

高中數學與MAXIMA：

以下將依據教育部審核教科書內容，以MAXIMA軟體解答例題、隨堂練習及自我評量以供高中生參考

高一下數學

-目次-

第一章 指數與對數

- 1-1 指數
- 1-2 指數函數及其圖形
- 1-3 對數
- 1-4 對數函數及其圖形
- 1-5 對數的應用

第二章 三角函數的基本概念

- 2-1 銳角三角函數
- 2-2 三角函數的基本關係
- 2-3 簡易測量與三角函數值表
- 2-4 廣義的三角函數
- 2-5 正弦定理與餘弦定理
- 2-6 基本三角測量

第三章 三角函數的性質與應用

- 3-1 三角函數的圖形
- 3-2 和角公式
- 3-3 倍角公式與半角公式
- 3-4 機與和差的互化
- 3-5 正餘弦函數之疊合
- 3-6 複數的極式

MAXIMA 指令簡介

- ※ 「factor(數值)」指令表示求因式分解。
- ※ 「load (functs)」指令表示先讀取此 function(函數)。
- ※ 「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。
- ※ 「rat(數值)」指令表示將數值轉換為分數。
- ※ 「solve([變數算式],[變數])」指令表示求解。
- ※ 「sqrt (數值)」指令表示數值開根號。
- ※ 「expand ([算式] × [算式])」指令表示展開算式。
- ※ 「ratsimp ([算式] × [算式])」指令表示化簡算式。
- ※ 「radcan ([算式] × [算式])」指令表示化簡算式。
- ※ 「rootscontract((sqrt 數值)*(sqrt 數值))」指令執行乘開兩根號數值。
- ※ 「load (fourier_elim)」指令可執行不等式計算，須先載入。
- ※ 「fourier_elim([變數算式],[變數])」求解不等式。
- ※ 「compare (A 變數,B 變數)」指令表示比較 A 變數、B 變數兩數值大小關係。
- ※ 「plot2d ([方程式],[x,最小值,最大值],[y, 最小值,最大值])」；指令表示繪出方程式之圖形，其中 x 軸刻度介於最小值~最大值之間、y 軸刻度介於最小值~最大值之間。

運算簡介

- + : MAXIMA 以+表示。
- : MAXIMA 以-表示。
- × : MAXIMA 以*表示。
- ÷ : MAXIMA 以/表示。
- a^2 : MAXIMA 以 a^2 表示。
- \sqrt{a} : MAXIMA 以 $a^{(1/2)}$ 或 $\text{sqrt}(a)$ 表示。
- π : MAXIMA 以 %pi 表示。
- i 虛數 : MAXIMA 以 %i 表示。

第一章 指數與對數

1-1 指數

P.7

例題 1：試求下列各式中自然數 x 的值

(1) $2^x = 1024$

(%i1) solve([2^x=1024],[x]);

(%o1) $\left[x = \frac{\log 1024}{\log 2} \right]$

(%i2) float(%o1);

(%o2) [x=10.0]

(2) $(3^2)^4 = 3^x$

方法一：

(%i1) float(solve([(3^2)^4=3^x],[x]));

(%o1) [x=8.0]

方法二：

(%i2) solve([2*4=x],[x]);

(%o2) [x=8]

(3) $\frac{3^{11}}{3^4} = 3^x$

方法一：

(%i1) solve([(3^11)/(3^4)=3^x],[x]);

(%o1) $\left[x = \frac{\log 2187}{\log 3} \right]$

(%i2) float([x=log(2187)/log(3)]);

```
(%o2) [x=7.0]
```

方法二：

```
(%i2) solve([11-4=x],[x]);
```

```
(%o2) [x=7]
```

※ 「float(數值)」指令表示將結果轉換為小數。

※ 「solve([變數算式],[變數])」指令表示求解。

隨堂練習：試求下列各式中自然數 x 的值

$$(1) 3^x \times 3^2 = 3^5$$

方法一：

```
(%i1) solve([3^x*3^2=3^5],[x]);
```

```
(%o1) [x =  $\frac{\log(243)-2\log(3)}{\log 3}$ ]
```

```
(%i2) float(%o1);
```

```
(%o2) [x=3.0]
```

方法二：

```
(%i2) solve([x+2=5],[x]);
```

```
(%o2) [x=3]
```

$$(2) 3^7 \times 5^7 = x^7$$

方法一：

```
(%i1) float(solve([(3^7)*(5^7)=x^7],[x]));
```

```
(%o1)[x=15.0]
```

方法二：

```
(%i2) solve([3*5=x],[x]);
```

```
(%o2) [x=15]
```

$$(3) \left(\frac{3}{5}\right)^7 = \frac{3^7}{x^7}$$

方法一：

```
(%i1) solve([(3/5)^7=3^7/x^7],[x]);
```

```
(%o1) [x=5.0]
```

方法二：

```
(%i2) solve([5=x],[x]);
```

```
(%o2) [x=5]
```

※ 「float(數值)」指令表示將結果轉換為小數。

※ 「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

P.9

例題 2：試計算下列各式

$$(1) \left[\left(\frac{1}{27} \right)^3 \times (81)^2 \right]^{-3} \times 3^{-2}$$

```
(%i1) ((1/27)^3*(81)^2)^-3*3^-2;
```

```
(%o1) 3
```

$$(2) [3 \times (-2)]^0 \times [3 + (-5)]^{-2}$$

```
(%i1) (3*(-2))^0*(3+(-5))^-2;
```

$$(\%o1) \frac{1}{4}$$

隨堂練習：

$$(1) \left[\left(\frac{1}{4} \right)^6 \times 64 \right]^{-4} \times 32^{-3}$$

$$(\%i1) ((1/4)^6*64)^{-4}*32^{-3};$$

$$(\%o1) 512$$

$$(2) (-2) \times 5^0 + 7 \times (2-5)^0$$

$$(\%i1) (-2)*5^0+7*(2-5)^0;$$

$$(\%o1) 5$$

P.10

例題 3：設 a 、 b 皆為異於零的實數，試化簡下列各式：

$$(1) \left[(a^{-2})^4 \cdot (a^3)^2 \right]^{-5}$$

$$(\%i1) ((a^{-2})^4*(a^3)^2)^{-5};$$

$$(\%o1) a^{10}$$

$$(2) [a^2 \cdot (b^3)^{-5}]^{-4} \cdot [a^{-2} \cdot b^2]^6$$

$$(\%i1) (a^2*(b^3)^{-5})^{-4}*(a^{-2}*b^2)^6;$$

$$(\%o1) a^4b^{48}$$

隨堂練習：設 a 、 b 皆為異於零的實數，試化簡下列各式：

$$(1) [a^8 \cdot (a^3)^{-2} \cdot (a^{-2})^4]^3 \times a^{41}$$

$$(\%i1) (a^8*(a^3)^{-2}*(a^{-2})^4)^3*a^41;$$

$$(\%o1) a^{23}$$

$$(2) (a^3 \cdot b^{-2})^{-4} \cdot (a^{-1} \cdot b^3)^2 \cdot a^5 \cdot (b^6)^{-2}$$

$$(\%i1) (a^3*b^{-2})^{-4}*(a^{-1}*b^3)^2*a^5*(b^6)^{-2};$$

$$(\%o1) \frac{b^2}{a^9}$$

P.13

例題 4：試求 $125^{-\frac{1}{3}} + 243^{\frac{2}{5}} - 8^{\frac{1}{3}}$ 的值：

$$(\%i1) 125^{(-1/3)} + 243^{(2/5)} - 8^{(1/3)};$$

$$(\%o1) \frac{36}{5}$$

隨堂練習：試求 $81^{-\frac{3}{4}} + 32^{\frac{4}{5}} - 125^{\frac{2}{3}}$ 的值：

$$(\%i1) 81^{(-3/4)} + 32^{(4/5)} - 125^{(2/3)};$$

$$(\%o1) -\frac{242}{27}$$

P.14

例題 5：試利用有理數指數的指數律，求下列各式的值：

$$(1) \sqrt[5]{32} + \sqrt[4]{81} + \sqrt[3]{\frac{8}{27}}$$

$$(\%i1) 32^{(1/5)} + 81^{(1/4)} + (8/27)^{(1/3)};$$

$$(\%o1) \frac{17}{3}$$

$$(2) \sqrt{5} \times 2\sqrt[3]{20} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[6]{5}$$

$$(\%i1) \text{radcan}(\text{sqrt}(5)*(2*20^{(1/3)})*(2^{(1/3)})*(5^{(1/6)}));$$

(%o1) 20

隨堂練習：試利用有理數指數的指數律，求下列各式的值：

(1) $\frac{\sqrt[3]{108}}{\sqrt[6]{16}} + \sqrt[4]{625}$

(%i1) ((108^(1/3))/ (16^(1/6)))+(625^(1/4));

(%o1) 8

(2) $\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{25} + \frac{2\sqrt[3]{40}}{1-\sqrt[3]{5}}$

(%i1) radcan((5^(1/3))+ (25^(1/3))+((2*40^(1/3))/(1-5^(1/3))));

(%o1) -5

例題 6：設 $x > 0$ ， $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = 3$ ，試求下列各式的值：

(1) $x + x^{-1}$

(2) $x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}}$

※本題不建議使用 Maxima 解題※**P.15****隨堂練習：**設 $x > 0$ ， $x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}} = 5$ ，試求下列各式的值：

(1) $x^{\frac{2}{3}} + x^{-\frac{2}{3}}$

(2) $x + x^{-1}$

※本題不建議使用 Maxima 解題※**P.16**

例題 7：比較下列各組數的大小：

(1) $(3.2)^{\frac{1}{2}}$ 與 $(3.2)^{\frac{2}{3}}$

(%i1) compare (3.2^(1/2), 3.2^(2/3)) ;

rat: replaced -0.3826797112761 by -4030/10531 = -0.3826797075301

(%o1) <

(2) $(0.2)^{\frac{1}{2}}$ 與 $(0.2)^{\frac{2}{3}}$

(%i1) compare (0.2^(1/2), 0.2^(2/3)) ;

rat: replaced 0.10521840616462 by 990/9409 = 0.10521840790732

(%o1) >

※ 「compare (A 變數,B 變數)」指令表示比較 A 變數、B 變數兩數值大小關係。

P.17

隨堂練習：比較下列各組數的大小：

(1) $(2^{-2})^{-5}$ 、 4^7 、 $(\frac{1}{8})^{-4}$

(%i1) compare ((2^(-2))^(-5), 4^7) ;

(%o1) <

(%i2) compare (4^7,(1/8)^-4) ;

(%o2) >

(%i3) compare ((2^(-2))^(-5),(1/8)^-4) ;

(%o3) <

本題數值依大至小為： $4^7 > (\frac{1}{8})^{-4} > (2^{-2})^{-5}$

(2) $(0.3)^{-4}$ 、 $(0.027)^{-2}$ 、 $(\frac{10}{3})^5$

(%i1) compare (0.3^(-4),(0.027)^(-2)) ;

rat: replaced -1248.2853223594 by $-450631/361 = -1248.28531855956$

(%o1) <

(%i2) compare ((0.027)^(-2),(10/3)^5);

rat: replaced 960.2194787379974 by $700000/729 = 960.2194787379973$

(%o2) >

(%i3) compare (0.3^(-4),(10/3)^5);

rat: replaced -288.065843621399 by $-70000/243 = -288.065843621399$

(%o3) <

本題數值依大至小為： $(0.027)^{-2} > (\frac{10}{3})^5 > (0.3)^{-4}$

※ 「compare (A 變數,B 變數)」指令表示比較 A 變數、B 變數兩數值大小關係。

P.18

例題 8：試求 $3^{\sqrt{2}+1} \div (\sqrt{3})^{2\sqrt{2}-2}$ 的值：

(%i1) radcan(3^(sqrt(2)+1)/ sqrt(3)^(2*sqrt(2)-2));

