);

(%o1) $\begin{bmatrix} 1234 & 1236 \\ 1237 & 1239 \end{bmatrix}$

(%i2) determinant(A);

(%o2) -6

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

※「determinant(矩陣)」指令表示計算矩陣結果。

P.140

例題 5： 已知$\vec{u}=(2,-5)$和$\vec{v}=(3,2)$，求以向量$\vec{u}$和$\vec{v}$為鄰邊的平行四邊形面積

(%i1) determinant(matrix([2,-5],[3,2]));

(%o1) 19

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

※「determinant(矩陣)」指令表示計算矩陣結果。

例題 6： 已知△ABC 三頂點座標為 A (-2 , 1)、B (2 , 2)與 C (-1 , -2)，求△ABC 的面積

(%i1)A:[-2,1]; B:[2,2]; C:[-1,-2];

(%o1) [-2,1]

(%o2) [2,2]

(%o3) [-1,-2]

(%i4) AB:B-A;

(%o4) [4,1]

(%i5) AC:C-A;

(%o5) [1,-3]

(%i6) area=(1/2)*abs(determinant(matrix(AB,AC)));

(%o6) $area=\frac{13}{2}$

※「abs(數值)」指令表示絕對值。

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

※「determinant(矩陣)」指令表示計算矩陣結果。

隨堂練習： 已知△ABC 三頂點座標為 A (3 , 1)、B (2 , 4)與 C (5 , -2)，求△ABC 的面積

(%i1)A:[3,1]; B:[2,4]; C:[5,-2];

(%o1) [3,1]

(%o2) [2,4]

(%o3) [5,-2]

(%i4) AB:B-A;

(%o4) [-1,3]

(%i5) AC:C-A;

(%o5) [2,-3]

(%i6) area=(1/2)*abs(determinant(matrix(AB,AC)));

(%o6) $area = \frac{3}{2}$

※「abs(數值)」指令表示絕對值。

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

※「determinant(矩陣)」指令表示計算矩陣結果。

P.143

例題 7： 利用高斯消去法解方程組{ 2x+y+2z=5 ; x-y-2z=1 ; 3x+y-4z=1 }

定義上述三組方程式，分別 F1=2x+y+2z=5、F2=x-y-2z=1、F3=3x+y-4z=1；之後只須建入 F1、F2、F3 就會顯示該參數對應之方程式

(%i1)F1: 2*x+y+2*z=5; F2: x-y-2*z=1; F3: 3*x+y-4*z=1;

(%o1) 2z+y+2x=5

(%o2) -2z-y+x=1

(%o3) -4z+y+3x=1

[F1,F2,F3]為轉換的線性方程，[x,y,z]為轉換的參數；

augcoefmatrix 指令為加入擴增矩陣(此矩陣含常數項)；

M 定義為方程組轉換後的增廣矩陣

(%i4) M:augcoefmatrix([F1,F2,F3],[x,y,z]);

(%o4) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & -4 & -1 \end{bmatrix}$

擴增矩陣的常數項應為(-5, -1, -1)，maxima 結果為(5, 1, 1)，其正負號相反

將矩陣 M 進行轉置，再將第 4 列乘上負號，再轉置回來

(%i5) M:transpose(M);

(%o5) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -4 \\ -5 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

M[4]代表著矩陣 M 的第 4 列

(%i6) M[4]:M[4]*(-1);

(%o6) [5,1,1]

(%i7) M:transpose(M);

(%o7) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 & 1 \end{bmatrix}$

高斯消去法是把矩陣 M_{11}、M_{22}、M_{33} 化為 1

(新第一列定義為原矩陣第一列減第二列-得 M_{11} 為 1)

<u>＊其中$表示不顯示$之前之計算結果，只顯示$之後之計算結果</u>

(%i8) M[1]:M[1]-M[2]$M;

(%o8) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 & 1 \end{bmatrix}$

(新第二列定義為原矩陣第二列減第二列-得 M_{21} 為 0)

(%i9) M[2]:M[2]-M[1]$M;

(%o9) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \\ 3 & 1 & -4 & 1 \end{bmatrix}$

(新第三列定義為原矩陣第三列減第一列乘 3-得 M_{31} 為 0)

(%i10) M[3]:M[3] -M[1]*3$M;

(%o10) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \\ 0 & -5 & -16 & -11 \end{bmatrix}$

(新第一列定義為原矩陣第一列加第三列乘(2/5)-得 M_{12} 為 0)

(%i11) M[1]:M[1]+M[3]*(2/5)$M;

(%o11) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{12}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & -3 & -6 & -3 \\ 0 & -5 & -16 & -11 \end{bmatrix}$

(新第二列定義為原矩陣第二列加第三列乘(-4/5)-得 M_{22} 為 1)

(%i12) M[2]:M[2]+M[3]*(-4/5)$M;

(%o12) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{12}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{34}{5} & -\frac{29}{5} \\ 0 & -5 & -16 & -11 \end{bmatrix}$

(新第三列定義為原矩陣第三列加第二列乘 6-得 M_{32} 為 0)

(%i13) M[3]:M[3]+M[2]*(6)$M;

(%o13) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{12}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{34}{5} & -\frac{29}{5} \\ 0 & 0 & 18 & 18 \end{bmatrix}$

(新第三列定義為原矩陣第三列除 18-得 M_{33} 為 1)

(%i14) M[3]:M[3]/18$M;

(%o14) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{12}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{34}{5} & -\frac{29}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(新第一列定義為原矩陣第一列加第三列乘(12/5)-得 M_{13} 為 0)

(%i15) M[1]:M[1]+M[3]*(12/5)$M;

(%o15) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{34}{5} & -\frac{29}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(新第二列定義為原矩陣第二列加第三列乘(-34/5)-得 M_{23} 為 0)

(%i16) M[2]:M[2]+M[3]*(-34/5)$M;

(%o16) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

＊可得 x=2、y=-1、z=1

※「augcoefmatrix([F1,F2,F3],[x,y,z])」指令為加入擴增矩陣 (此矩陣含常數項)，並將[F1,F2,F3]為欲轉換的線性方程，[x,y,z]為轉換的變數；

※「M:augcoefmatrix([方程式名稱 1，… ，方程式名稱 n]，[未知數 1，… ，未知數 n])」指令表示方程組轉換後的增廣矩陣名稱定為 M，方程式有 1，… ，n 而未知數有未知數 1，… ，未知數 2，未知數 3。

※「transpose (矩陣)」指令表示將 $M_{n \times m}$ 轉置(行列互換)成 $M_{m \times n}$。

P.145

隨堂練習：利用高斯消去法解方程組{ 3x+8y+5z=3 ; x+2y+z=1 ; x+y+2z=3 }

定義上述三組方程式，分別 F1=3x+8y+5z=3、F2= x+2y+z=1、F3= x+y+2z=3；之後只須建入 F1、F2、F3 就會顯示該參數對應之方程式

(%i1)F1: 3*x+8*y+5*z=3; F2: x+2*y+z=1; F3: x+y+2*z=3;

(%o1) 5z+8y+3x=3

(%o2) z+2y+x=1

(%o3) 2z+y+x=3

[F1,F2,F3]為轉換的線性方程，[x,y,z]為轉換的參數；

augcoefmatrix 指令為加入擴增矩陣(此矩陣含常數項)；

M 定義為方程組轉換後的增廣矩陣

(%i4) M:augcoefmatrix([F1,F2,F3],[x,y,z]);

(%o4) $\begin{bmatrix} 3 & 8 & 5 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

擴增矩陣的常數項應為(3, 1, 3)，maxima 結果為(-3, -1, -3)，其正負號相反

將矩陣 M 進行轉置，再將第 4 列乘上負號，再轉置回來

(%i5) M:transpose(M);

(%o5) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 8 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & -3 \end{bmatrix}$

M[4]代表著矩陣 M 的第 4 列

(%i6) M[4]:M[4]*(-1);

(%o6) [3,1,3]

(%i7) M:transpose(M);

(%o7) $\begin{bmatrix} 3 & 8 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

高斯消去法是把矩陣 M_{11}、M_{22}、M_{33} 化為 1

<u>＊其中$表示不顯示$之前之計算結果，只顯示$之後之計算結果</u>

(新第一列定義為原矩陣第一列減第二列乘 2-得 M_{11} 為 1)

(%i8) M[1]:M[1]-M[2]*2$M;

(%o8) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

(新第二列定義為原矩陣第二列減第三列-得 M_{21} 為 0、M_{22} 為 1)

(%i9) M[2]:M[2]-M[3]$M;

(%o9) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

(新第三列定義為原矩陣第三列減第一列-得 M_{31} 為 0)

(%i10) M[3]:M[3] -M[1] $M;

(%o10) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

(新第一列定義為原矩陣第一列減第二列乘 4-得 M_{12} 為 0)

(%i11) M[1]:M[1]-M[2]*4$M;

(%o11) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

(新第三列定義為原矩陣第三列加第二列乘 3-得 M_{32} 為 0)

(%i12) M[3]:M[3]+M[2]*3$M;

(%o12) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{bmatrix}$

(新第三列定義為原矩陣第三列除(-4)-得 M_{33} 為 1)

(%i13) M[3]:M[3]/-4$M;

(%o13) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(新第一列定義為原矩陣第一列減第三列乘 7-得 M_{13} 為 0)

(%i14) M[1]:M[1]-M[3]*7$M;

(%o14) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(新第二列定義為原矩陣第二列加第三列-得 M_{23} 為 0)

(%i15) M[2]:M2]+M[3] $M;

(%o15) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

＊可得 x=2、y=-1、z=1

※「augcoefmatrix([F1,F2,F3],[x,y,z])」指令為加入擴增矩陣 (此矩陣含常數項)，並將[F1,F2,F3]為欲轉換的線性方程，[x,y,z]為轉換的變數；

※「M:augcoefmatrix([方程式名稱 1，…，方程式名稱 n]，[未知數 1，…，未知數 n])」指令表示方程組轉換後的增廣矩陣名稱定為 M，方程式有 1，…，n 而未知數有未知數 1，…，未知數 2，未知數 3。

※「transpose (矩陣)」指令表示將 $M_{n\times m}$ 轉置(行列互換)成 $M_{m\times n}$。

P.145

例題 8：解方程組{ y+2z=3 ; x+2y-z=4 ; x+3y+z=5 }

方法一：

(%i1) solve([y+2*z=3,x+2*y-z=4,x+3*y+z=5],[x,y,z]);

(%o1) []

＊本題無解

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

方法二：

定義上述三組方程式，分別 F1=y+2z=3、F2=x+2y-z=4、F3=x+3y+z=5；未來只須建入 F1、F2、F3 就會顯示該參數對應之方程式

(%i1)F1: y+2*z=3; F2: x+2*y-z=4; F3: x+3*y+z=5;

(%o1) 2z+y=3

(%o2) -z+2y+x=4

(%o3) z+3y+x=5

[F1,F2,F3]為轉換的線性方程，[x,y,z]為轉換的參數；

augcoefmatrix 指令為加入擴增矩陣(此矩陣含常數項)；

M 定義為方程組轉換後的增廣矩陣

(%i4) M:augcoefmatrix([F1,F2,F3],[x,y,z]);

(%o4) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & -4 \\ 1 & 3 & 1 & -5 \end{bmatrix}$

擴增矩陣的常數項應為(3, 4, 5)，maxima 結果為(-3, -4, -5)，其正負號相反

將矩陣 M 進行轉置，再將第 4 列乘上負號，再轉置回來

(%i5) M:transpose(M);

(%o5) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & -4 & -5 \end{bmatrix}$

M[4]代表著矩陣 M 的第 4 列

(%i6) M[4]:M[4]*(-1);

(%o6) [3,4,5]

(%i7) M:transpose(M);

(%o7) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

高斯消去法是把矩陣 M_{11}、M_{22}、M_{33} 化為 1

(新第一列定義為原矩陣第一列減第二列-得 M_{11} 為 1)

<u>＊其中$表示不顯示$之前之計算結果，只顯示$之後之計算結果</u>

將第一列與第二列互換使 M_{11}、M_{22} 為 1

(%i8) M[1]:[1,2,-1,4];

(%o8) [1,2,-1,4]

(%i9) M[2]:[0,1,2,3];

(%o9) [0,1,2,3]

(%i10) M;

(%o10) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

(新第三列定義為原矩陣第三列減第一列-得 M_{31} 為 0)

(%i11) M[3]:M[3]-M[1]$M;

(%o11) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(新第一列定義為原矩陣第一列減第三列乘 2-得 M_{12} 為 0)

(%i12) M[1]:M[1] -M[3]*2$M;

(%o12) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(新第三列定義為原矩陣第三列減第二列-得 M_{32} 為 0)

(%i13) M[3]:M[3]-M[2] $M;

(%o13) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

＊由第三列可得 0z=-2，得知此方程組無解

※「augcoefmatrix([F1,F2,F3],[x,y,z])」指令為加入擴增矩陣 (此矩陣含常數項)，並將[F1,F2,F3]為欲轉換的線性方程，[x,y,z]為轉換的變數；

※「M:augcoefmatrix([方程式名稱 1，…，方程式名稱 n]，[未知數 1，…，未知數 n])」指令表示方程組轉換後的增廣矩陣名稱定為 M，方程式有 1，…，n 而未知數有未知數 1，…，未知數 2，未知數 3。

※「transpose (矩陣)」指令表示將 $M_{n\times m}$ 轉置(行列互換)成 $M_{m\times n}$。

P.146

例題 9：解方程組{ x+y+z=4 ; x+2y+3z=5 ; 2x+3y+4z=9 }

方法一：

(%i1) solve([x+y+z=4,x+2*y+3*z=5,2*x+3*y+4*z=9],[x,y,z]);

solve: dependent equations eliminated: (3)

(%o1) [[x=%r1+3,y=1-2*%r1,z=%r1]]

＊其中%r1 代表任一常數，故本題為無限多解

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

方法二：

定義上述三組方程式，分別 F1= x+y+z=4、F2= x+2y+3z=5、F3=2x+3y+4z=9；未來只須建入 F1、F2、F3 就會顯示該參數對應之方程式

(%i1)F1: x+y+z=4; F2: x+2*y+3*z=5; F3: 2*x+3*y+4*z=9;

(%o1) z+y+x=4

(%o2) 3z+2y+x=5

(%o3) 4z+3y+2x=9

[F1,F2,F3]為轉換的線性方程，[x,y,z]為轉換的參數；

augcoefmatrix 指令為加入擴增矩陣(此矩陣含常數項)；

M 定義為方程組轉換後的增廣矩陣

(%i4) M:augcoefmatrix([F1,F2,F3],[x,y,z]);

(%o4) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 3 & -5 \\ 2 & 3 & 4 & -9 \end{bmatrix}$

擴增矩陣的常數項應為(4, 5, 9)，maxima 結果為(-4, -5, -9)，其正負號相反

將矩陣 M 進行轉置，再將第 4 列乘上負號，再轉置回來

(%i5) M:transpose(M);

(%o5) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ -4 & -5 & -9 \end{bmatrix}$

M[4]代表著矩陣 M 的第 4 列

(%i6) M[4]:M[4]*(-1);

(%o6) [4,5,9]

(%i7) M:transpose(M);

(%o7) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 9 \end{bmatrix}$

高斯消去法是把矩陣 M_{11}、M_{22}、M_{33} 化為 1

(新第一列定義為原矩陣第一列減第二列-得 M_{11} 為 1)

<u>＊其中$表示不顯示$之前之計算結果，只顯示$之後之計算結果</u>

(新第二列定義為原矩陣第二列減第一列-得 M_{21} 為 0)

(%i8) M[2]:M[2]-M[1]$M;

(%o8) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 9 \end{bmatrix}$

(新第三列定義為原矩陣第三列減第一列乘 2-得 M_{31} 為 0)

(%i9) M[3]:M[3]-M[1]*2$M;

(%o9) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(新第三列定義為原矩陣第三列減第二列)

(%i10) M[3]:M[3]-M[2] $M;

(%o10) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

＊3 個變數，只有二方程式，故得知此方程組無限多解

※「augcoefmatrix([F1,F2,F3],[x,y,z])」指令為加入擴增矩陣 (此矩陣含常數項)，並將[F1,F2,F3]為欲轉換的線性方程，[x,y,z]為轉換的變數；

※「M:augcoefmatrix([方程式名稱 1，…，方程式名稱 n]，[未知數 1，…，未知數 n])」指令表示方程組轉換後的增廣矩陣名稱定為 M，方程式有 1，…，n 而未知數有未知數 1，…，未知數 2，未知數 3。

※「transpose (矩陣)」指令表示將 $M_{n\times m}$ 轉置(行列互換)成 $M_{m\times n}$。

P.147 $\boxed{\textbf{習題 2-6}}$

一、基礎題：

1. 有關於二階行列式，下列哪些選項是正確的？

(1) $\begin{vmatrix} 3 & 456 \\ 123 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 123 \\ 456 & 7 \end{vmatrix}$

(%i1) if determinant(matrix([3,456],[123,7]))= determinant(matrix([3,123],[456,7])) then answer=yes else answer=no;

(%o1) answer=yes

(2) $\begin{vmatrix} 3a & 3b \\ 3c & 3d \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

(%i2) if determinant(matrix([3*a,3*b],[3*c,3*d]))=3*determinant(matrix([a,b],[c,d])) then answer=yes else answer=no;

(%o2) answer=no

(3) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = 0$

(%i3) if determinant(matrix([a,b],[c,d]))+determinant(matrix([c,d],[a,b]))=0 then answer=yes else answer=no;

(%o3) answer=yes

(4) $\begin{vmatrix} 3a & 5a \\ 3c & 5c \end{vmatrix} = 0$

(%i4) if determinant(matrix([3*a,5*a],[3*c,5*c])) =0 then answer=yes else answer=no;

(%o4) answer=yes

(5) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+10b & b \\ c+10d & d \end{vmatrix}$

(%i5) if determinant(matrix([a,b],[c,d]))= expand(determinant(matrix([a+10*b,b],[c+10*d,d]))) then answer=yes else answer=no;

(%o5) answer=yes

＊本題需要整理原式，否則 maxima 無法判斷，其答案會變成 no

＊上述判別式表示如果等號成立，其結果顯示 answer=yes，否則(等號不成立)，結果顯示 answer=no

※「expand ([算式] × [算式])」指令表示展開算式。

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

※「determinant(矩陣)」指令表示計算矩陣結果。

2. 求下列各行列式的值

(1) $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$

(%i1) determinant(matrix([3, 6],[4,7]));

(%o1) -3

(2) $\begin{vmatrix} 44 & 55 \\ 26 & 39 \end{vmatrix}$

(%i2) determinant(matrix([44, 55],[26,39]));

(%o2) 286

(3) $\begin{vmatrix} 234 & 235 \\ 236 & 237 \end{vmatrix}$

(%i2) determinant(matrix([234, 235],[236,237]));

(%o2) -2

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

※「determinant(矩陣)」指令表示計算矩陣結果。

3. 使用克拉瑪公式，求下列一次方程組的解

(1) { x-4y=11 , 4x+3y=6 }

(%i1) A:matrix([1,-4],[4,3]);

(%o1) $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

(%i2) X:matrix([11,-4],[6,3]);

(%o2) $\begin{bmatrix} 11 & -4 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$

(%i3) Y:matrix([11,1],[6,4]);

(%o3) $\begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$

(%i4) x=determinant(X)/determinant(A);

(%o4) x=3

(%i5) y=determinant(Y)/determinant(A);

(%o5) y=2

(2) { 5x-4y=3 , 3x+2y=-7 }

(%i1) A:matrix([5,-4],[3,2]);

(%o1) $\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

(%i2) X:matrix([3,-4],[-7,2]);

(%o2) $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$

(%i3) Y:matrix([3,5],[-7,3]);

(%o3) $\begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$

(%i4) x=determinant(X)/determinant(A);

(%o4) x=-1

(%i5) y=determinant(Y)/determinant(A);

(%o5) y=2

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

※「determinant(矩陣)」指令表示計算矩陣結果。

4. 設△ABC 三頂點座標為 A (3 , 1)、B (2 , 3)與 C (x , -1)，且△ABC 的面積為 7，求 x 的值

(%i1)A:[3,1]; B:[2,3]; C:[x,-1];

(%o1) [3,1]

(%o2) [2,3]

(%o3) [x,-1]

(%i4) AB:B-A;

(%o4) [-1,2]

(%i5) AC:C-A;

(%o5) [x-3,-2]

(%i6) solve([(1/2)*abs(determinant(matrix(AB,AC)))=7],[x]);

(%o6) [$|2x-8|=14$]

(%i7) load (fourier_elim)

(%o7) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier_elim/fourier_elim.lisp

(%i8) fourier_elim([abs(2*x-8)=14],[x]);

(%o8) [x=11] or [x=-3]

※「abs(數值)」指令表示絕對值。

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

※「determinant(矩陣)」指令表示計算矩陣結果。

※「load (fourier_elim)」指令可執行不等式計算，須先載入。

※「fourier_elim([變數算式], [變數])([變數算式], [變數])」求解不等式。

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

P.148

5. 求下列各三元一次方程組的解：

(1) { 2x-3y+4z=8 ; 4x+3y-z=7 ; x+2y+2z =11 }

方法一：

(%i1) solve([2*x-3*y+4*z=8, 4*x+3*y-z=7, x+2*y+2*z =11],[x,y,z]);

(%o1) [[x=1,y=2,z=3]]

方法二：

定義上述三組方程式，分別 F1=2x-3y+4z=8、F2=4x+3y-z=7、F3= x+2y+2z =11；之後只須建入 F1、F2、F3 就會顯示該參數對應之方程式

(%i1) F1: 2*x-3*y+4*z=8; F2: 4*x+3*y-z=7; F3: x+2*y+2*z =11;

(%o1) 4z-3y+2x=8

(%o2) -z+3y+4x=7

(%o3) 2z+2y+x=11

[F1,F2,F3]為轉換的線性方程，[x,y,z]為轉換的參數；

augcoefmatrix 指令為加入擴增矩陣(此矩陣含常數項)；

M 定義為方程組轉換後的增廣矩陣

(%i4) M:augcoefmatrix([F1,F2,F3],[x,y,z]);