(%o1) 9

※ 「radcan ([算式] × [算式])」指令表示化簡算式。

P.19

隨堂練習：試求 $(\sqrt{5})^{2\sqrt{3}-1} \div (5)^{\sqrt{3}-1}$ 的值：

(%i1) radcan(sqrt(5)^(2* sqrt(3)-1)/ 5^(sqrt(3)+1));

(%o1) $\frac{1}{5^{3/2}}$

※ 「radcan ([算式] × [算式])」指令表示化簡算式。

例題 9：設 $x, y \in R$ ， $375^x = 25$ ， $15^y = 125$ ，試求 $\frac{2}{x} - \frac{3}{y}$ 之值

※本題不建議使用 Maxima 解題※

隨堂練習：設 $a, b \in R$ ， $(17.28)^a = 1000$ ， $(0.01728)^b = 100$ ，試求 $\frac{3}{a} - \frac{2}{b}$ 之值

※本題不建議使用 Maxima 解題※

1. 觀念題：對的在題號前打○，錯的在題號前打×

___ (1) $(2 - \sqrt{3})^0 = 1$

___ (2) $\left(\frac{64}{27}\right)^{\frac{256}{81}} = \left(\frac{256}{81}\right)^{\frac{64}{27}}$

___ (3) $3^{2x} - 3^{-2x} = (3^x + 3^{-x})(3^x - 3^{-x})$

___ (4) $(0.1)^{\sqrt{3}} > \frac{1}{100}$

___ (5) 設 $a > 1$ ， $x \in R$ ，則 $a^x > x$

※本大題不建議使用 Maxima 解題※

2. 試求下列各式的值？

(1) $\sqrt[3]{125} + \sqrt[5]{\frac{1}{243}} - \sqrt[4]{256}$

(%i1) ((125^(1/3))/((1/243)^(1/5)))+(625^(1/4));

(%o1) 20

(2) $16^{0.75} + 25^{-0.5} - 10000^{-0.25}$

(%i1) 16^0.75+25^(-0.5)-10000^(-0.25);

(%o1) 8.099999999999998

(%i2) rat(%i1);

rat: replaced 8.099999999999998 by 81/10 = 8.1

(%o2) $\frac{81}{10}$

(3) $81^{\frac{1}{3}} \times \sqrt[3]{12^4} \times \sqrt[6]{4}$

(%i1) radcan((81^(1/3)*(12^4)^(1/3)*4^(1/6)));

(%o1) $8 \cdot 3^{8/3}$

$$(4) 9^{-\frac{3}{2}} \times 243^{\frac{4}{5}} \times \left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{1}{4}}$$

(%i1) $9^{(-3/2)} * 243^{(4/5)} * (1/81)^{(-1/4)}$;

(%o1) 9

※ 「rat(數值)」指令表示將數值轉換為分數。

※ 「radcan ([算式] × [算式])」指令表示化簡算式。

3. 設 $4^x + 8^y + 16^z = 32$ ($x, y, z \in Q$)，試求 $x^2 + y^2 + z^2$ 之值

※本題不建議使用 Maxima 解題※

4. 設 $a = \sqrt{5}$ 、 $b = 9^{\frac{1}{3}}$ 、 $c = 26^{\frac{1}{4}}$ 試比較 a、b、c 之大小

(%i1) a:sqrt(5);

(%o1) $\sqrt{5}$

(%i2) b: 9^(1/3);

(%o2) $9^{\frac{1}{3}}$

(%i3) c:26^(1/4);

(%o3) $26^{\frac{1}{4}}$

(%i4) compare (a,b) ;

(%o4) >

(%i5) compare (b,c) ;

(%o5) <

(%i6) compare (a,c) ;

(%o6) <

本題數值依大至小為： $a > b > c$

※ 「compare (A 變數,B 變數)」指令表示比較 A 變數、B 變數兩數值大小關係。



5. 試求 $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} \times \sqrt[6]{9-4\sqrt{5}}$ 之值

(%i1) (2+ (5^(1/2)))^(1/3)*(9-(4*(5^(1/2))))^(1/6);

(%o1)

6. 設 $a > 0$ 、 $a \neq 1$ 、 $x, y, z \in R$ ，試求 $(a^x)^{y-z} (a^y)^{z-x} (a^z)^{x-y}$

(%i1) radcan((a^x)^(y-z)* (a^y)^(z-x)* (a^z)^(x-y));

(%o1) 1

※ 「radcan ([算式] × [算式])」指令表示化簡算式。

7. 設 $a > 0$ 、 $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = 3$ ，試求下列各值：

(1) $a + a^{-1}$

(2) $a^2 + a^{-2} = 3$

(3) $a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}}$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.21

8. 設 $a = \frac{1}{2} \left(7^{\frac{1}{n}} + 7^{-\frac{1}{n}} \right)$ ， $n \in N$ ，試求 $(a + \sqrt{a^2 - 1})^n$ 之值

(%i1) a:(1/2)*(7^(1/n)+ 7^(-1/n));

(%o1) $\sqrt{5}$

(%i2) radcan((a+(a^2-1)^(1/2))^n);

(%o2) 7

※ 「radcan ([算式] × [算式])」指令表示化簡算式。

9. 設 $\sqrt{17 + \sqrt{288}}$ 的整數部分為 a ，小數部分為 b ，試求

(1) a 的值

(2) $b^2 + 4b - 2$ 的值

※本題不建議使用 Maxima 解題※

10. 設 $a > 0$ 、 $b > 0$ 、 $ab \neq 1$ 、 $x, y, z \in R$ ，且滿足 $a^x b^y = a^2 b$ 、 $a^y b^z = ab^2$ 、 $a^z b^x = ab$ ，試求 $x + y + z$ 之值

※本題不建議使用 Maxima 解題※

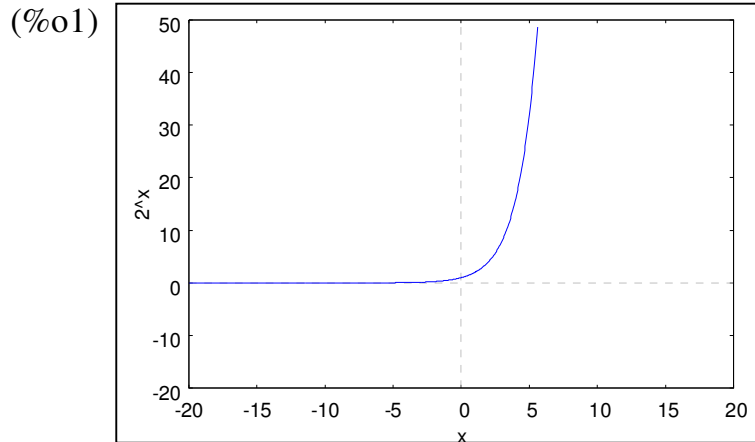
1-2 指數函數及其圖形

P.23

例題 1：試作 $y = 2^x$ 的圖形

```
(%i1) plot2d ([2^x],[x,-20,20],[y,-20,50]);
```

plot2d: some values were clipped.

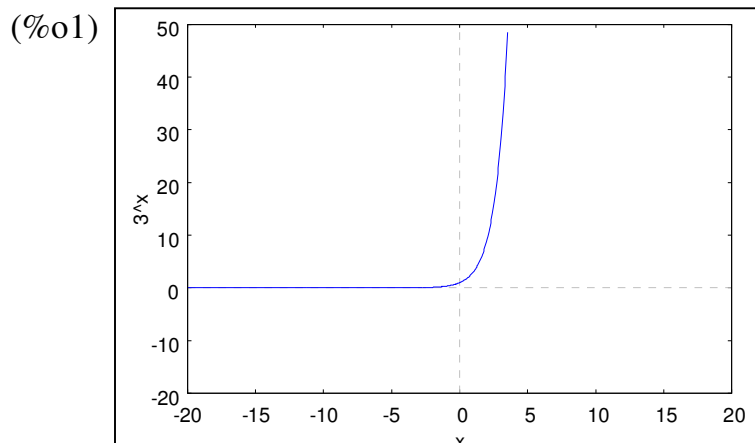


P.24

隨堂練習：試作 $y = 3^x$ 的圖形

```
(%i1) plot2d ([3^x],[x,-20,20],[y,-20,50]);
```

plot2d: some values were clipped.



※ 「plot2d ([方程式],[x,最小值,最大值],[y, 最小值,最大值])」；指令表示繪出方程式

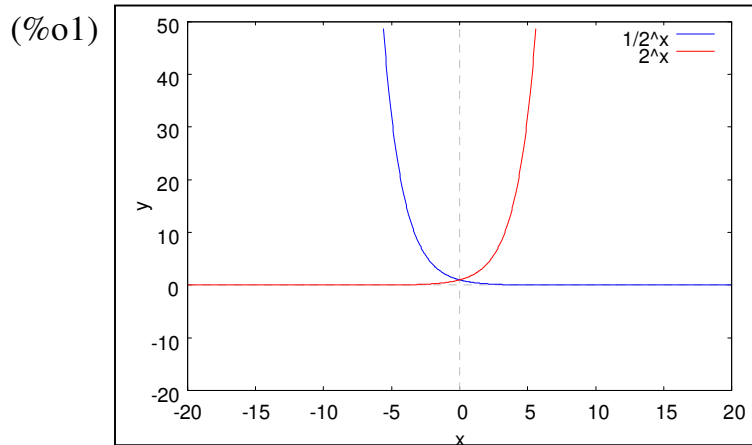
之圖形，其中 x 軸刻度介於最小值~最大值之間、 y 軸刻度介於最小值~最大值之間。

例題 2：試作 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的圖形，並與 $y = 2^x$ 的圖形作比較

```
(%i1) plot2d([(1/2)^x,2^x],[x,-20,20],[y,-20,50]);
```

plot2d: some values were clipped.

plot2d: some values were clipped.



※「plot2d ([方程式],[x,最小值,最大值],[y, 最小值,最大值])」；指令表示繪出方程式之圖形，其中 x 軸刻度介於最小值~最大值之間、 y 軸刻度介於最小值~最大值之間。

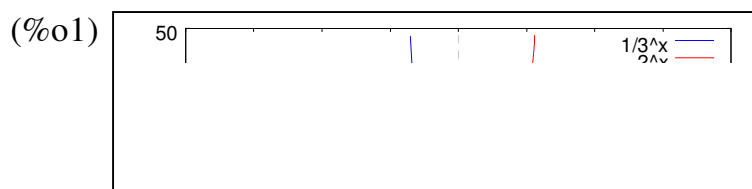
P.25

隨堂練習：試作 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 的圖形，並與 $y = 2^x$ 的圖形作比較

```
(%i1) plot2d([(1/3)^x,2^x],[x,-20,20],[y,-20,50]);
```

plot2d: some values were clipped.

plot2d: some values were clipped.