(%o4) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & -8 \\ 4 & 3 & -1 & -7 \\ 1 & 2 & 2 & -11 \end{bmatrix}$

擴增矩陣的常數項應為(8, 7, 11)，maxima 結果為(-8, -7, -11)，其正負號相反

將矩陣 M 進行轉置，再將第 4 列乘上負號，再轉置回來

(%i5) M:transpose(M);

(%o5) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \\ -8 & -7 & -11 \end{bmatrix}$

M[4]代表著矩陣 M 的第 4 列

(%i6) M[4]:M[4]*(-1);

(%o6) [8,7,11]

(%i7) M:transpose(M);

(%o7) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & 8 \\ 4 & 3 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 11 \end{bmatrix}$

高斯消去法是把矩陣 M_{11}、M_{22}、M_{33} 化為 1

＊其中$表示不顯示$之前之計算結果，只顯示$之後之計算結果

(新第一列定義為原矩陣第一列減第三列-得 M_{11} 為 1)

(%i8) M[1]:M[1]-M[3] $M;

(%o8) $\begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 11 \end{bmatrix}$

(新第二列定義為原矩陣第二列減第一列乘 4-得 M_{21} 為 0)

(%i9) M[2]:M[2]-M[1]*4$M;

(%o9) $\begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 \\ 0 & 23 & -9 & 19 \\ 1 & 2 & 2 & 11 \end{bmatrix}$

(新第三列定義為原矩陣第三列減第一列-得 M_{31} 為 0)

(%i10) M[3]:M[3] -M[1] $M;

(%o10) $\begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 \\ 0 & 23 & -9 & 19 \\ 0 & 7 & 0 & 14 \end{bmatrix}$

(新第一列定義為原矩陣第一列加第三列乘(5/7)-得 M_{12} 為 0)

(%i11) M[1]:M[1]+M[3]*(5/7)$M;

(%o11) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 23 & -9 & 19 \\ 0 & 7 & 0 & 14 \end{bmatrix}$

(新第二列定義為原矩陣第二列除 23-得 M_{22} 為 1)

(%i12) M[2]:M[2]/23$M;

(%o12) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & \frac{-9}{23} & \frac{19}{23} \\ 0 & 7 & 0 & 14 \end{bmatrix}$

(新第三列定義為原矩陣第三列減第二列乘 7 -得 M_{32} 為 0)

(%i13) M[3]:M[3]- M[2]*7$M;

$$(\%o13)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & \frac{-9}{23} & \frac{19}{23} \\ 0 & 0 & \frac{63}{23} & \frac{189}{23} \end{bmatrix}$$

(新第三列定義為原矩陣第三列乘(23/63)-得 M_{33} 為 1)

(%i14) M[3]: M[3]*(23/63)$M;

$$(\%o14)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & \frac{-9}{23} & \frac{19}{23} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(新第一列定義為原矩陣第一列減第三列*2-得 M_{13} 為 0)

(%i15) M[1]:M[1]-M[3]*2 $M;

$$(\%o15)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{-9}{23} & \frac{19}{23} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(新第二列定義為原矩陣第二列加第三列*(9/23)-得 M_{23} 為 0)

(%i16) M[2]:M[2]+M[3]* (9/23) $M;

$$(\%o16)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

＊可得 x=1、y=2、z=3

(2) { x+2y+3z=13 ; 2x+3y+z=10 ; 3x+y+2z =13 }

方法一：

(%i1) solve([x+2*y+3*z=13, 2*x+3*y+z=10, 3*x+y+2*z =13],[x,y,z]);

(%o1) [[x=2,y=1,z=3]]

方法二：

定義上述三組方程式，分別 F1= x+2y+3z=13、F2=2x+3y+z=10、F3= 3x+y+2z =13；

之後只須建入 F1、F2、F3 就會顯示該參數對應之方程式

(%i1) F1: x+2*y+3*z=13; F2: 2*x+3*y+z=10; F3: 3*x+y+2*z =13;

(%o1) 3z+2y+x=13

(%o2) z+3y+2x=10

(%o3) 2z+y+3x=13

[F1,F2,F3]為轉換的線性方程，[x,y,z]為轉換的參數；

augcoefmatrix 指令為加入擴增矩陣(此矩陣含常數項)；

M 定義為方程組轉換後的增廣矩陣

(%i4) M:augcoefmatrix([F1,F2,F3],[x,y,z]);

(%o4) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -13 \\ 2 & 3 & 1 & -10 \\ 3 & 1 & 2 & -13 \end{bmatrix}$

擴增矩陣的常數項應為(13, 10, 13)，maxima 結果為(-13, -10, -13)，其正負號相反

將矩陣 M 進行轉置，再將第 4 列乘上負號，再轉置回來

(%i5) M:transpose(M);

(%o5) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -13 & -10 & -13 \end{bmatrix}$

M[4]代表著矩陣 M 的第 4 列

(%i6) M[4]:M[4]*(-1);

(%o6) [13,10,13]

(%i7) M:transpose(M);

(%o7) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 13 \\ 2 & 3 & 1 & 10 \\ 3 & 1 & 2 & 13 \end{bmatrix}$

高斯消去法是把矩陣 M_{11}、M_{22}、M_{33} 化為 1

＊其中$表示不顯示$之前之計算結果，只顯示$之後之計算結果

將第二列與第三列互換使 M_{22}、M_{33} 為 1

(%i8) M[2]:[3,1,2,13];

(%o8) [3,1,2,13]

(%i9) M[3]:[2,3,1,10]$M;

(%o9) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 13 \\ 3 & 1 & 2 & 13 \\ 2 & 3 & 1 & 10 \end{bmatrix}$

(新第二列定義為原矩陣第二列減第一列*3-得 M_{21} 為 0)

(%i8) M[2]:M[2]-M[1]*3 $M;

(%o8) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 13 \\ 0 & -5 & -7 & -26 \\ 2 & 3 & 1 & 10 \end{bmatrix}$

(新第三列定義為原矩陣第三列減第一列乘 2-得 M_{31} 為 0)

(%i9) M[3]:M[3]-M[1]*2$M;

(%o9) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 13 \\ 0 & -5 & -7 & -26 \\ 2 & 3 & 1 & 10 \end{bmatrix}$

(新第三列定義為原矩陣第三列減第一列乘 2-得 M_{31} 為 0)

(%i10) M[3]:M[3] -M[1]*2 $M;

(%o10) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 13 \\ 0 & -5 & -7 & -26 \\ 0 & -1 & -5 & -16 \end{bmatrix}$

(新第一列定義為原矩陣第一列加第三列乘 2-得 M_{12} 為 0)

(%i11) M[1]:M[1]+M[3]*2$M;

(%o11) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 & -19 \\ 0 & -5 & -7 & -26 \\ 0 & -1 & -5 & -16 \end{bmatrix}$

(新第二列定義為原矩陣第二列減第三列乘 6-得 M_{22} 為 1)

(%i12) M[2]:M[2]-M[3]*6$M;

(%o12) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 & -19 \\ 0 & 1 & 23 & 70 \\ 0 & -1 & -5 & -16 \end{bmatrix}$

(新第三列定義為原矩陣第三列加第二列-得 M_{32} 為 0)

(%i13) M[3]:M[3]+M[2] $M;

(%o13) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 & -19 \\ 0 & 1 & 23 & 70 \\ 0 & 0 & 18 & 54 \end{bmatrix}$

(新第三列定義為原矩陣第三列除 18-得 M_{33} 為 1)

(%i14) M[3]: M[3]/18$M;

$$(\%o14)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 & -19 \\ 0 & 1 & 23 & 70 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(新第一列定義為原矩陣第一列加第三列*7-得 M_{13} 為 0)

(%i15) M[1]:M[1]+M[3]*7 $M;

$$(\%o15)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 23 & 70 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(新第二列定義為原矩陣第二列減第三列*23-得 M_{23} 為 0)

(%i16) M[2]:M[2]-M[3]*23 $M;

$$(\%o16)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

＊可得 x=2、y=1、z=3

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

※「augcoefmatrix([F1,F2,F3],[x,y,z])」指令為加入擴增矩陣 (<u>此矩陣含常數項</u>)，並將[F1,F2,F3]為欲轉換的線性方程，[x,y,z]為轉換的變數；

※「M:augcoefmatrix([方程式名稱 1，…，方程式名稱 n]，[未知數 1，…，未知數 n])」指令表示方程組轉換後的增廣矩陣名稱定為 M，方程式有 1，…，n 而未知數有未知數 1，…，未知數 2，未知數 3。

※「transpose (矩陣)」指令表示將 $M_{n\times m}$ 轉置(行列互換)成 $M_{m\times n}$。

二、進階題：

6. 路口閃黃燈的秒數以 $f(v)$ 表示，$f(v)$ (秒)定義為 $f(v)=\frac{v}{a}+\frac{b}{v}+1$，其中 v 為該路段的

速度限制(公里/小時)，正實數 a、b 則由該路面的摩擦係數與路口寬度來決定，某都市一個路口一直根據此公式來定閃黃燈秒數。幾年前，當該路段的速度限制為每小時 60 公里時，閃黃燈秒數定為 4 秒；最近該路口的速度限制改為每小時 40 公里，閃黃燈秒數亦修正為 3.5 秒，求 a、b 的值

(%i1) solve([4=60/a+b/60+1, 3.5=40/a+b/40+1],[a,b]);

rat: replaced 2.5 by 5/2 = 2.5

(%o1) [[a=25,b=36]]

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

7. 有一工程，甲乙丙三人合作，10 天可完成；若乙丙兩人合作，15 天可以完成；如甲做 15 天，剩下工程由丙來做，要再 30 天才完成。問甲乙丙三人獨做，各需多少天才能完成？

設完成工程為 1，甲一天工作量為 x、乙一天工作量為 y、丙一天工作量為 z

(%i1) solve([10*x+10*y+10*z=1, 15*y+15*z=1, 15*x+30*z =1],[x,y,z]);

(%o1) [[x=1/30,y=1/20,z=1/60]]

設甲獨自須要 a 天完成工程、乙獨自須要 b 天、丙獨自須要 c 天

(%i2) solve([1/30*a=1, 1/20*b=1, 1/60*c=1],[a,b,c]);

(%o2) [[a=30,b=20,c=60]]

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

P.149

第二章　綜合練習

一、概念題

1. 下面哪一點到平面 E：x+2y+5z=0 的距離最短？

(1) (3 , 0 , 0)

(%i1) abs (1*3+2*0+5*0-0)/sqrt(1^2+2^2+5^2);

(%o1) $\frac{4}{\sqrt{30}}$

(2) (0 , 2 , 0)

(%i2) abs (1*0+2*2+5*0-0)/ sqrt(1^2+2^2+5^2);

(%o2) $\frac{3}{\sqrt{30}}$

(3) (0 , 0 , 1)

(%i1) abs (1*0+2*0+5*1)/ sqrt(1^2+2^2+5^2);

(%o1) $\frac{5}{\sqrt{30}}$

(4) (1 , 1 , 1)

(%i1) abs (1*1+2*1+5*1)/ sqrt(1^2+2^2+5^2);

(%o1) $\frac{8}{\sqrt{30}}$

(5) (2 , 1 , -1)

(%i1) abs (1*2+2*1+5*-1)/ sqrt(1^2+2^2+5^2);

(%o1) $\frac{1}{\sqrt{30}}$

※「abs(數值)」指令表示絕對值。

2. 已知座標空間中二直線 L_1：{ x=5 ; y=10 }和 L_2：{ y=10 ; z=20 }，下列哪些選項是正確的

(1) L_1 與 L_2 平行

(2) L_1 與 L_2 歪斜

(3) L_1 與 L_2 交於一點

(4) L_1 與 xy 平面交於一點

(5) L_1 與 z 軸平行

3. 下列哪些選項中的直線與平面 E：2x-y+3z=4 垂直？

(1) L_1\{ x=2t ; y=1-t ; z=3t \}(t 為實數)

(2) L_2\{ x=t ; y=-t ; z=-t \}(t 為實數)

(3) L_3：$\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-1}{-1}$

(4) L_4：$\frac{x-2}{4}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-1}{6}$

(5) L_5\{ x+2y=0 ; x-y-z=0 \}

P.150

二、程序題

4. 若一平面通過已知線段的中點，且與此線段垂直，我們稱此平面為該線段的垂直平分面，已知座標空間中兩點 P (2 , 1 , 3) 與 Q (4 , 5 , 5)，求$\overline{PQ}$的垂直平分面方程式

(%i1) P:[2,1,3];

(%o1) [2,1,3]

(%i2) Q:[4,5,5];

(%o2) [4,5,5]

(%i3) PQ:Q-P;

(%o3) [2,4,2]

所求為$\overline{PQ}$的垂直平分面，故先求出$\overline{PQ}$中點 R 帶入求出$\overline{PQ}$之法向量[2,4,2]，化簡後為[1,2,1]

(%i4) R:[(4+2)/2,(1+5)/2,(3+5)/2];

(%o4) [3,3,4]

(%i5) x:3; y:3; z:4;

(%o5) 3

(%o6) 3

(%o7) 4

(%i8) solve([1*x+2*y+1*z+k=0],[k]);

(%o8) [k=-13]

＊$\overline{PQ}$的垂直平分面方程式為 x+2y+z-13=0

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

5. 已知平面 E 通過(2 , 0 , 0)、(0 , 1 , 0)與(2 , -1 , 3)三點，求平面 E 與 z 軸的交點座標

利用截距式求出 z：

(%i1) x:2; y:-1; z:3;

(%o1) 2

(%o2) -1

(%o3) 3

(%i1) solve([x/2+y/1+z/c=1],[c]);

(%o1) [c=3]

＊平面 E 與 z 軸的交點座標為(0 , 0 , 3)

6. 已知兩直線 L_1：$\frac{x-3}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-2}{-1}$與 L_2：$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-a}{-2}$交於一點，求 a 的值

由題目可知 L_1 之對稱比例式可寫成如下：(其中 s 為實數)

(%i1) L1:[2*s+3,s+3,-s+2];

(%o1) [2s+3,s+3,2-s]

由題目可知 L_2 之對稱比例式可寫成如下：(其中 t 為實數)

(%i2) L2:[t+1,t+2,-2*t+a];

(%o2) [t+1,t+2,a-2t]

(%i3) solve([2*s+3= t+1, s+3= t+2],[t,s]);

(%o3) [[t=0,s=-1]]

(%i4) t:0; s:-1;

(%o4) 0

(%o5) -1

(%i6) L1:[2*s+3,s+3,-s+2];

(%o6) [1,2,3]

(%i7) L2:[t+1,t+2,-2*t+a];

(%o7) [1,2,a]

(%i8) solve([3=a],[a]);

(%o8) [a=3]

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

7. 已知 $\begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 1 & 2-x \end{vmatrix}=0$，求 x 的值

(%i1) solve([determinant(matrix([1-x, 2],[1,2-x]))=0],[x]);

(%o1) [x=0,x=3]

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

※「determinant(矩陣)」指令表示計算矩陣結果。

※「matrix([a_{11},a_{12},⋯,a_{1m}],⋯, [a_{n1},a_{n2},⋯,a_{nm}])」指令表示 n×m 矩陣。

三、數學解題

8. 如右圖，已知 ABCD 為正立方體的一個面，P、Q 分別為$\overline{BC}$、$\overline{CD}$的中點，O 為正立方體的中心，求 cos(∠POQ)的值

設正立方體每邊長為 2，O 座標為(1 , 1 , 1)

(%i1) O:[1,1,1];

(%o1) [0,0,0]

(%i2) P:[0,2,1];

(%o2) [0,2,1]

(%i3) Q:[1,2,0];

(%o3) [1,2,0]

(%i4) OQ:Q-O;

(%o4) [0,1,-1]

(%i5) OP:P-O;

(%o5) [-1,1,0]

(%i6) solve([cos(x/180*%pi)=(OQ. OP)/(((OQ. OQ))^(1/2)).(((OP. OP))^(1/2))],[x]);

solve: using arc-trig functions to get a solution.

Some solutions will be lost.

(%o6) [x=60]

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

9. ABCD-EFGH 為邊長等於 12 的正立方體，若 P 點在立方體內部且滿足 $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$ ，則 P 點至直線 AB 的距離為何？

10. 已知三種合金 A、B、C 其成分(依重量區分)，如果要用此三種合金製造另一合

金 9 公斤，使金、銀、鋁的含量一樣，問 A、B、C 三種合金各需多少公斤？

(A：金-5 份、銀-2 份、鋁-1 份；B：金-2 份、銀-5 份、鋁-1 份；C：金-3 份、銀-1 份、鋁-4 份)

設 A 合金使用 x 公斤、B 合金使用 y 公斤、C 合金使用 z 公斤；最後 9 公斤合金其金、銀、鋁的含量一樣，故每種成分為 3 公斤

(%i1)solve([(5/8)*x+(2/8)*y+(3/8)*z=3,(2/8)*x+(5/8)*y+(1/8)*z=3,(1/8)*x+(1/8)*y+(4/8)*z=3],[x,y,z]);

(%o1) $[[x=\frac{1}{3}, y=\frac{11}{3}, z=5]]$

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

第三章　球與圓

3-1　圓的方程式

P.155

例題 1：求符合下列條件的圓方程式：

(1) 以點(2 , -3)為圓心，半徑為 4 的圓

(%i1) h:2; k:-3; r:4;

(%o1) 2

(%o2) -3

(%o3) 4

(%i4) (x-h)^2+(y-k)^2=r^2;

(%o4) $(y+3)^2+(x-2)^2=16$

(2) 設圓 C：$(x-3)^2+(y+1)^2=1$，求與圓 C 有相同的圓心且面積為圓 C 面積兩倍的圓

(%i5) solve([2*(1*1*%pi)=(x*x*%pi)],[x]);

(%o5) $[x=-\sqrt{2}, x=\sqrt{2}]$

(%i6) (x-3)^2+(y+1)^2=sqrt(2)^2;

(%o6) $(y+1)^2+(x-3)^2=2$

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

P.156

隨堂練習：求符合下列條件的圓方程式：

(1) 以點(0 , 0)為圓心，半徑為 4 的圓

(%i1) h:0; k:0; r:4;

(%o1) 0

(%o2) 0

(%o3) 4

(%i4) (x-h)^2+(y-k)^2=r^2;

(%o4) $y^2+x^2=16$

(2) 與圓 C：$(x-3)^2+y^2=16$，有相同的圓心且圓周長為圓 C 面積一半的圓

(%i5) solve([(1/2)(4*4*%pi)=2*(x*x*%pi)],[x]);

(%o5) [x=-2,x=2]

(%i6) (x-3)^2+(y)^2= 2^2;

(%o6) $y^2+(x-3)^2=4$

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

例題 2： 求以點 M(2 , -3)為圓心，通過點 A(5 , 1)的圓方程式，並判斷 P(6 , 0)、Q(-2 , -1)、R(2 , 0)是在圓內、圓外還是圓上

(%i1) r:sqrt((5-2)^2+(1-(-3))^2);

(%o1) 5

(%i2) h:2; k:-3; r:5;

(%o2) 2

(%o3) -3

(%o4) 5

(%i5) (x-h)^2+(y-k)^2=r^2;

(%o5) $(y+3)^2+(x-2)^2=25$

P(6 , 0)

(%i6) compare(sqrt((6-2)^2+(0-(-3))^2),5);

(%o6) =

Q(-2 , -1)

(%i7) compare(sqrt(((-2)-(-2))^2+(-1-(-3)))^2),5);

(%o7) <

R(2 , 0)

(%i8) compare(sqrt((0-2)^2+(2-(-3))^2),5);

(%o8) >

＊P 點距離圓心等於半徑，故在圓上、Q 點距離圓心小於半徑，故在圓內、R 點距離圓心大於半徑，故在圓外

※「compare (A 變數,B 變數)」指令表示比較 A 變數、B 變數兩數值大小關係。

P.157

隨堂練習： 設圓 C 的方程式為 $x^2+y^2=k$

(1)若圓 C 通過 A($\sqrt{3}$, -1)，求 k 值

(%i1) k: (0-(sqrt(3)))^2+(0-(-1))^2;

(%o1) 4

(2)若 P(1 , -2)再圓 C 內部，Q(-3 , 3)在圓 C 外部，求 k 的範圍

(%i2) ((0-1)^2+(0-(-2))^2);

(%o2) 5

(%i3) ((0-(-3))^2+(0-3)^2);

(%o3) 18

＊範圍 $5 < k < 18$

例題 3： 設 A(4 , 9)、B(6 , 3)，求以 $\overline{AB}$ 為直徑的圓方程式

圓心：

(%i1)O=[(4+6)/2, (9+3)/2];

(%o1) O=[5,6]

r(半徑)

(%i2) r:(1/2)*sqrt((6-4)^2+(3-9)^2);

(%o2) r: $\sqrt{10}$

圓方程式

(%i3) h:5; k:6; r:sqrt(10);

(%o3) 5

(%o4) 6

(%o5) $\sqrt{10}$

(%i6) (x-h)^2+(y-k)^2=r^2;

(%o6) $(y-6)^2+(x-5)^2=10$

P.158

隨堂練習：設 A(2 , 3)、B(5 , -1)，求以 $\overline{AB}$ 為直徑的圓方程式

(%i1)O=[(2+5)/2, (3+(-1))/2];

(%o1) O=[$\frac{7}{2}$,1]

(%i2) r:(1/2)*sqrt((5-2)^2+((-1)-3)^2);

(%o2) $\frac{5}{2}$

(%i3) h:(7/2); k:1; r: (5/2);

(%o3) $\frac{7}{2}$

(%o4) 1

(%o5) $\frac{5}{2}$

(%i6) (x-h)^2+(y-k)^2=r^2;