P.29

例題 3：已知 A、B、C、D 是 $y = (\sqrt{2})^x$ 、 $y = 2^x$ 、 $y = 3^x$ 、 $y = 3^{\frac{x}{2}}$ ，四個函數的部分圖形，請指出何者之圖形為 A

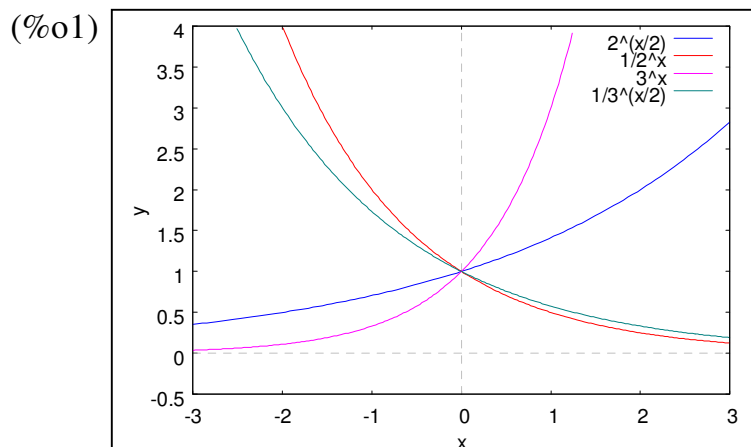
```
(%i1) plot2d([(sqrt(2))^x,2^(-x),3^x,3^(-x/2)], [x,-3,3],[y,-0.5,4]);
```

plot2d: some values were clipped.

plot2d: some values were clipped.

plot2d: some values were clipped.

plot2d: some values were clipped.

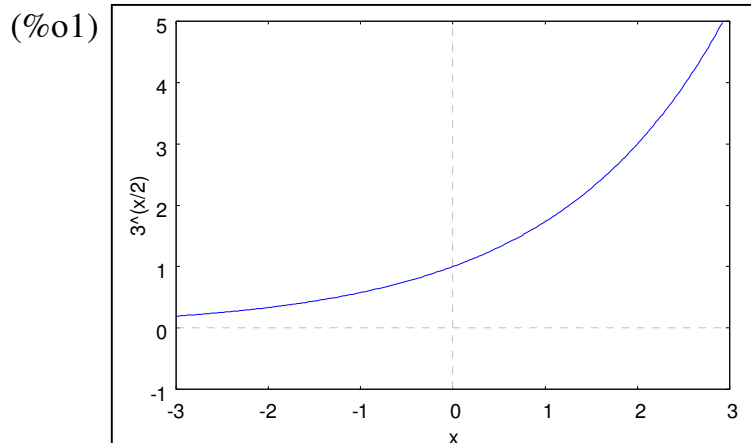


※「plot2d ([方程式],[x,最小值,最大值],[y, 最小值,最大值])」；指令表示繪出方程式之圖形，其中 x 軸刻度介於最小值~最大值之間、y 軸刻度介於最小值~最大值之間。

隨堂練習：A、B、C、D 何者為指數函數 $y = 3^{\frac{x}{2}}$ 的圖形

```
(%i1) plot2d ([3^(x/2)], [x, -3, 3], [y, -1, 5]);
```

plot2d: some values were clipped.



P.29

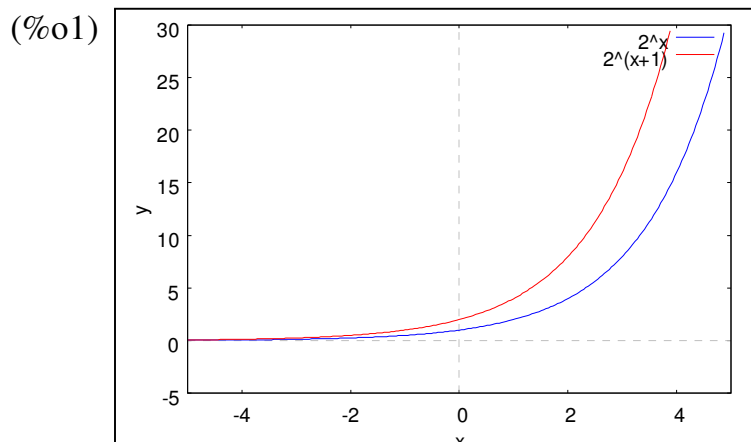
例題 4：試利用 $y = 2^x$ 的圖形，作下列函數圖形

(1) 試作 $y = 2^{x+1}$ 的圖形

```
(%i1) plot2d ([2^x, 2^(x+1)], [x, -5, 5], [y, -5, 30]);
```

plot2d: some values were clipped.

plot2d: some values were clipped.

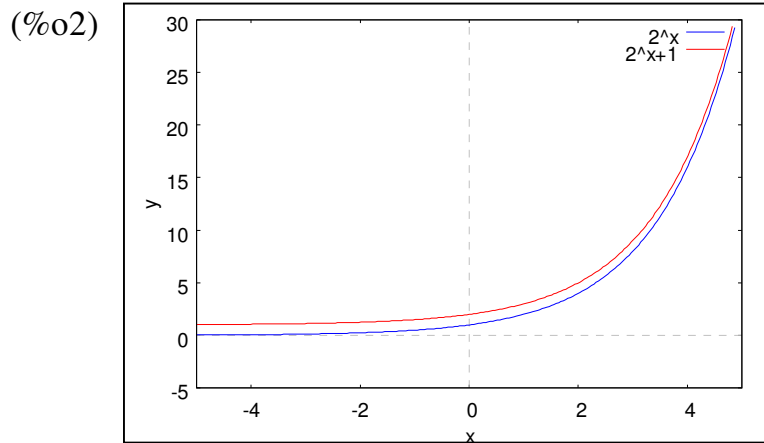


(2) 試作 $y = 1 + 2^x$ 的圖形

```
(%i2) plot2d ([2^x, 1+2^x], [x, -5, 5], [y, -5, 30]);
```

plot2d: some values were clipped.

plot2d: some values were clipped.



※「plot2d ([方程式],[x,最小值,最大值],[y, 最小值,最大值])」；指令表示繪出方程式之圖形，其中 x 軸刻度介於最小值~最大值之間、y 軸刻度介於最小值~最大值之間。

P.30

隨堂練習：

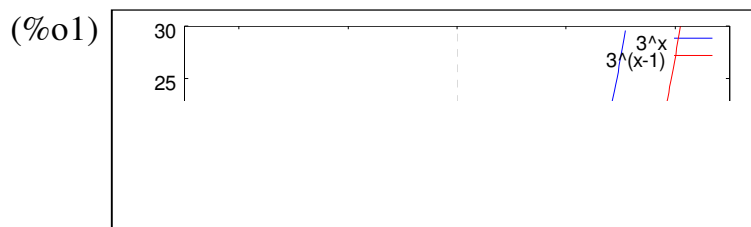
試利用 $y=3^x$ 的圖形，作下列函數圖形

(1)試作 $y=3^{x-1}$ 的圖形

(%i1) plot2d ([3^x,3^(x-1)],[x,-5,5],[y,-5,30]);

plot2d: some values were clipped.

plot2d: some values were clipped.

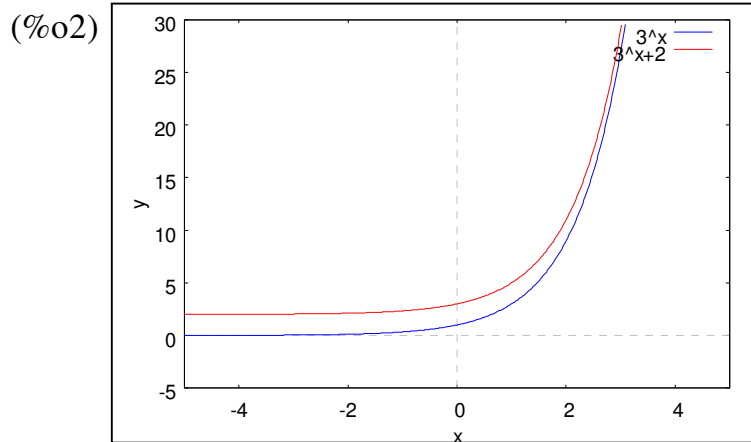


(2) 試作 $y = 2 + 3^x$ 的圖形

```
(%i2) plot2d ([3^x,2+3^x], [x,-5,5],[y,-5,30]);
```

plot2d: some values were clipped.

plot2d: some values were clipped.



P.31

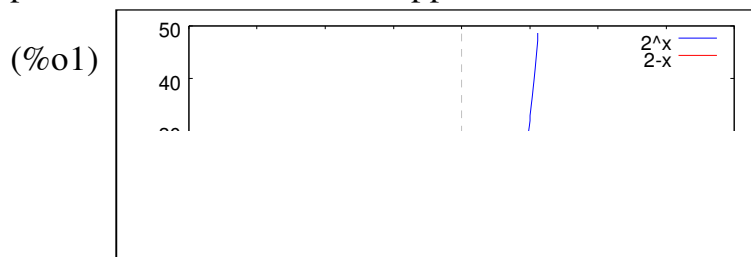
例題 5 :

(1) 試在一個坐標平面上，作出 $y = 2^x$ 及 $y = 2 - x$ 的圖形

```
(%i1) plot2d ([2^x,2-x],[x,-20,20],[y,-20,50]);
```

plot2d: some values were clipped.

plot2d: some values were clipped.



(2) 試求方程式作 $2^x = 2 - x$ 的實根個數

* $y = 2^x$ 與 $y = 2 - x$ 圖形交點，即為實根個數

※ 「plot2d ([方程式],[x,最小值,最大值],[y, 最小值,最大值])」；指令表示繪出方程式之圖形，其中 x 軸刻度介於最小值~最大值之間、y 軸刻度介於最小值~最大值之間。

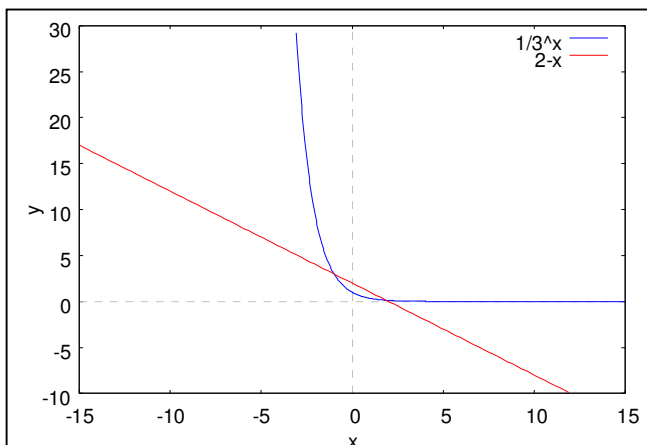
隨堂練習：試求方程式 $3^{-x} + x - 2 = 0$ 的實根個數

```
(%i1) plot2d ([3^(-x),2-x],[x,-15,15],[y,-10,30]);
```

plot2d: some values were clipped.

plot2d: some values were clipped.

```
(%o1)
```



例題 6：試解下列指數方程式：

$$(1) 27^x = 3^{2x-3}$$

(%i1) factor(27);