(%o6) $(y-1)^2+(x-\frac{7}{2})^2=\frac{25}{4}$

例題 4：設圓 C 的方程式為 $x^2+y^2+2x-4y-4=0$，求圓 C 的圓心座標及半徑

P.158

隨堂練習：設圓 C 的方程式為 $x^2+y^2-2x+6y-6=0$，求圓 C 的圓心座標及半徑

P.159

例題 5：將下列方程式化成$(x-h)^2+(y-k)^2=l$ 的形式，並說明他所表示的圖形

(1) $x^2+y^2-2x+6y+10=0$

(2) $x^2+y^2-2x+6y+16=0$

P.160

隨堂練習：試判斷下列方程式所代表的圖形：

(1) $x^2+y^2-4x+6y-12=0$

(2) $x^2+y^2-4x+6y+13=0$

(3) $x^2+y^2-2x+6y+17=0$

例題 6：設一圓通過 A(1 , 1)、B(1 , -1)、C(-2 , 1) 三點，求此圓的方程式

圓方程式

(%i1) x:1; y:1;

(%o1)1

(%o2)1

(%i3) x^2+y^2+d*x+e*y+f=0;

(%o3) f+e+d+2=0

(%i4) x:1; y:-1;

(%o4) 1

(%o5) -1

(%i6) x^2+y^2+d*x+e*y+f=0;

(%o6) f-e+d+2=0

(%i7) x:-2; y:1;

(%o7) -2

(%o8) 1

(%i9) x^2+y^2+d*x+e*y+f=0;

(%o9) f+e-2*d+5=0

(%i10) solve([f+e+d+2=0, f-e+d+2=0, f+e-2*d+5=0],[f,e,d]);

(%o10) [[f=-3,e=0,d=1]]

(%i11) kill(all);

(%o11) done

(%i12) x^2+y^2+1*x+0*y+(-3)=0;

(%o12) $y^2+x^2+x-3=0$

＊kill(all)：將 maxima 中所有定義之數值清除。

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

P.161

隨堂練習：求通過 A(0 , 0)、B(1 , 1)、C(4 , 2) 三點圓的方程式，並求其圓心與半徑

(%i1) x:0; y:0;

(%o1) 0

(%o2) 0

(%i3) x^2+y^2+d*x+e*y+f=0;

(%o3) f=0

(%i4) x:1; y:1;

(%o4) 1

(%o5) 1

(%i6) x^2+y^2+d*x+e*y+f=0;

(%o6) f+e+d+2=0

(%i7) x:4; y:2;

(%o7) 4

(%o8) 2

(%i9) x^2+y^2+d*x+e*y+f=0;

(%o9) f+2*e+4*d+20=0

(%i10) solve([f=0,f+e+d+2=0 , f+2*e+4*d+20=0],[f,e,d]);

(%o10) [[f=0,e=6,d=-8]]

(%i11) kill(all);

(%o11) done

(%i12) x^2+y^2+(-8)*x+6*y+0=0;

(%o12) $y^2+6y+x^2-8x=0$

∗kill(all)：將 maxima 中所有定義之數值清除。

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

P.162

例題 7：將下列各圓以參數式表示：

(1) $x^2+y^2=4$

(2) $(x+2)^2+(y-1)^2=9$

例題 8：設(a , b)為圓 C：$x^2+y^2-4x-2y+4=0$ 上的點，求 $a^2+(b-1)^2$ 的最大值

P.163

隨堂練習：已知 x、y 是滿足 $x^2+y^2=9$ 的實數，求 xy 的最大值

例題 9：獵人養了黑、白兩隻獵犬，每次狩獵時都讓兩獵犬守候在相距 30 公尺的兩位置上，當獵人射中獵物時，兩獵犬皆會同時往獵物直衝，若黑獵犬的速度是白獵犬的兩倍：

(1) 兩獵犬會同時抵達獵物的所有可能點 P，會構成什麼圖形？

(2) 求小獵犬會先抵達獵物的範圍區域面積？

P.165 **習題 3-1**

一、基礎題：

1. 求下列各圓的圓心和半徑

(1) $(x-1)^2+(y+2)^2=5$

(2) $x^2+y^2+2x+4y+4=0$

(3) $9x^2+9y^2-6x-35=0$

(4) $(x-9)(x+3)+(y+1)(y-4)=0$

2. 下列何者的圖形為一圓？

(1) $x^2+y^2=4$

(2) $(x-1)^2+(y+1)^2=-4$

(3) $x^2+y^2+2x+4y+5=0$

(4) $\{ x=1+3\cos\theta \ ; y=2+3\sin\theta \}$ $(0\leqq\theta<2\pi)$

3. 求下列條件的圓方程式：

(1) 通過 (5 , 10)、 (6 , 9)、 (-2 , 3) 三點的圓

(%i1) x:5; y:10;

(%o1) 5

(%o2) 10

(%i3) x^2+y^2+d*x+e*y+f=0;

(%o3) f+10e+5d+125=0

(%i4) x:6; y:9;

(%o4) 6

(%o5) 9

(%i6) x^2+y^2+d*x+e*y+f=0;

(%o6) f+9e+6d+117=0

(%i7) x:-2; y:3;

(%o7) -2

(%o8) 3

(%i9) x^2+y^2+d*x+e*y+f=0;

(%o9) f+3e-2d+13=0

(%i10) solve([f+10*e+5*d+125=0,f+9*e+6*d+117=0 , f+3*e-2*d+13=0],[f,e,d]);

(%o10) [[f=15,e=-12,d=-4]]

(%i11) kill(all);

(%o11) done

(%i12) x^2+y^2+(-4)*x+(-12)*y+15=0;

(%o12) $y^2-12y+x^2-4x+15=0$

(2) 以 A (2 , -3)、B (-4 , 1)為直徑兩端點的圓

(%i1) O=[(2+(-4))/2, ((-3)+3)/2];

(%o1) O=[-1,0]

(%i2) r:(1/2)*sqrt(((-4)-2)^2+(1-(-3))^2);

(%o2) $\sqrt{13}$

(%i3) h:-1; k:0; r:sqrt(13);

(%o3) -1

(%o4) 0

(%o5) $\sqrt{13}$

(%i6) (x-h)^2+(y-k)^2=r^2;

(%o6) $y^2+(x+1)^2=13$

＊kill(all)：將 maxima 中所有定義之數值清除。

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

(3) 與 $x^2+y^2+2x-4y+5=0$ 同圓心，且通過點(3 , 5)的圓

(4) 通過兩點 (1 , 4)、 (0 , 3) 且圓心在 x 軸上的圓

4. 設圓 C：$x^2+(y-2)^2=9$

(1) 點 A(3 , -2) 再圓 C 內部、外部、還是圓上？

(2) 若 P 為圓 C 上一點，求 $\overline{AP}$ 的最小值

5. 已知 $x^2+y^2+2x+2y+k=0$ 的圖形為一圓，求 k 的範圍

P.166

二、進階題：

6. 兩圓 C_1：$(x+1)^2+y^2=4$ 和 C_2：$(x-5)^2+y^2=a$ 相交，求實數 a 的範圍

7. 已知 A (-3 , 0)、B (3 , 0)，若 P (x , y)為平面上的動點，且 $\overline{PA}=\sqrt{2}\overline{PB}$，求所有 P 點所成軌跡的方程式

8. 橋面上有一圓拱形建築，圓拱的寬度 $\overline{PQ}=30$ 公尺，拱高 $\overline{A_2B_2}=5$ 公尺，在距中心左右 7 公尺處各有一纜繩連接橋面，求纜繩 $\overline{A_3B_3}$ 的長

3-2 圓與直線的關係

P.168

例題 1：設圓 C：$x^2+y^2=5$，試判斷圓 C 和下列直線的相交情形：

圓 C 之圓心為(0 , 0)、半徑為 $\sqrt{5}$

(1) L_1：x-y+1=0

(%i1) d1:abs(0-0+1)/sqrt(1^2+(-1)^2);
(%o1) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(%i2) compare (d1, sqrt(5));

(%o2) <

＊直線 L_1 與圓 C 交於相異兩點

(2) L_2：x-2y-5=0

(%i3) d2:abs(0-2*0-5)/sqrt(1^2+(-2)^2);

(%o3) $\sqrt{5}$

(%i4) compare (d2, sqrt(5));

(%o4) =

＊直線 L_2 與圓 C 交於相於一點

(3) L_3：3x+4y-15=0

(%i5) d3:abs(3*0+4*0-15)/sqrt(3^2+4^2);

(%o5) 3

(%i6) compare (d3, sqrt(5));

(%o6) >

＊直線 L_3 與圓 C 不相交

※「abs(數值)」指令表示絕對值。

隨堂練習：設圓 C 和直線 L_1、L_2、L_3 的方程式如下：C：$(x+1)^2+y^2=8$；L_1：x+y=-3、L_2：x+y=0、L_3：x+y=3；試判斷它們的相交情形

L_1：x+y=-3

(%i1) dc:sqrt(8);

(%o1) $2^{3/2}$

(%i1) d1:abs(-1+0+3)/sqrt(1^2+1^2);

(%o1) $\sqrt{2}$

(%i2) compare (d1, dc);

(%o2) <

＊直線 L_1 與圓 C 交於相異兩點

L_2：x+y=0

(%i3) d2:abs(-1+0)/sqrt(1^2+1^2);

(%o3) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(%i4) compare (d2, dc);

(%o4) <

＊直線 L_2 與圓 C 交於相異兩點

L_3：x+y=3

(%i5) d3:abs(-1+0-3)/sqrt(1^2+1^2);

(%o5) $2^{3/2}$

(%i6) compare (d3, dc);

(%o6) =

＊直線 L_3 與圓 C 交於一點

※「abs(數值)」指令表示絕對值。

※「compare (A 變數,B 變數)」指令表示比較 A 變數、B 變數兩數值大小關係。

P.169

例題 2：已知圓 C 和直線 L 的方程式如下：C：$x^2+y^2=5$；L_1：x-y+1=0；試問圓 C 和

直線 L 是否相交？若相交、求出它們的交點

解圓 C 和直線 L 的方程式，將 y= x+1 帶入方程式

(%i1) y: x+1;

(%o1) x+1

(%i2) x^2+y^2=5;

(%o2) $(x+1)^2+x^2=5$

(%i3) solve([(x+1)^2+x^2=5],[x]);

(%o3) [x=1,x=-2]

x=1 帶入求 y

(%i4) x:1;

(%o4)1

(%i5) x+1;

(%o5) 2

x=-2 帶入求 y

(%i4) x:-2;

(%o4)1

(%i5) x+1;

(%o5) -1

＊圓 C 和直線 L 相交，交點為(1 , 2)、(-2 , -1)

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

隨堂練習：設圓 C：$(x+1)^2+y^2=8$ 和直線 L：x+y=3，試問圓 C 和直線 L 是否相交？若相交、求出它們的交點

解圓 C 和直線 L 的方程式，將 y=3- x 帶入方程式

(%i1) y: 3-x;

(%o1) 3-x

(%i2) (x+1)^2+y^2=8;

(%o2) $(x+1)^2+(3-x)^2=8$

(%i3) solve([(x+1)^2+(3-x)^2=8],[x]);

(%o3) [x=1]

x=1 帶入求 y

(%i4) x:1;

(%o4)1

(%i5) 3-x;

(%o5) 2

＊圓 C 和直線 L 相交一點，交點為(1 , 2)

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

P.170

例題 3：試就實數 k 的範圍，討論直線 L：y=x+k 和圓 C：$x^2+y^2=2$ 的相交情形

P.171

隨堂練習：試就實數 m 的範圍，討論直線 L：y=mx+2 和圓 C：$x^2+y^2=1$ 的相交情形

P.172

例題 4：求通過圓 $x^2+y^2=5$ 上一點 P(1 , 2)的切線方程式

圓心 O 點(0 , 0)，P 點為切點，故切線與 OP 垂直

(%i1) O:[0,0];

(%o1) [0,0]

(%i2) P:[1,2];

(%o2) [1,2]

(%i3) Q:[x,y];

(%o3) [x,y]

(%i4) OP:P-O;

(%o4) [1,2]

(%i5) PQ: Q-P;

(%o5) [x-1,y-2]

(%i6) expand(OP.PQ=0);

(%o6) 2y+x-5=0

※「expand ([算式] × [算式])」指令表示展開算式。

P.173

例題 5： 求通過圓 $(x-1)^2+(y+2)^2=25$ 上一點 P(4 , 2)且與圓相切線的直線方程式

(%i1) expand((x-1)*(4-1)+(y+2)*(2+2)=25);

(%o1) 4y+3x+5=25

※「expand ([算式] × [算式])」指令表示展開算式。

隨堂練習：

(1) 求通過 P (1 , -2)且與圓 $x^2+y^2=5$ 相切的直線方程式

(%i1) expand(x*1+y*-2=5);

(%o1) x-2y=5

※「expand ([算式] × [算式])」指令表示展開算式。

(2) 求通過 P (1 , 4)且與圓 $x^2+y^2-2x+2y-23=0$ 相切的直線方程式

P.174

例題 6：設圓 C：$(x-3)^2+(y-2)^2=8$，求通過圓外一點 P(-1 , 2)且與圓 C 相切線的直線方程式

點斜式

(%i1) expand(y-2=m*(x+1));

(%o1) y-2=m*x+m

直線為切線，圓心(3 , 2)至直線距離為 $\sqrt{8}$

(%i2) solve([((3*m-2+m+2)^2/ (m^2+(-1)^2))= 8],[m]);

(%o2) [m=-1,m=1]

(%i3)m:-1;

(%o3)-1

(%i4) expand(y-2=m*(x+1));

(%o4) y-2=-x-1

(%i5) m:1;

(%o5) 1

(%i6) expand(y-2=m*(x+1));

(%o6) y-2=x+1

※「expand ([算式] × [算式])」指令表示展開算式。

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

P.174

例題 7：求通過點 P(5 , 15)且與圓 C：$x^2+y^2=25$ 相切的直線方程式

(%i1) expand(y-15=m*(x-5));

(%o1) y-15=m*x-5*m

直線為切線，圓心(0 , 0)至直線距離為 5

(%i2) solve([((-5*m+15)^2/ ((m)^2+(-1)^2))= 25],[m]);
(%o2) [m=$\frac{4}{3}$]

(%i3)m:4/3;
(%o3)$\frac{4}{3}$

(%i4) expand(y-15=m*x-5*m));
(%o4) $y-15=\frac{4x}{3}-\frac{20}{3}$

※「expand ([算式] × [算式])」指令表示展開算式。

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

P.175

隨堂練習：

(1) 求通過點 P(-2 , 4)且與圓 $x^2+y^2=10$ 相切的直線方程式

(%i1) expand(y-4=m*(x-(-2)));

(%o1) y-4=mx+2m

直線為切線，圓心(0 , 0)至直線距離為 $\sqrt{10}$

(%i2) solve([((2*m+4)^2/ ((m)^2+(-1)^2))= 10],[m]);
(%o2) [m=$-\frac{1}{3}$,m=3]

(%i3)m:-1/3;
(%o3) $-\frac{1}{3}$

(%i4) expand(y-4=m*x+2*m);
(%o4) $y-4=-\frac{x}{3}-\frac{2}{3}$

(%i5) m:3;

(%o5) 3

(%i6) expand(y-4=m*x+2*m);

(%o6) y-4=3x+6

(2) 求通過點 P(4 , 3)且與圓$(x-2)^2+y^2=4$ 相切的直線方程式

(%i1) expand(y-3=m*(x-4));

(%o1) y-3=mx-4m

直線為切線，圓心(2 , 0)至直線距離為 2

(%i2) solve([((2*m-0-4*m+3)^2/ ((m)^2+(-1)^2))=4],[m]);

(%o2) $[m=\frac{5}{12}]$

(%i3)m:5/12;

(%o3) $\frac{5}{12}$

(%i4) expand(y-3=m*x-4*m);

(%o4) y-3=mx-4m

※「expand ([算式] × [算式])」指令表示展開算式。

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

P.176

例題 8：有一半徑 60 公尺的圓形碉堡，A 在碉堡正北方與碉堡中心距離 100 公尺的甲處，乙從碉堡中心向東走，要走多少公尺(B 處)才會看到 A？

設碉堡圓心為(0 , 0)，A 所在的位置為(0 , 100)

(%i1) expand(y-100=m*(x-0));

(%o1) y-100=mx

直線為切線，圓心(0 , 0)至直線距離為 60；(利用圓心到直線距離等於半徑，且取平

方)

(%i2) solve([((100)^2/ ((m)^2+(-1)^2))=60^2],[m]);
(%o2) $[m=-\frac{4}{3}, m=\frac{4}{3}]$

(%i3) m:-4/3;
(%o3) $-\frac{4}{3}$

(%i4) expand(y-100=m*(x-0));
(%o4) $y-100=-\frac{4x}{3}$

(%i5)m:4/3;
(%o5) $\frac{4}{3}$

(%i6) expand(y-3=m*x-4*m);
(%o6) $y-100=\frac{4x}{3}$

B 所在的位置為(x , 0)

(%i7) solve([0-100=(4*x)/3],[x]);

(%o7) [x=-75]

(%i8) solve([0-100=-(4*x)/3],[x]);

(%o8) [x=75]

由題目可知 B 在原點右邊，故 B 點座標為(75 , 0)

※「expand ([算式] × [算式])」指令表示展開算式。

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

隨堂練習：有一圓形碉堡，甲站在碉堡的正北方與碉堡中心距離 40 公尺的 A 處，乙從碉堡中心往西走，要走 30 公尺才看到甲，試問碉堡半徑為幾公尺？

設碉堡圓心為(0 , 0)，A 位置為(0 , 40)

(%i1) expand(y-40=m*(x-0));

(%o1) y-40=mx

將 B 位置(-30 , 0)帶入上式

(%i2) solve([0-40=m*(-30)],[m]);
(%o2) $[m=\frac{4}{3}]$

直線為切線，圓心(0 , 0)至直線距離(半徑)設為 x；(利用圓心到直線距離等於半徑，且取平方)

(%i3) solve([((40)^2/ ((4/3)^2+(-1)^2))=x^2],[x]);

(%o3) [x=-24,x=24]

＊半徑為 24 公尺

※「expand ([算式] × [算式])」指令表示展開算式。

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

P.177 **習題 3-2**

一、基礎題：

1. 已知圓 C：$x^2+y^2=5$，下列選項何者正確？

(1) 點(1 , 1) 再圓的內部

(2) 通過(1 , 1)的直線一定與圓 C 交於兩點

(3) 通過(1 , 1)與(1 , 1)兩點的直線與圓 C 不相交

(4) 直線 y=3 與圓 C 不相交

(5) 通過(1 , 1)且與圓 C 相切的直線為 2x-y=5

2. 判斷下列直線與圓的關係(相交於兩點、相切或不相交)

(1) L：3x+4y=25　C：$x^2+y^2=25$

(%i1) C1:sqrt(25);

(%o1) 5

(%i2) d1:abs(0+0-25)/sqrt(3^2+4^2);

(%o2) 5

(%i3) compare (d1, C1);

(%o3) =

＊直線 L_1 與圓 C1 交於相於一點

(2) L：x+3y-4=0　C：$(x-1)^2+(y+2)^2=10$

(%i4) C2:sqrt(10);

(%o4) $\sqrt{10}$

(%i3) d2:abs(1+3*(-2)-4)/sqrt(1^2+3^2);

(%o3) $\frac{9}{\sqrt{10}}$

(%i4) compare (d2, C2);

(%o4) <

＊直線 L_2 與圓 C2 交於相於兩點

※「abs(數值)」指令表示絕對值。

※「compare (A 變數,B 變數)」指令表示比較 A 變數、B 變數兩數值大小關係。

(3) L： y=15　C：$x^2+y^2-12x+16y-125=0$

3. 求圓$(x-2)^2+(y+1)^2=10$ 在點(3 , -4)處的切線方程式

圓心 O 點(2 , -1)，P 點為切點，故切線與 OP 垂直

(%i1) O:[2,-1];

(%o1) [2,-1]

(%i2) P:[3,-4];

(%o2) [3,-4]

(%i3) Q:[x,y];

(%o3) [x,y]

(%i4) OP:P-O;

(%o4) [1,-3]

(%i5) PQ: Q-P;

(%o5) [x-3,y+4]

(%i6) expand(OP.PQ=0);

(%o6) -3y+x-15=0

※「expand ([算式] × [算式])」指令表示展開算式。

4. 求通過(5 , 1)且與圓 $x^2+y^2=1$ 相切的直線方程式

5. 求通過(-1 , -1)且與圓 $x^2+y^2+4x-2y+4=0$ 相切的直線方程式

6. 設圓 C：$x^2+(y-2)^2=9$，自 A (1 , -1)作圓 C 的切線交圓 C 於點 T，求切線段$\overline{AT}$的長

7.直線 L：3x+y=7 和圓 C：$(x+1)^2+y^2=20$ 是否相交？若相交，求 L 被 C 所截的弦長

P.178

二、進階題：

8. 求平行直線 x+y=1 且與圓 $x^2+y^2=2$ 相切的直線方程式

9. 若過定點 A (-1 , 0)且斜率為 m 的直線與圓 $x^2+y^2-4x-4=0$ 有交點，求 m 的範圍

10. 在坐標平面上 A (1 , 6)處有一光源，將圓 $x^2+(y-3)^2=5$ 投射到 x 軸上，求其在 x 軸的影子 $\overline{PQ}$ 長

3-3 球面方程式

P.180

例題 1：求下列各球面方程式：

(1) 以 M(1 , -2 , 0)為球心，半徑為 5 的球面方程式

球面標準式：空間中以 M(h , k , l)為球心，r 為半徑的球面方程式為

$(x-h)^2+(y-k)^2+(z-l)^2=r^2$

(%i1) h:1; k:-2; l:0; r:5;

(%o1) 1

(%o2) -2

(%o3) 0

(%o4)5

(%i5) (x-h)^2+(y-k)^2+(z-l)^2=r^2;

(%o5) $z^2+(y+2)^2+(x-1)^2=25$

(2) 以圓點為球心，通過(1 , 2 , 3) 的球面方程式

(%i6) x:1; y: 2; z:3;