(%o1) 3³

(%i2) solve([3*x=2*x-3],[x]);

(%o2) [x=-3]

$$(2) 3^{x+1} = 9^{x+1} - 72$$

※ 「factor(數值)」指令表示求因式分解。

※ 「solve([變數算式],[變數])」指令表示求解。

隨堂練習：試解下列指數方程式：

$$(1) 25^{x+2} = 124 + 5^{2x+1}$$

$$(2) 2^{2x+2} = 9 \cdot 2^{2x+2} - 2$$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

例題 7：試解下列指數不等式：

$$(1) 27^{3-x} > 9^{x^2}$$

(%i1) factor(27);

(%o1) 3³

(%i2) factor(9);

(%o2) 3²

(%i3) load (fourier_elim);

(%o3) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier_elim/fourier_elim.lisp



```
(%i4) fourier_elim([3*(3-x)>2*x^2], [x]);
(%o4) [-3<x,x<3/2]
```

$$(2) (0.2)^{x^2-3x-7} > 0.008$$

```
(%i1) float(solve([0.2^z=0.008],[z]));
```

rat: replaced -0.008 by -1/125 = -0.008

rat: replaced 0.2 by 1/5 = 0.2

```
(%o1) [z=3.0, 5.0^-z-3 = 0.0]
```

```
(%i2) load (fourier_elim);
```

```
(%o2) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier_elim/fourier_elim.lisp
```

```
(%i3) fourier_elim([x^2-3*x-7<3], [x]);
```

```
(%o3) [-2<x,x<5]
```

※ 「factor(數值)」指令表示求因式分解。

※ 「load (fourier_elim)」指令可執行不等式計算，須先載入。

※ 「fourier_elim([變數算式], [變數])」求解不等式。

隨堂練習：試解下列指數不等式：

$$(1) \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2x^2+x+1} > \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2x-1}$$

```
(%i1) load (fourier_elim);
```

```
(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier_elim/fourier_elim.lisp
```

```
(%i2) fourier_elim([2*x^2+x+1>-(2x-1)], [x]);
```

```
(%o2) [0<x] or [x<-3/2]
```

$$(2) (0.3)^{x^2-8x-6} < 0.027$$


```
(%i1) float(solve([x=log(0.027)/log(0.3)],[x]));
```

rat: replaced -3.0 by -3/1 = -3.0

```
(%o1) [x=3.0]
```

```
(%i2) load (fourier_elim);
```

```
(%o2) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier_elim/fourier_elim.lisp
```

```
(%i3) fourier_elim([x^2-8*x-6>3], [x]);
```

```
(%o3) [9<x] or [x<-1]
```

※ 「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

※ 「solve([變數算式],[變數])」指令表示求解。

※ 「load (fourier_elim)」指令可執行不等式計算，須先載入。

※ 「fourier_elim([變數算式],[變數])」求解不等式。

例題 8：設 $f(x) = 2 \cdot 9^x - 12 \cdot 3^x + 7$ ， $-1 \leq x \leq 2$ ，試求 $f(x)$ 的最大值與最小值

※本題不建議使用 Maxima 解題※

隨堂練習：設 $f(x) = 4^x - 2^{x+1} - 5$ ， $-1 \leq x \leq 2$ ，試求 $f(x)$ 的最大值與最小值

※本題不建議使用 Maxima 解題※

1. 觀念題：對的在題號前打○，錯的在題號前打×

設 $f(x) = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$)，則

- ___ (1) $f(x)$ 之圖形恆過點 $(0, 1)$ 。
- ___ (2) $f(x)$ 之圖形與 x 軸沒有交點。
- ___ (3) $f(x)$ 之圖形與鉛錘線恆有交點。
- ___ (4) $f(x)$ 之圖形與水平線恆有交點。
- ___ (5) $f(x)$ 之圖形與直線 $x-y=0$ 恆有交點。
- ___ (6) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ 。
- ___ (7) $(f(x))^y = f(xy) = (f(y))^x$ 。
- ___ (8) $x > y \Leftrightarrow f(x) > f(y)$ 。

※本題不建議使用 Maxima 解題※

2. 試求函數 $y=4^x$ 與 $y=2^{3x+2}$ 之圖形的交點座標。

(%i1) factor(4);

(%o1) 2²

(%i2) solve([2*x=3*x+2],[x]);

(%o2) [x=-2]

(%i3) solve([4^(-2)=y],[y]);

(%o3) [y= $\frac{1}{16}$]

※「factor(數值)」指令表示求因式分解。

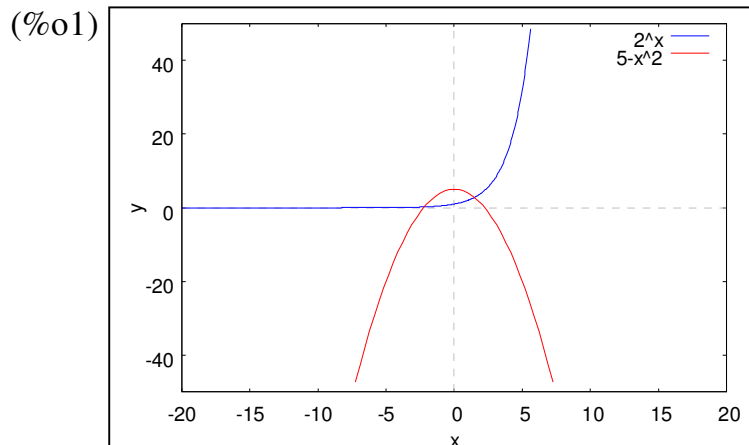
※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

3. 試求方程式 $x^2+2^x-5=0$ 之實根個數。

(%i1) plot2d ([2^x,5-x^2],[x,-20,20],[y,-50,50]);

plot2d: some values were clipped.

plot2d: some values were clipped.



※「plot2d ([方程式],[x,最小值,最大值],[y, 最小值,最大值])」；指令表示繪出方程式之圖形，其中 x 軸刻度介於最小值~最大值之間、y 軸刻度介於最小值~最大值之間。

4. 試解指數方程式 $2^{2x+1} - 33 \cdot 2^{x-2} - 5 = 0$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

5. 試解指數不等式 $(0.1)^{x^2-3x-1} > 0.001$

(%i1) float(solve([0.1^z=0.001],[z]));

rat: replaced -0.001 by -1/1000 = -0.001

rat: replaced 0.1 by 1/10 = 0.1

(%o1) [z=3.0, 10.0^{-z-3} = 0.0]

(%i2) load (fourier_elim);

(%o2) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier_elim/fourier_elim.lisp

(%i3) fourier_elim([x^2-3*x-1<3], [x]);

(%o3) [-1<x,x<4]

※ 「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

※ 「solve([變數算式],[變數])」指令表示求解。

※ 「load (fourier_elim)」指令可執行不等式計算，須先載入。

※ 「fourier_elim([變數算式],[變數])」求解不等式。

6. 設 $f(x) = 9^x - 6 \cdot 3^x + 5$ ， $0 \leq x \leq 2$ ，試求 $f(x)$ 的最大值與最小值

※本題不建議使用 Maxima 解題※

7. 求正實數 a 之範圍使 $x^2 - 2ax + a^a = 0$ 有實根

※本題不建議使用 Maxima 解題※

8. 設 $f(x) = \frac{2^x + 2^{-x}}{2}$ ， $f(a) = 6$ ，試求 $f(2a)$ 的值

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.36**例題 1**：試求下列各記號所標示的值

(1) $\log_2 8$

(%i1) $\log_2(x) := \log(x)/\log(2);$

(%o1) $\log_2(x) = \frac{\log(x)}{\log(2)}$

(%i2) $\text{float}(\log_2(8));$

(%o2) 3.0

(2) $\log_{\frac{1}{9}} 3$

(%i1) $\text{float}(\log(3)/\log(1/9));$

(%o1) -0.5

(3) $\log_{10} \sqrt{0.001}$

(%i1) $\log_{10}(x) := \log(x)/\log(10);$

(%o1) $\log_{10}(x) = \frac{\log(x)}{\log(10)}$

(%i2) $\text{float}(\log_{10}(\text{sqrt}(0.001)));$

(%o2) -1.5

※ 「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

P.37**隨堂練習**：試求下列各記號所標示的值

(1) $\log_5 25$

(%i1) $\log_5(x) := \log(x)/\log(5);$

(%o1) $\log_5(x) = \frac{\log(x)}{\log(5)}$

(%i2) float(log5(25));

(%o2) 2.0

(2) $\log_{\frac{1}{2}} 8$

(%i1) float(log(8)/log(1/2));

(%o1) -3.0

(3) $\log_{10} \sqrt{1000}$

(%i1) log10(x):=log(x)/log(10);

(%o1) $\log_{10}(x) = \frac{\log(x)}{\log(10)}$

(%i2) float(log10(sqrt(1000)));

(%o2) 1.5

※ 「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

例題 2：若 $\log_{x-1}(-x^2 + 4x - 3)$ 有意義，試求實數 x 的範圍

※本題不建議使用 Maxima 解題※

隨堂練習：試求實數 x 的範圍，使 $\log_{(4-x)}(2x^2 - 5x + 3)$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.37

例題 3：求下列各式的值

(1) $\log_3 243$

(%i1) float(log(243)/log(3));

(%o1) 4.999999999999999

* $\log_{10} 243 = \text{float}(\log(243)/\log(10)) = 2.385606273598312$

$\log_{10} 3 = \text{float}(\log(3)/\log(10)) = 0.47712125471966$

註： $\log_{10} 243$ 與 $\log_{10} 3$ 不為整數，兩者相除無法整除，故答案非整數(其值近似於 5)

(2) $25^{\log_5 7}$

(%i1) float(25^(log(7)/log(5)));

(%o1) 48.999999999999999

※ 「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

隨堂練習：

(1) $\log_7 343$

(%i1) float(log(343)/log(7));

(%o1) 3.0

(2) $2^{\log_4 3}$

(%i1) float(2^(log(3)/log(4)));

(%o1) 3.0

※ 「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

P.39

例題 4：試求 $\log_5 75 + \log_5 45 - \log_5 27$ 的值

(%i1) log5(x):=log(x)/log(5);

(%o1) $\log_5(x) = \frac{\log(x)}{\log(5)}$

(%i2) float(log5(75)+ log5(45)- log5(27));

(%o2) 3.0

※ 「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

隨堂練習：試求 $\log_3 \frac{5}{4} + \log_3 \frac{6}{5} + \log_3 \frac{8}{7} + \log_3 \frac{7}{6} + \log_3 \frac{27}{2}$ 的值

(%i1) log3(x):=log(x)/log(3);

(%o1) $\log_3(x) = \frac{\log(x)}{\log(3)}$

(%i2) float(log3(5/4)+ log3(6/5)+ log3(8/7)+ log3(7/6)+ log3(27/2));

(%o2) 3.0

※ 「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

例題 5：試求 $\log_{10} \frac{14}{25} - 5 \log_{10} 2 - 2 \log_{10} 3 + \log_{10} \frac{36}{7}$ 的值

(%i1) log10(x):=log(x)/log(10);

(%o1) $\log_{10}(x) = \frac{\log(x)}{\log(10)}$

(%i2) float(log10(14/25)-5* log10(2)- 2*log10(3)+ log10(36/7));