(%o6) 1

(%o7) 2

(%o8) 3

(%i9) x^2+y^2+z^2

(%o9) 14

＊由上可知 r^2 為 14，故球面方程式為 $x^2+y^2+z^2=r^2$

隨堂練習：求下列各球面方程式：

(1) 以 M(1 , -2 , 3)為球心，且通過圓點的球面方程式

球面標準式：空間中以 M(h , k , l)為球心，r 為半徑的球面方程式為

$(x-h)^2+(y-k)^2+(z-l)^2=r^2$

(%i1) h:1; k:-2; l:3; x:0; y: 0; z:0;

(%o1) 1

(%o2) -2

(%o3) 3

(%o4) 0

(%o5) 0

(%o6) 0

(%i7) (x-h)^2+(y-k)^2+(z-l)^2

(%o7) 14

＊由上可知 r^2 為 14，故球面方程式為 $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=14$

(2) 與 $(x+1)^2+y^2+(z-3)^2=1$ 有相同球心，且半徑為 $\sqrt{3}$ 的球面方程式

球面標準式：空間中以 M(h , k , l)為球心，r 為半徑的球面方程式為

$(x-h)^2+(y-k)^2+(z-l)^2=r^2$ ，本題球心為(-1 , 0 , 3)

(%i5) (x-h)^2+(y-k)^2+(z-l)^2=r^2;

(%o5) $z^2+(y+2)^2+(x-1)^2=25$

(%i8) h:-1; k:0; l:3; r:sqrt(3);

(%o8) -1

(%o9) 0

(%o10) $\sqrt{3}$

(%i11) (x-h)^2+(y-k)^2+(z-l)^2=r^2;

(%o11) $(z-3)^2+y^2+(x+1)^2=3$

P.181

例題 2：設兩球面：S_1：$(x-2)^2+(y+3)^2+(z+1)^2=9$；$S_2$：$(x-5)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=1$

(1) 判別 S_2 的球心 M_2(5 , 1 , -1)再球面 S_1 的內部、外部或球面上

(%i1) r1:sqrt(9);

(%o1) 3

(%i2) r2:sqrt(1);

(%o2) 1

M1M2 代表$\overline{M_1M_2}$

(%i3) M1M2:sqrt((5-2)^2+(1-(-3))^2+((-1)-(-1))^2);

(%o3) 5

(%i4) compare (M1M2, r1+r2);

(%o4) >

＊$\overline{M_1M_2}$=5，大於 S_1 半徑(3)，故 M_2 在球面 S_1 的外部

※「compare (A 變數,B 變數)」指令表示比較 A 變數、B 變數兩數值大小關係。

(2) 兩球面 S_1 與 S_2 是否相交？

＊$\overline{M_1M_2}$=5，大於兩球面半徑相加之和(3+1=4)，故 S_1 與 S_2 不相交

隨堂練習：設兩球面：S_1：$(x-2)^2+y^2+(z+1)^2=16$；S_2：$(x-4)^2+(y+2)^2+z^2=1$

(1) 判別 S_2 的球心 M_2(4 , -2 , 0)再球面 S_1 的內部、外部或球面上

(%i1) r1:sqrt(16);

(%o1) 4

(%i2) r2:sqrt(1);

(%o2) 1

M1M2 代表$\overline{M_1M_2}$

(%i3) M1M2:sqrt((4-2)^2+((-2)-0)^2+(0-(-1))^2);

(%o3) 3

(%i4) compare (M1M2, r1+r2);

(%o4) <

＊$\overline{M_1M_2}=3$，小於 S_1 半徑(4)，故 M_2 在球面 S_1 的內部

※「compare (A 變數,B 變數)」指令表示比較 A 變數、B 變數兩數值大小關係。

(2) 兩球面 S_1 與 S_2 是否相交？

＊$\overline{M_1M_2}=3$，小於兩球面半徑相加之和(4+1=5)，故 S_1 與 S_2 相交

P.182

例題 3：判別下列方程式的圖形：

(1) $x^2+y^2+z^2-6x-4y+2z-2=0$

(2) $x^2+y^2+z^2-6x-4y+2z+14=0$

(3) $x^2+y^2+z^2-6x-4y+2z+15=0$

P.183

例題 4：設 k 為任意實數，試依 k 值討論方程式：$x^2+y^2+z^2-2x+4y+2kz+7=0$ 的圖形

隨堂練習：已知 $x^2+y^2+z^2-2kx+4y+2kz+3k^2-2k+1=0$ 的圖形為一個球面，求 k 的範圍

P.184

例題 5：試求通過(2 , 1 , 0)、(0 , -3 , 4)、(-1 , 0 , 0)、(-1 , -2 , 4)四點的球面方程式，

並求其球心與半徑

設球面方程式：$x^2+y^2+z^2+dx+ey+fz+g=0$，將(2 , 1 , 0)、(0 , -3 , 4)、(-1 , 0 , 0)、(-1 , -2 , 4)四點，分別帶入球面方程式：

```
(%i1)solve([2^2+1^2+0^2+d*2+e*1+f*0+g=0,0^2+(-3)^2+4^2+d*0+e*(-3)+f*4+g=0,(-1)^2+0^
    2+0^2+d*(-1)+e*0+f*0+g=0,(-1)^2+(-2)^2+4^2+d*(-1)+e*(-2)+f*4+g=0],[d,e,f,g]);
```

(%o1) [[d=-2,e=2,f=-4,g=-3]]

(%i2) d:-2; e:2; f:-4; g:-3;

(%o2)-2

(%o3)2

(%o4)-4

(%o5)-3

(%i6) x^2+y^2+z^2+d*x+e*y+f*z+g=0;

(%o6) $z^2-4z+y^2+2y+x^2-2x-3=0$

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

隨堂練習：試求通過(0 , 0 , 0)、(1 , -1 , 2)、(-2 , -4 , 0)、(-2 , -1 , 3)四點的球面方程式

設球面方程式：$x^2+y^2+z^2+dx+ey+fz+g=0$，將(0 , 0 , 0)、(1 , -1 , 2)、(-2 , -4 , 0)、(-2 , -1 , 3)四點，分別帶入球面方程式：

(%i1)solve([0^2+0^2+0^2+d*0+e*0+f*0+g=0,1^2+(-1)^2+2^2+d*1+e*(-1)+f*2+g=0,(-2)^2+(-4)^2+0^2+d*(-2)+e*(-4)+f*0+g=0,(-2)^2+(-1)^2+3^2+d*(-2)+e*(-1)+f*3+g=0],[d,e,f,g]);

(%o1) [[d=2,e=4,f=-2,g=0]]

(%i2) d:2; e:4; f:-2; g:0;

(%o2)2

(%o3)4

(%o4)-2

(%o5)0

(%i6) x^2+y^2+z^2+d*x+e*y+f*z+g=0;

(%o6) $z^2-2z+y^2+4y+x^2+2x=0$

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

P.185

例題 6： 已知直線 L：$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-4}{-2}$ 與球面 S：$x^2+y^2+z^2=9$ 相交於兩點，求此兩交點座標

設直線 L 之參數式與球面交點為(1+t,-2+t,4-2t)，並將交點帶入球面 S 方程式

(%i1) solve([(1+t)^2+((-2)+t)^2+(4-2*t)^2=9],[t]);

(%o1) [t=1,t=2]

(%i2) t:1;

(%o2) 1

(%i3) [1+t,-2+t,4-2*t];

(%o3) [2,-1,2]

(%i4) t:2;

(%o4) 2

(%i5) [1+t,-2+t,4-2*t];

(%o5) [3,0,0]

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

隨堂練習： 已知球面 S：$(x-3)^2+(y-4)^2+(z+5)^2=50$ 與 z 軸相交於 A、B 兩點，求線段 $\overline{AB}$ 長

P.186

例題 7： 設球面 S：$x^2+y^2+z^2-2x-4y+4z=0$ 與點 A(4 , -4 , 4)，若 P 為球面上與 A 點距離最近的點，求 P 的座標

隨堂練習： 承例題 7，若 Q 為球面上與 A 點距離最遠的點，求 Q 的座標

P.187 **習題 3-3**

一、基礎題：

1. 設球面 S 的球心為(1 , -1 , 1)且通過點(2 , 1 , -1)，則下列哪些點在球面 S 上？

(%i1) h:1; k:-1; l:1;

(%o1) 1

(%o2) -1

(%o3) 1

(%i4) (x-h)^2+(y-k)^2+(z-l)^2=r^2;

(%o4) $(z-1)^2+(y+1)^2+(x-1)^2=r^2$

(%i5) r : sqrt((2-1)^2+(1-(-1))^2+((-1)-1)^2);

(%o5) 3

(%i6) S: (x-h)^2+(y-k)^2+(z-l)^2-r^2=0;

(%o6) $(z-1)^2+(y+1)^2+(x-1)^2-9=0$

(1) (0 , 1 , 2)

(%i7) x:0; y:1; z:2;

(%o7) 0

(%o8) 1

(%o9) 2

(%i10) if (x-h)^2+(y-k)^2+(z-l)^2-r^2=0 then answer=yes else answer=no;

(%o10) answer=no

(2) (-1 , 1 , 0)

(%i11) x:-1; y:1; z:0;

(%o11) -1

(%o12) 1

(%o13) 0

(%i14) if (x-h)^2+(y-k)^2+(z-l)^2-r^2=0 then answer=yes else answer=no;

(%o14) answer=yes

(3) (3 , 1 , 0)

(%i15) x:3; y:1; z:0;

(%o15) 3

(%o16) 1

(%o17) 0

(%i18) if (x-h)^2+(y-k)^2+(z-l)^2-r^2=0 then answer=yes else answer=no;

(%o18) answer=yes

(4) (2 , 0 , 3)

(%i19) x:2; y:0; z:3;

(%o19) 2

(%o20) 0

(%o21) 3

(%i22) if (x-h)^2+(y-k)^2+(z-l)^2-r^2=0 then answer=yes else answer=no;

(%o22) answer=no

(5) (-1 , 1 , 2)

(%i23) x:-1; y:1; z:2;

(%o23) -1

(%o24) 1

(%o25) 2

(%i26) if (x-h)^2+(y-k)^2+(z-l)^2-r^2=0 then answer=yes else answer=no;

(%o26) answer=yes

＊上述判別式表示如果等號成立，其結果顯示 answer=yes，否則(等號不成立)，結果顯示 answer=no

2. 求符合下列各條件的球面方程式：

(1) 以(2 , 0 , -3)為球心且通過點(-1 , 1 , -3)

(2) 以$\overline{AB}$為直徑，其中 A(1 , -1 , 3)、B(5 , 3 , 3)

(3) 通過(1 , 1 , 2)、(2 , 2 , 4)兩點，且圓心在 x 軸上

3. 求通過 A(-1 , -1 , 1)、B(3 , 5 , -3)、C(2 , 2 , 1)、D(-1 , -2 , 0)四點的球面方程式，並求其球心和半徑

設球面方程式：$x^2+y^2+z^2+dx+ey+fz+g=0$，將 A(-1 , -1 , 1)、B(3 , 5 , -3)、C(2 , 2 , 1)、D(-1 , -2 , 0)四點，分別帶入球面方程式：

```
(%i1)solve([(-1)^2+(-1)^2+1^2+d*(-1)+e*(-1)+f*1+g=0,3^2+5^2+(-3)^2+d*3+e*5+f*(-3)+g=0,
    2^2+2^2+1^2+d*2+e*2+f*1+g=0,(-1)^2+(-2)^2+0^2+d*(-1)+e*(-2)+f*0+g=0],[d,e,f,g]);
(%o1) [[d=2,e=-4,f=6,g=-11]]
(%i2) d: 2; e: -4; f:6; g:-11;
(%o2) 2
(%o3) -4
(%o4) 6
(%o5) -11
(%i6) x^2+y^2+z^2+d*x+e*y+f*z+g=0;
```

(%o6) $z^2+6z+y^2-4y+x^2+2x-11=0$

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

4. 已知 $x^2+y^2+z^2+2kx+4y-6z+25+4k=0$ 為一球面，求 k 之範圍

二、進階題：

5. 已知直線 L：$\frac{x-2}{2}=y-1=\frac{z+1}{-2}$與球面 S：$x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+k=0$ 相切，求實數 k 的值及切點座標

6. 球面 S：$x^2+y^2+z^2-6x-4y+2z-2=0$ 上的點到 P(1 , 1 , -3)的最遠距離為 m，最近距離為 n，求(m , n)

3-4 球面與平面的關係

P.189

例題 1：設 k 為實數，球面 S：$x^2+y^2+z^2+4x-2y+6z-11=0$，平面 E：x-2y-2z+k=0

(1) 若平面 E 和球面 S 相交於一圓，求 k 的範圍

(2) 當 k 值為何時，平面 E 會和球面 S 交出最大的圓？

隨堂練習：設 k 為實數，平面 E：x-2y+2z+k=0，球面 S：$x^2+y^2+z^2+2x-2y+4z+5=0$

(1) 若平面 E 和球面 S 相交於一圓，求 k 的範圍

(2) 當 k 值為何時，平面 E 會和球面 S 交出最大的圓？

P.190

例題 2： 已知球面 S：$x^2+y^2+z^2-2x-6y-4z-11=0$ 與平面 E：$2x+2y-z+3=0$ 交於一圓 C，求：

(1) 圓 C 的圓心

(2) 圓 C 的面積

P.191

隨堂練習： 已知球面 S：$x^2+y^2+z^2-14=0$ 與平面 E：$2x+2y+z-9=0$ 交於一圓 C，求：

(1) 圓 C 的圓心

(2) 圓 C 的面積

例題 3： 已知球面 S：$x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+5=0$，P(-1 , 4 , 2)為球面上一點，求通過 P 點的切平面方程式

P.192

隨堂練習： 已知球面 S：$(x-1)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=4$，P(1 , 1 , 1)為 S 上一點，求通過 P 點的切平面方程式

P.193

例題 4： 已知某一地球儀的赤道長 100 公分，則其北緯 60° 的緯度長為多少公分？

設地球儀的半徑 r 公分

(%i1) r*cos(60/180*%pi);

(%o1) $\frac{r}{2}$

上述可知地球儀的赤道長：地球儀的北緯 60°緯度長為 2：1

(%i2) 100*(1/2);

(%o2) 50

隨堂練習：設地球半徑為 6400 公里，某一探險隊循著北緯 60°的緯度線由東經 60°向東行至東經 105°，試問此探險隊一共走了多少公里？

設地球的半徑 r 公分

(%i1) r*cos(60/180*%pi);

(%o1) $\frac{r}{2}$

上述可知地球的半徑：地球的北緯 60°緯度長為 2：1

(%i2) 6400*(1/2);

(%o2) 3200

探險隊循著北緯 60°的緯度線由東經 60°向東行至東經 105°，共行走了東經 45 度，圓為 360°

(%i3) 3200*2*(%pi)*((105-60)/360);

(%o3) 800 π

P.194

例題 5：A(6 , 0 , 0)、B(-3 , 3 , $3\sqrt{2}$)為球面 $x^2+y^2+z^2=36$ 上兩點，今有一隻螞蟻沿著球面由 A 爬到 B 點，試問螞蟻的爬行路徑中最短距離是多少？

由題目可知球面圓心 O 座標為(0 , 0 , 0)，半徑為 6

(%i1) A:[6,0,0];

(%o1) [6,0,0]

(%i2) B:[-3,3,3*sqrt(2)];

(%o2) $[-3,3,3\sqrt{2}]$

(%i3) O:[0,0,0];

(%o3) [0,0,0]

(%i4) solve([cos(x/180*%pi)=((O-A).(O-B))/((((O-A).(O-A))^(1/2))*((O-B).(O-B))^(1/2))],[x]);

solve: using arc-trig functions to get a solution.

Some solutions will be lost.

(%o4) [x=120]

(%i5) 6*(120/180*%pi);

(%o5) 4π

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

隨堂練習： 通過 O(0 , 0 , 0)、P(0 , 0 , 4)、Q(1 , $\sqrt{11}$, 2)三點的平面與球面 S：$x^2+y^2+z^2=16$ 相交於一個圓 C，求圓 C 上劣弧 $\overset{\frown}{PQ}$ 的弧長

P.195 **習題 3-4**

一、基礎題：

1. 在空間中，下列哪些可能是兩相異球面的相交情形？

(1) 沒有交點

(2) 相交於一點

(3) 相交於兩點

(4) 交於一圓

(5) 相交於兩圓

2. 下列各平面中，哪一個平面與球面：$x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z=2$ 相交所成的圓面積最大？

(1) xy 平面

(2) yz 平面

(3) xz 平面

(4) x+2y-2z-1=0

(5) x+y+z=0

3. 已知球面 S：$x^2+y^2+z^2-2x+4y+4z=16$ 與平面 E：2x+y-2z+5=0 交於一圓 C，求圓 C 的圓心座標、與半徑

4. 求通過點 A(1 , 3 , 3)與球面 S：$(x+1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=9$，相切之切平面方程式

將 A 點帶入球面 S 方程式，判斷 A 點是否在球面上

(%i1) x:1; y:3; z:3;

(%o1) 1

(%o2) 3

(%o3) 3

(%i4) compare ((x+1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2,9);

(%o4) =

可知 A 點在球面 S 上，球心 O 為(-1 , 1 , 2)，OA 為平面法向量

(%i5) A: [1,3,3];

(%o5) [1,3,3]

(%i6) O: [-1,1,2];

(%o6) [-1,1,2]

(%i7) OA:A-O;

(%o7) [2,2,1]

平面法向量[2,2,1]，可寫成 2x+2y+z=k

(%i8) solve([2*x+2*y+z=k],[k]);

(%o8) [k=11]

＊切平面方程式 2x+2y+z=11

※「compare (A 變數,B 變數)」指令表示比較 A 變數、B 變數兩數值大小關係。

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

5. 球面 S 通過點(0 , 0 , 2)且在 xy 平面上所截出的圓為$(x-2)^2+(y-1)^2=1$，求球面 S 的方程式

P.196

6. 設地球儀的球心為空間座標的原點，地球儀上 A、B 兩個城市的座標分別為 A (1 , 2 , 2)、B(2 , -2 , 1)

(1) 求地球儀上 A、B 兩點間的最短距離

(%i1) A:[1,2,2];

(%o1) [1,2,2]

(%i2) B:[2,-2,1];

(%o2) [2,-2,1]

(%i3) O:[0,0,0];

(%o3) [0,0,0]

(%i4) solve([cos(x/180*%pi)=((O-A).(O-B))/((((O-A).(O-A))^(1/2))*((O-B).(O-B))^(1/2))],[x]);

solve: using arc-trig functions to get a solution.

Some solutions will be lost.

(%o4) [x=90]

(%i5) 3*2*(%pi)*((90)/360);

(%o5) $\frac{3}{2}\pi$

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

(2) 若地球的實際半徑為 6400 公里，求飛機從 A 城市直飛至 B 城市的最短航線長

(%i7) 6400*2*(%pi)*((90)/360);

(%o7) 3200π

二、進階題：

7. 空間中一球面 S，在球心同一側有距離為 9 的兩平行面 E_1 與 E_2，若 E_1、E_2 與球面 S 所截的圓面積分別為 400π 與 49π，求 S 的半徑

8. 設一球形的地球儀南北極的座標分別為 S (1 , 2 , -1)與 N (5 , -2 , 3)，包含南緯 30°線平面為 E

(1) 求平面 E 的法向量

(2) 球平面 E 的方程式

9. 設球面 S：$x^2+y^2+z^2=9$，P (x , y , z)為球面上一點，求 2x-y+2z 的最大值與有最大值時的 P 點座標

P.197

第三章　綜合練習

一、概念題

1. 圓 C：$(x-1)^2+(y+2)^2=9$，下列直線被圓 C 所截的弦何者最長？

(1) x 軸

(2) y 軸

(3) $x+y=1$

(4) 3x-4y=7

(5) 2x+y=5

2. 座標平面上兩圓 C1：$x^2+y^2=1$ 與 C2：$(x-4)^2+y^2=9$，下列哪些直線是這兩圓的共同切線(公切線)？

(1) $x+y=\sqrt{2}$

(2) $x-\sqrt{3}y+2=0$

(3) $x+\sqrt{3}y+2=0$

(4) x=1

(5) y=2

3. 球面 $x^2+y^2+z^2=16$ 與空間中兩點 P(1 , 2 , 2)、Q(-1 , -2 , -2)的關係是：

(1) 線段 PQ 和球面交於一點

(2) 直線 PQ 和球面交於兩點

(3) 射線 PQ 和球面交於兩點

(4) 直線 PQ 通過球心

(5) 包含直線 PQ 的任一平面的截痕都是一個大圓

P.198

二、程序題

4. 求通過點(1 , 2)且與 x 軸、y 軸均相切的圓方程式

5. 已知圓 C 與 y 軸交於 A(0 , -4)、B(0 , -2)兩點，且圓心在直線 2x-y=7 上，求圓 C 的方程式

6. 圓 $x^2+y^2-x-6=0$ 的內部於圓上共有幾個格子點？(格子點就是 x 座標和 y 座標都是

整數的點)

7. 在半徑為 30 公分的球形地球儀上，已知 P 點位於東經 10°，南緯 30°；點 Q 位於東經 70°、南緯 30°，則 P、Q 兩點在南緯 30°線上的劣弧長為多少公分？

三、數學解題

8. 設球面 S 的半徑為 2，平面 E：x+y+z=3，已知平面 E 與球面 S 交圓的圓心(0 , 1 , 2)，半徑為 1，求球面 S 的方程式

9. 已知球面 S 與平面 E：x+2y-2z+16=0 相切於 A(-2 , -4 , 3)且球面 S 通過 B(2 , -2 , 5)，求球面 S 的方程式

10. 小明利用半徑 $\sqrt{2}$ 的圓形圖案來設計右圖的長方形徽章 OABC，徽章左右寬度為 4，圓形圖案的圓心與兩側等距離且與 $\overline{OA}$ 的距離為 3，已知 $\overline{OD}=1$，$\overline{CD}$ 與 $\overline{DE}$ 都和圓相切求：

(1) $\overline{AE}$

(2) $\overline{OC}$