(%o2) -2.0

※ 「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

隨堂練習：試求 $2 \log_4 \frac{6}{7} + \log_4 \frac{14}{3} + \log_4 \frac{28}{15} - 3 \log_4 \sqrt[6]{\frac{16}{25}}$ 的值

(%i1) log4(x):=log(x)/log(4);

(%o1) $\log_4(x) = \frac{\log(x)}{\log(4)}$

(%i2) float(2* log4(6/7)+ log4(14/3)+ log4(28/15)-3* log4((16/25)^(1/6)));

(%o2) 1.5

※ 「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

P.40

例題 6：求下列各式的值

(1) $\log_{32} 8$

```
(%i1) float(log(8)/log(32));
```

```
(%o1) 0.6
```

(2) $\log_{\frac{1}{27}} 243$

```
(%i1) rat(float(log(243)/log(1/27)));
```

```
rat: replaced -1.666666666666667 by -5/3 = -1.666666666666667
```

```
(%o1) - $\frac{3}{5}$ 
```

(3) $(\log_2 3)(\log_3 4)$

```
(%i1) float((log(3)/log(2))*(log(4)/log(3)));
```

```
(%o1) 2
```

※ 「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

※ 「rat(數值)」指令表示將數值轉換為分數。

P.41

隨堂練習：求下列各式的值

(1) $\log_{125} 25$

```
(%i1) rat(float((log(25)/log(125))));
```

```
rat: replaced 0.666666666666667 by 2/3 = 0.666666666666667
```

$$(\%o1) \frac{2}{3}$$

$$(2) \log_{\frac{1}{49}} 343$$

(%i1) float((log(343)/log(1/49)));

$$(\%o1) -1.5$$

$$(3) (\log_3 7)(\log_7 81)$$

(%i1) float((log(7)/log(3))*(log(81)/log(7)));

$$(\%o1) 4.0$$

※ 「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

※ 「rat(數值)」指令表示將數值轉換為分數。

例題 7：設 $\log_2 3 = a$ ， $\log_3 11 = b$ ，試以 a 、 b 表示 $\log_{66} 33$ 的值

※本題不建議使用 Maxima 解題※

隨堂練習：設 $\log_2 3 = a$ ， $\log_3 5 = b$ ，試以 a 、 b 表示 $\log_{60} 45$ 的值

※本題不建議使用 Maxima 解題※

例題 8：設 $a > 0$ 、 $a \neq 1$ 、 $b > 0$ 、 $x_1, x_2 \in R$ 且 $x_1 \neq 0$ ，試證：
$$\log_{a^{x_1}} b^{x_2} = \frac{x_2}{x_1} \log_a b$$
，

試求 $x + y + z$ 之值

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.42

例題 9：試求 $(\log_2 5 + \log_4 0.2)(\log_5 4 + \log_{25} 8)$ 的值

```
(%i1)float(((log(5)/log(2))+log(0.2)/log(4))*((log(4)/log(5))+log(8)/log(25)));
```

```
(%o1) 1.75
```

※ 「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

隨堂練習：試求 $(\log_2 3 + \log_4 9)(\log_3 8 + \log_9 0.5)$ 的值

```
(%i1)float(((log(3)/log(2))+log(3)/log(4))*((log(8)/log(3))+log(0.5)/log(9)));
```

```
(%o1) 3.75
```

※ 「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

例題 10：天文學中，視星等-是根據肉眼觀測星球的亮度來定義其星等，若織女星的亮度為 F_0 ，則一顆亮度為 F 的星星，其星等定為： $m = -2.5 \log_{10} \frac{F}{F_0}$ ，稱之為 m 等星；

試問 1 等星亮度是 6 等星亮度的多少倍？

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.43

隨堂練習：

目前國際使用-芮氏規模-來表示地震強度，設 $E(r)$ 為地震-芮氏規模 r -震央所釋放出來的能量(單位為耳格)，且 r 與 $E(r)$ 的關係如下： $\log_{10} E(r) = 11.8 + 1.5r$ ；試問芮氏規模 6 的地震，其震央所釋放的能量是芮氏規模 4 的地震震央所釋放的能量之多少倍？

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.44 **習題 1-3**

1. 觀念題：對的在題號前打○，錯的在題號前打×

___ (1) $\log_{(-2)}(-8) = 3$ 。

___ (2) $\log_{10} 5 = \log_{10} 2 + \log_{10} 3$ 。

___ (3) $\log_3 x^2 = 2 \log_3 x$ ，(其中 $x \neq 0$)。

___ (4) $(\log_2 3)^5 = 5 \log_2 3$ 。

___ (5) $\log_3 4^{\log_3 5} = \log_3 5^{\log_3 4}$ 。

※本題不建議使用 Maxima 解題※

2. 設 $\log_{(x-2)}(6x^2 - 35x + 50)$ 有意義，試求 x 的範圍。

※本題不建議使用 Maxima 解題※

3. 試求下列各式的值：

(1) $\log_7 49 + \log_{\frac{1}{3}} 27 + \log_4 \frac{1}{8}$

(%i1) float((log(49)/log(7))+log(27)/log(1/3))+(log(1/8)/log(4));

(%o1) -2.5

(2) $9^{\log_3 5} + 8^{\log_2 3} + 10^{\log_{\sqrt{10}} 2}$

(%i1) float(9^(log(5)/log(3))+8^(log(3)/log(2))+10^(log(2)/log(sqrt(10))));

(%o1)

※「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

4. 試求下列各式的值：

(1) $\log_4 \sqrt{\frac{7}{48}} + \frac{1}{2} \log_2 12 - \log_4 \sqrt{42}$

```
(%i1) float((log((7/48)^(1/2))/log(4))+((1/2)*(log(12)/log(2)))-(log((42)^(1/2))/log(4)));
```

```
(%o1) -0.25
```

(2) $(\log_3 15)(\log_5 15) - (\log_3 5 - \log_5 3)$

```
(%i1) float((log(15)/log(3))*(log(15)/log(5))-((log(5)/log(3))+log(3)/log(5)));
```

```
(%o1) 2.0
```

(3) $5^{\frac{\log_2 7}{\log_2 5}} + 7^{\frac{\log_3 25}{\log_3 49}}$

```
(%i1) float(5^((log(7)/log(2))/(log(5)/log(2)))+7^((log(25)/log(3))/(log(49)/log(3))));
```

```
(%o1) 12.0
```

※ 「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

5. 設 $\log_2 3 = a$ 、 $\log_3 7 = b$ ，試以 a 、 b 表示 $\log_{42} 56$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

6.

(1) 試求 $\log_3(\log_7 8) + 4\log_{81}(\log_4 49)$ 的值

```
(%i1) float((log(log(8)/log(7))/log(3))+4*(log(log(49)/log(4))/log(81)));
```

```
(%o1) 1.0
```

(2) 試求 $(\log_4 27)(\log_9 125)(\log_{\frac{1}{25}} 49)(\log_7 64)$ 的值

```
(%i1) float(((log(27)/log(4))*(log(125)/log(9)))+((log(49)/log(1/25))*(log(64)/log(7))));
```

```
(%o1) -13.5
```

※ 「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

7. 設 $a > b > 0$ ，且 $a^2 - 3ab - 4b^2 = 0$ ，試求 $\log_{10}(2a^2 - 3ab + 10b^2) - \log_{10}(a^2 + 2ab - 21b^2)$ 的值

※本題不建議使用 Maxima 解題※

8. 試求無窮級數 $3^{-\log_3 2} + 3^{-2\log_3 2} + 3^{-3\log_3 2} + \dots + 3^{-n\log_3 2} + \dots$ 的和

※本題不建議使用 Maxima 解題※

9. 設 a 、 b 、 c 為三正數，試求 $a^{\log_3 \frac{b}{c}} \cdot b^{\log_3 \frac{c}{a}} \cdot c^{\log_3 \frac{a}{b}}$ 的值(提示：設 $x = a^{\log_3 \frac{b}{c}} \cdot b^{\log_3 \frac{c}{a}} \cdot c^{\log_3 \frac{a}{b}}$ ，兩邊取對數)

※本題不建議使用 Maxima 解題※

10. 聲音的強度是用每平方公尺多少瓦特(W/m^2)來衡量，一般人能感覺出聲音的最小強度為 $I_0 = 10^{-12}$ (W/m^2)；當測得的聲音強度為 I (W/m^2)時，所產生的噪音分貝 d 為 $d(I) = 10 \cdot \log_{10} \frac{I}{I_0}$

(1) 一隻蚊子震動翅膀的聲音強度為 10^{-12} (W/m^2)，求其產生噪音分貝數

(2) 汽車製造廠測試發現，某款新車以每小時 60 公里速度行駛時，測得的聲音強度為 10^{-14} (W/m^2)，試問此聲音強度產生的噪音為多少分貝？

(3) 棒球比賽中，若一支瓦斯汽笛獨鳴，測得的噪音為 70 分貝，則百支瓦斯汽笛同時同地和鳴，測得的聲音大約多少分貝？(假設 n 支瓦斯汽笛合鳴，其強度為一支瓦斯汽笛的 n 倍)

※本題不建議使用 Maxima 解題※

1-4 對數函數及其圖形

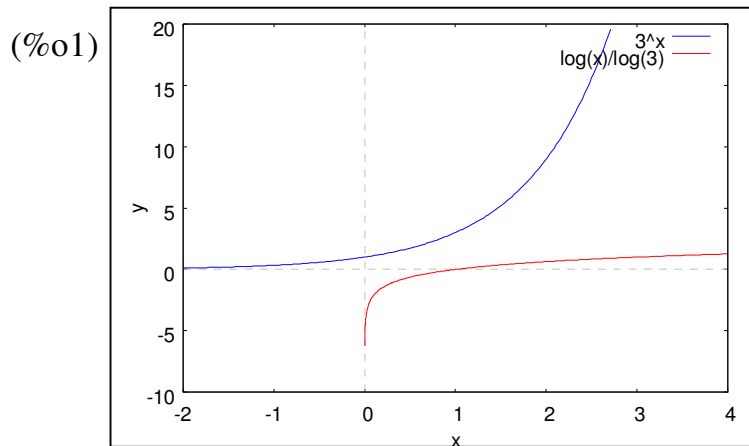
P.47

隨堂練習：試作 $y = \log_3 x$ 的圖形，並與 $y = 3^x$ 的圖形作比較

```
(%i1) plot2d ([3^x,log(x)/log(3)],[x,-2,4],[y,-10,20]);
```

plot2d: some values were clipped.

plot2d: expression evaluates to non-numeric value somewhere in plotting range.



P.48

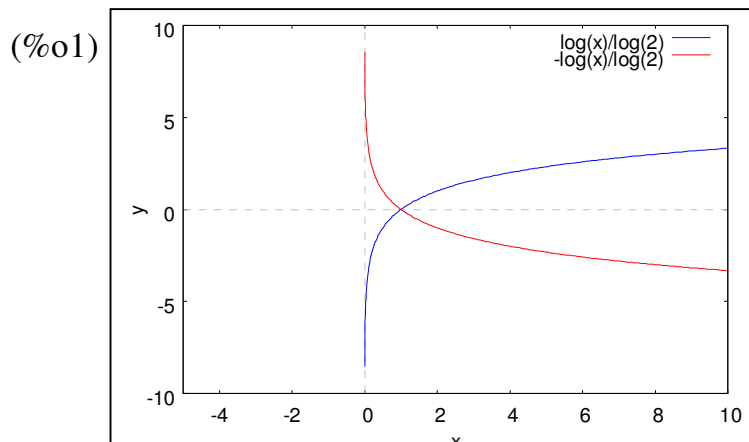
例題 1：試將對數函數 $y = \log_2 x$ 與 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 的圖形畫在同一作邊平面上，並說明其關係

係

```
(%i1) plot2d ([log(x)/log(2),log(x)/log(1/2)],[x,-5,10],[y,-10,10]);
```

plot2d: some values were clipped.

plot2d: expression evaluates to non-numeric value somewhere in plotting range.



※ 「plot2d ([方程式],[x,最小值,最大值],[y, 最小值,最大值])」; 指令表示繪出方程式之圖形，其中 x 軸刻度介於最小值~最大值之間、y 軸刻度介於最小值~最大值之間。

P.50

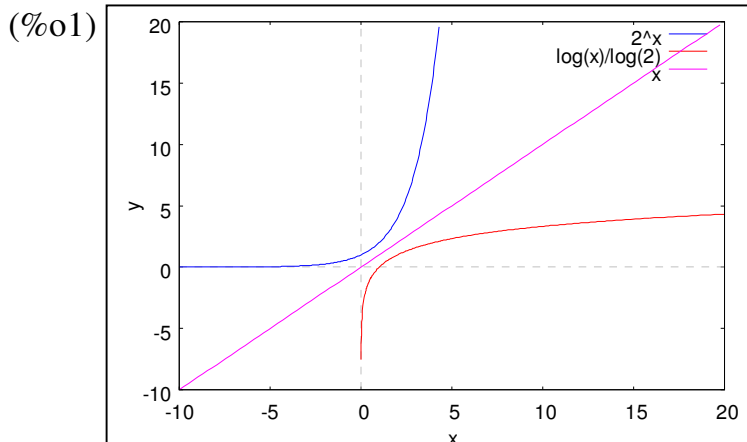
例題 2：已知 $y = 2^x$ 的圖形，利用對稱關係，作出 $y = \log_2 x$ 及 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 的圖形

```
(%i1) plot2d([2^x,log(x)/log(2),x],[x,-10,20],[y,-10,20]);
```

plot2d: some values were clipped.

plot2d: expression evaluates to non-numeric value somewhere in plotting range.

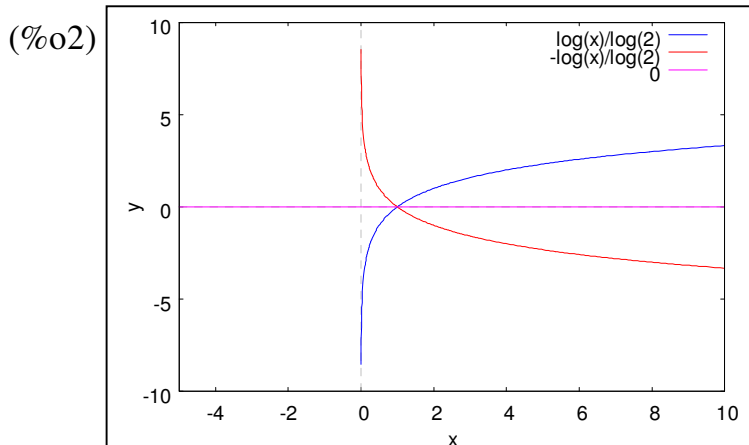
plot2d: some values were clipped.



```
(%i2) plot2d([log(x)/log(2),log(x)/log(1/2),0],[x,-5,10],[y,-10,10]);
```

plot2d: expression evaluates to non-numeric value somewhere in plotting range.

plot2d: expression evaluates to non-numeric value somewhere in plotting range.



※「plot2d ([方程式],[x,最小值,最大值],[y, 最小值,最大值])」; 指令表示繪出方程式之圖形，其中 x 軸刻度介於最小值~最大值之間、y 軸刻度介於最小值~最大值之間。

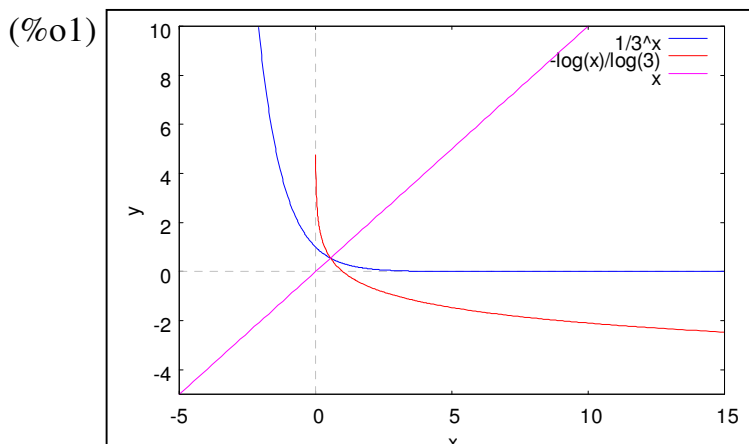
隨堂練習：已知 $y = (\frac{1}{3})^x$ 的圖形，利用對稱關係，作出 $y = \log_3 x$ 及 $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ 的圖形

(%i1) plot2d([(1/3)^x,log(x)/log(1/3),x],[x,-5,15],[y,-5,10]);

plot2d: some values were clipped.

plot2d: expression evaluates to non-numeric value somewhere in plotting range.

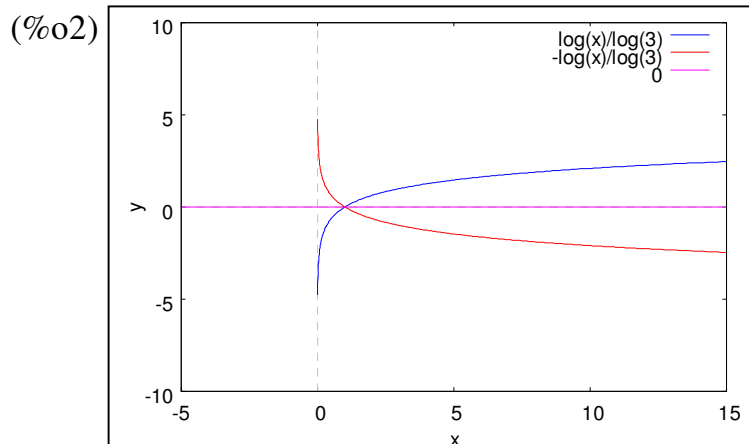
plot2d: some values were clipped.



(%i2) plot2d([log(x)/log(3),log(x)/log(1/3),0], [x,-5,15],[y,-10,10]);

plot2d: expression evaluates to non-numeric value somewhere in plotting range.

plot2d: expression evaluates to non-numeric value somewhere in plotting range.



P.52

例題 3：設 $a = \log_3 \sqrt{6}$ 、 $b = \log_9 5$ 、 $c = \log_{27} 8$ ，試比較 a 、 b 、 c 的大小

(%i1)a:log(sqrt(6))/log(3)

(%o1) $\frac{\log(6)}{2\log(3)}$

(%i2)b:log(5)/log(9)

(%o2) $\frac{\log(5)}{\log(9)}$

(%i3)c:log(8)/log(27)

(%o3) $\frac{\log(8)}{\log(27)}$

(%i4) compare(a,b) ;

(%o4) >

(%i5) compare(a,c) ;

(%o5) >

(%i6) compare(b,c) ;

(%o6) >

本題數值依大至小為： $a = \log_3 \sqrt{6} > b = \log_9 5 > c = \log_{27} 8$

※ 「compare (A 變數,B 變數)」指令表示比較 A 變數、B 變數兩數值大小關係。



隨堂練習： 設 $a = \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{5}$ 、 $b = \log_{\frac{1}{3}} 2$ 、 $c = \log_{\frac{1}{3}} \frac{8}{5}$ ，試比較 a、b、c 的大小

(%i1)a:log(sqrt(5))/log(1/3)

(%o1) $-\frac{\log(5)}{2\log(3)}$

(%i2)b:log(2)/log(1/3)

(%o2) $-\frac{\log(2)}{\log(3)}$

(%i3)c:log(8/5)/log(1/3)

(%o3) $-\frac{\log\left(\frac{8}{5}\right)}{\log(3)}$

(%i4) compare(a,b) ;

(%o4) <

(%i5) compare(a,c) ;

(%o5) <

(%i6) compare(b,c) ;

(%o6) <

本題數值依大至小為： $a = \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{5} < b = \log_{\frac{1}{3}} 2 < c = \log_{\frac{1}{3}} \frac{8}{5}$

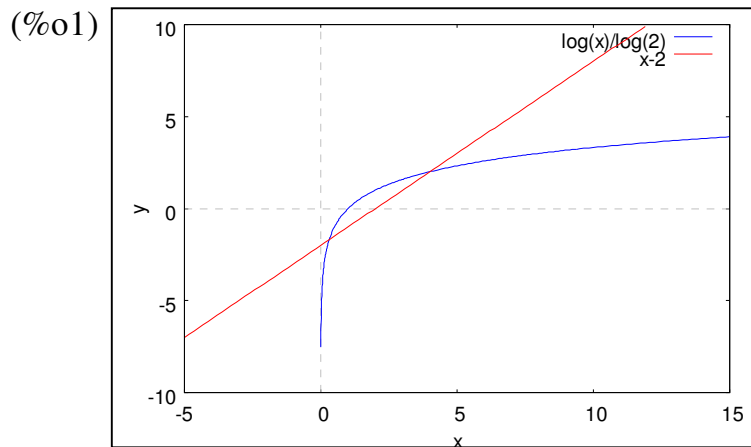
※ 「compare (A 變數,B 變數)」指令表示比較 A 變數、B 變數兩數值大小關係。

例題 4： 試求方程式 $\log_2 x = x - 2$ 的實根個數

(%i1) plot2d([log(x)/log(2),x-2], [x,-5,15],[y,-10,10]);

plot2d: expression evaluates to non-numeric value somewhere in plotting range.

plot2d: some values were clipped.

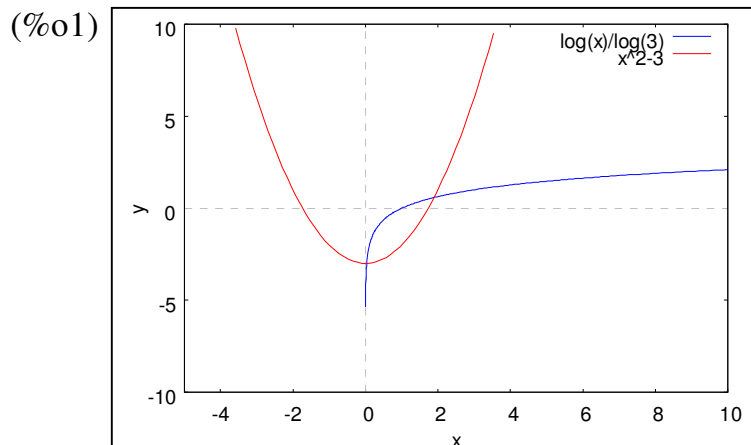


隨堂練習：試求方程式 $\log_3 x = x^2 - 3$ 的實根個數

```
(%i1) plot2d([log(x)/log(3),x^2-3], [x,-5,15],[y,-10,10]);
```

plot2d: expression evaluates to non-numeric value somewhere in plotting range.

plot2d: some values were clipped.



※「plot2d ([方程式],[x,最小值,最大值],[y, 最小值,最大值])」；指令表示繪出方程式之圖形，其中 x 軸刻度介於最小值~最大值之間、y 軸刻度介於最小值~最大值之間。

P.53

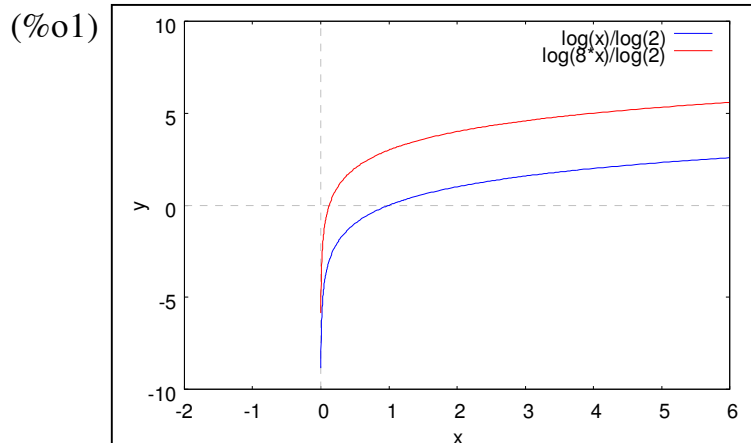
例題 5：試利用 $y = \log_2 x$ 的圖形，作下列函數的圖形：

(1) $y = \log_2 8x$

```
(%i1) plot2d([log(x)/log(2), log(8*x)/log(2)], [x,-2,6],[y,-10,10]);
```

plot2d: expression evaluates to non-numeric value somewhere in plotting range.

plot2d: expression evaluates to non-numeric value somewhere in plotting range.



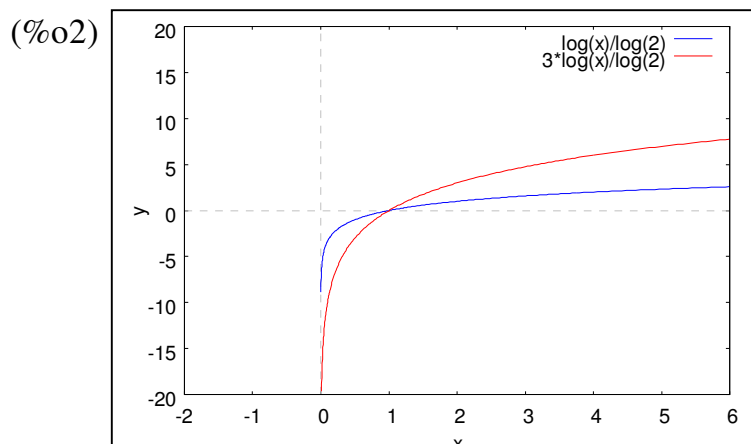
(2) $y = \log_2 x^3$

(%i2) plot2d([log(x)/log(2), log(x^3)/log(2)], [x,-2,6],[y,-10,10]);

plot2d: expression evaluates to non-numeric value somewhere in plotting range.

plot2d: expression evaluates to non-numeric value somewhere in plotting range.

plot2d: some values were clipped.



※ 「plot2d ([方程式],[x,最小值,最大值],[y, 最小值,最大值])」；指令表示繪出方程式之圖形，其中 x 軸刻度介於最小值~最大值之間、y 軸刻度介於最小值~最大值之間。

P.54

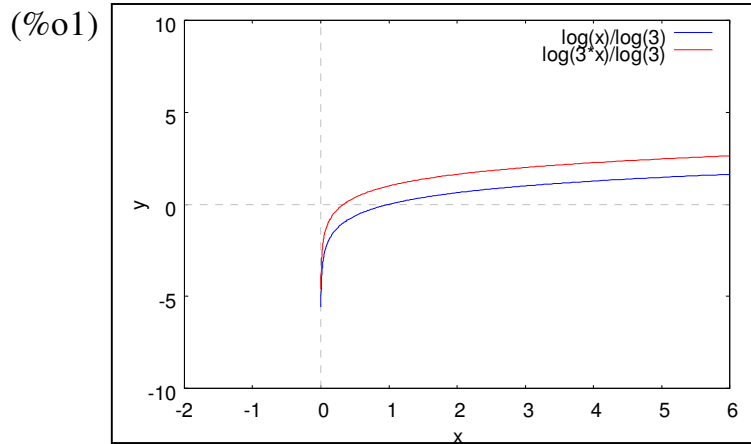
隨堂練習：試利用 $y = \log_3 x$ 的圖形，作下列函數的圖形：

(1) $y = \log_3 3x$

```
(%i1) plot2d([log(x)/log(3), log(3*x)/log(3)], [x,-2,6],[y,-10,10]);
```

plot2d: expression evaluates to non-numeric value somewhere in plotting range.

plot2d: expression evaluates to non-numeric value somewhere in plotting range.



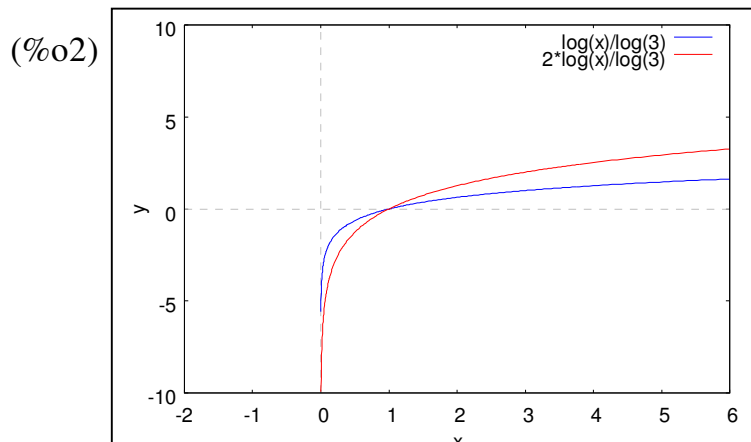
(2) $y = \log_3 x^2 (x > 0)$

```
(%i2) plot2d([log(x)/log(3), log(x^2)/log(3)], [x,-2,6],[y,-10,10]);
```

plot2d: expression evaluates to non-numeric value somewhere in plotting range.

plot2d: expression evaluates to non-numeric value somewhere in plotting range.

plot2d: some values were clipped.



例題 6：試解對數方程式 $\log_2(x+3) = 1 + \log_4(x+6)$

```
(%i1) solve([(x+3)^2=4*x+24],[x]);
```

```
(%o1) [x=3,x=-5]
```

* 方程式 $\log_2(x+3) = 1 + \log_4(x+6)$ 可寫成 $\log_4(x+3)^2 = \log_4 4 + \log_4(x+6)$ ，整理後可得

$$\log_4(x+3)^2 = \log_4(4x+24)$$

* $\log_2(x+3)$ ， $x > -3$ 、 $\log_4(x+6)$ ， $x > -6$ ；故本題 x 為 3

※ 「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

P.55

隨堂練習：試解對數方程式 $\log_3(x-1) = \log_9(9-4x)$

```
(%i1) solve([(x-1)^2=9-4*x],[x]);
```

```
(%o1) [x=-4,x=2]
```

* 方程式 $\log_3(x-1) = \log_9(9-4x)$ 可寫成 $\log_9(x-1)^2 = \log_9(9-4x)$

* $\log_3(x-1)$ ， $x > 1$ 、 $\log_9(9-4x)$ ， $x < \frac{9}{4}$ ；故本題 x 為 2

※ 「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

例題 7：試解對數不等式 $\log_{0.1}(x+3) > \log_{0.01}(4x+24)$

```
(%i1) load(fourier_elim);
```

```
(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier_elim/fourier_elim.lisp
```

```
(%i2) fourier_elim([(x+3)^2 < 4*x+24],[x]);
```

```
(%o2) [-5<x,x<3]
```

* 不等式 $\log_{0.1}(x+3) > \log_{0.01}(4x+24)$ 可寫成 $\log_{0.01}(x+3)^2 > \log_{0.01}(4x+24)$

* $\log_{0.1}(x+3)$ ， $x > -3$ 、 $\log_{0.01}(4x+24)$ ， $x < -6$ ；故本題為 $-3 < x < 3$

※ 「load (fourier_elim)」指令可執行不等式計算，須先載入。



※ 「fourier_elim([變數算式], [變數])」 求解不等式。

P.56

隨堂練習：試解對數不等式 $\log_2(x-1) < \log_4(13-6x)$

```
(%i1) load(fourier_elim);
```

```
(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier_elim/fourier_elim.lisp
```

```
(%i2) fourier_elim([(x-1)^2 < 13- 6*x],[x]);
```

```
(%o2) [-6<x,x<2]
```

* 不等式 $\log_2(x-1) < \log_4(13-6x)$ 可寫成 $\log_4(x-1)^2 < \log_4(13-6x)$

* $\log_2(x-1)$, $x > 1$ 、 $\log_4(13-6x)$, $x < \frac{13}{6}$; 故本題為 $1 < x < 2$

※ 「load (fourier_elim)」 指令可執行不等式計算，須先載入。

※ 「fourier_elim([變數算式], [變數])」 求解不等式。

例題 8：設 $x > 0$, $f(x) = 2(\log_2 x)^2 + \log_2(2x)^4 - 3$,

(1) 令 $t = \log_2 x$, 試以 t 表示 $f(x)$

(2) 試求 $f(x)$ 的最小值，並求此時 x 的值

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.57 **習題 1-4**

1. 觀念題：對的在題號前打○，錯的在題號前打×

___ (1) $\log_{\frac{1}{2}} 3 > \log_{\frac{1}{2}} 5$ 。

___ (2) $\log_3 b > 0 \Rightarrow b > 1$ 。

___ (3) $\log_{0.2} b > 0 \Rightarrow 0 < b < 1$ 。

___ (4) $y = \log_3 x$ 與 $y = \log_3 \frac{1}{x}$ 的圖形對稱於 x 軸。

___ (5) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ 與 $y = 3^{-x}$ 的圖形對稱於直線 $x=y$ 。

___ (6) 對 x 軸為 $y = \log_5 x$ 圖形的漸近線。

___ (7) 設 $0 < x_1 < x_2$ ，則 $\frac{\log_3 x_1 + \log_3 x_2}{2} > \log_2 \frac{x_1 + x_2}{2}$

___ (8) 設 $a > 1$ ， $x > 0$ ，則 $a^x > x > \log_a x$

___ (9) 若不等式 $\log_z x < 0$ 的解為 $0 < x < 1$ ，則 $a > 1$ 。

___ (10) 若不等式 $\log_z x > 0$ 的解為 $0 < x < 1$ ，則 $0 < a < 1$ 。

※本題不建議使用 Maxima 解題※

2. 設 A、B、C、D 分別代表對數函數 $y = \log_a x$ 、 $y = \log_b x$ 、 $y = \log_c x$ 、 $y = \log_d x$ 的部分圖形，根據右圖判斷底數 a、b、c、d 的大小關係。

※本題不建議使用 Maxima 解題※

3. 已知 $y = \log_3 x$ 的圖形，試說明如何利用「對稱、平移、伸縮」的方法，作出下列函數的圖形：

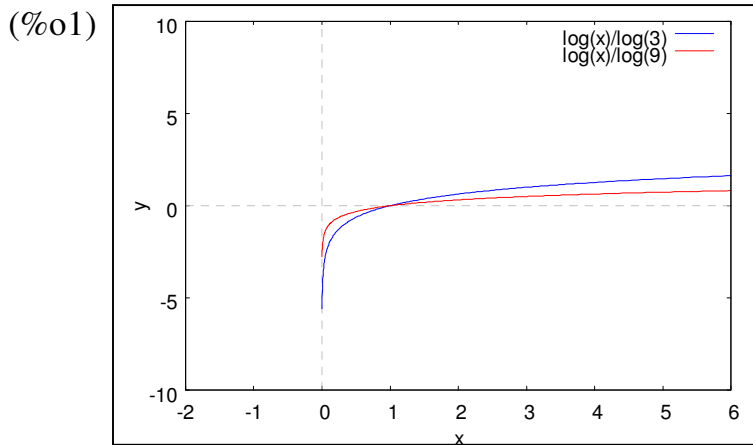
(1) $y = \log_9 x$

```
(%i1) plot2d([log(x)/log(3), log(x)/log(9)], [x,-2,6],[y,-10,10]);
```

plot2d: expression evaluates to non-numeric value somewhere in plotting range.

plot2d: expression evaluates to non-numeric value somewhere in plotting range.



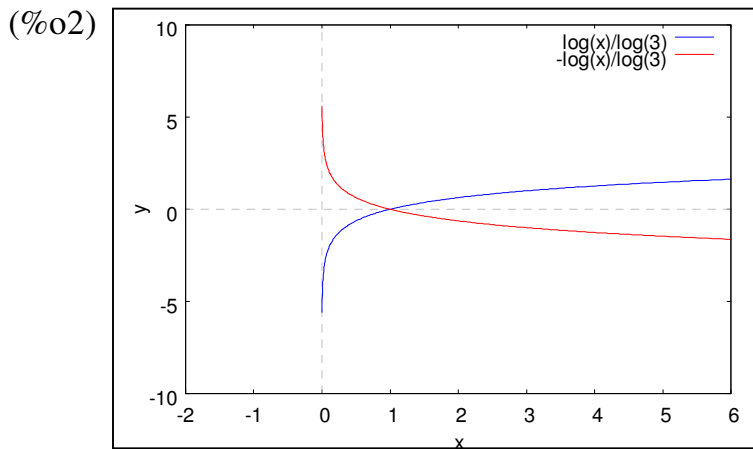


(2) $y = \log_3 \frac{1}{x}$

(%i2) plot2d([log(x)/log(3), log(1/x)/log(3)], [x,-2,6],[y,-10,10]);

plot2d: expression evaluates to non-numeric value somewhere in plotting range.

plot2d: expression evaluates to non-numeric value somewhere in plotting range.

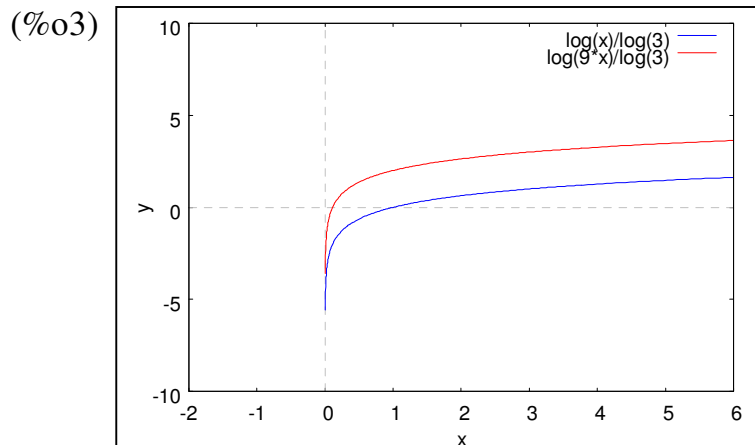


(3) $y = \log_3 9x$

(%i3) plot2d([log(x)/log(3), log(9*x)/log(3)], [x,-2,6],[y,-10,10]);

plot2d: expression evaluates to non-numeric value somewhere in plotting range.

plot2d: expression evaluates to non-numeric value somewhere in plotting range.

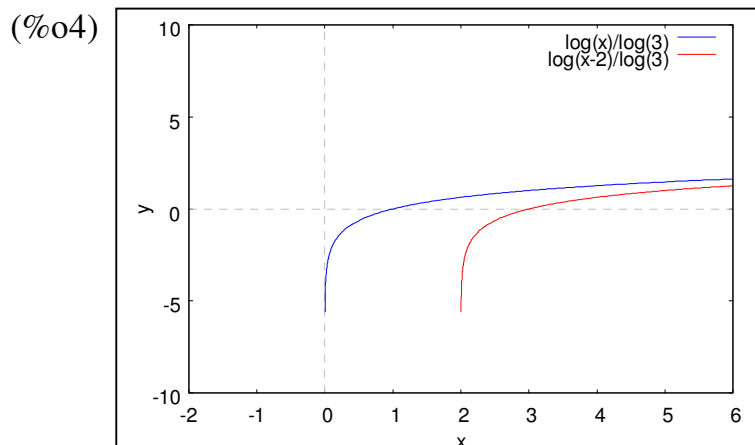


(4) $y = \log_3(x-2)$

(%i4) `plot2d([log(x)/log(3), log(x-2)/log(3)], [x,-2,6],[y,-10,10]);`

plot2d: expression evaluates to non-numeric value somewhere in plotting range.

plot2d: expression evaluates to non-numeric value somewhere in plotting range.



※「`plot2d` ([方程式],[x,最小值,最大值],[y, 最小值,最大值])」；指令表示繪出方程式之圖形，其中 x 軸刻度介於最小值~最大值之間、 y 軸刻度介於最小值~最大值之間。

4. 設 $\log_3(x-5)$ 有意義，試求 $3^{\log_3(x-5)} - |x-3|$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

5. 設 $a = \frac{3}{2}$ 、 $b = \log_3 5$ 、 $c = \log_2 \sqrt{3}$ 、 $d = \log_7 27$ 、 $e = \log_6 \frac{1}{2}$ ，試比較 a、b、c、d、e 之大

小關係

(%i1) a: 3/2

(%o1) $\frac{3}{2}$

(%i2) b: log(5)/log(3)

(%o2) $\frac{\log(5)}{\log(3)}$

(%i3) c: log(sqrt(3))/log(2)

(%o3) $\frac{\log(3)}{2\log(2)}$

(%i4) d: log(27)/log(7)

(%o4) $\frac{\log(27)}{\log(7)}$

(%i5) e: log(1/2)/log(6)

(%o5) $-\frac{\log(2)}{\log(6)}$

(%i6) compare(a,b) ;

(%o6) >

(%i7) compare(a,c) ;

(%o7) >

(%i8) compare(a,d) ;

(%o8) <

(%i9) compare(a,e) ;

(%o9) >

(%i10) compare(b,c) ;

(%o10) >

(%i11) compare(b,d) ;

(%o11) <

(%i12) compare(b,e) ;

(%o12) >

(%i13) compare(c,d) ;

(%o13) <

(%i12) compare(d,e) ;

(%o12) <

* 本題數值依大至小為： $d = \log_7 27 > a = \frac{3}{2} > b = \log_3 5 > c = \log_2 \sqrt{3} > e = \log_6 \frac{1}{2}$

※ 「compare (A 變數,B 變數)」指令表示比較 A 變數、B 變數兩數值大小關係。

6. 試解對數方程式 $\log_{\frac{1}{2}}(x+1)(x-2) = -2$

(%i1) solve([(x+1)*(x-2) = (1/2)^-2],[x]);

(%o1) [x=3,x=-2]

* 方程式 $\log_{\frac{1}{2}}(x+1)(x-2) = -2$ 可寫成 $\log_{\frac{1}{2}}(x+1)(x-2) = -2\log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2})$ ，整理後可得

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+1)(x-2) = \log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2})^{-2}$$

* $\log_{10}(x+1)$ ， $x > -1$ 、 $\log_{10}(x-2)$ ， $x > 2$ ；故本題為 $x=3$ 、 -2

※ 「solve([變數算式],[變數])」指令表示求解。

7. 試解對數不等式 $\log_{10}(x-1) < 1 + 2\log_{10}(x-3)$

(%i1) load(fourier_elim);

(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier_elim/fourier_elim.lisp

(%i2) fourier_elim([(x-1) < 10*(x-3)^2],[x]);

(%o2) [$\frac{7}{2} < x$] or [$x < \frac{13}{5}$]

* 不等式 $\log_{10}(x-1) < 1 + 2\log_{10}(x-3)$ 可寫成 $\log_{10}(x-1) < \log_{10} 10 + 2\log_{10}(x-3)$ ，整理後可得



$$\log_{10}(x-1) < \log_{10} 10(x-3)^2$$

* $\log_{10}(x-1)$, $x > 1$ 、 $\log_{10}(x-3)$, $x > 3$; 故本題為 $\frac{7}{2} < x$

※ 「load (fourier_elim)」 指令可執行不等式計算，須先載入。

※ 「fourier_elim([變數算式], [變數])」 求解不等式。

8. 試解對數不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)(x-2) \geq -2$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

9. 設 $y = \log_2|x|$ ($x \neq 0$) ,

(1) 試作 $y = f(x)$ 的圖形

(2) 試求 $f(x) + x + 2 = 0$ 的實根個數

※本題不建議使用 Maxima 解題※

10. 設 $1 \leq x \leq 100$, $y = x^{1-\log_{10} x}$

(1) 令 $t = \log_{10} x$, 試以 t 表示 $\log_{10} y$

(2) 試求 y 的最小值，並求此時 x 的值

※本題不建議使用 Maxima 解題※

1-5 對數的應用

※本章節以 Maxima 解題※

P.60

例題 1：試利用附錄-常用對數表查出 $\log 4.68$ 與 $\log 4.683$ 的值

```
(%i1)float(log(4.68)/log(10));
```

```
(%o1) 0.67024585307412
```

```
(%i2)float(log(4.683)/log(10));
```

```
(%o2) 0.67052415778208
```

※「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

隨堂練習：試利用附錄-常用對數表查出 $\log 2.54$ 與 $\log 2.545$ 的值

```
(%i1)float(log(2.54)/log(10));
```

```
(%o1) 0.40483371661994
```

```
(%i2)float(log(2.545)/log(10));
```

```
(%o2) 0.40568778667278
```

※「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

P. 61

例題 2：試利用附錄-常用對數表查出：

(1)滿足 $\log x=0.6684$ 之真數 x 的值

```
(%i1)float(solve([log(x)/log(10)=0.6684],[x]));
```

```
rat: replaced -0.6684 by -1671/2500 = -0.6684
```

```
(%o1) [x=4.660151117021842]
```

(2)滿足 $\log x=0.5652$ 之真數 x 的值

```
(%i2)float(solve([log(x)/log(10)=0.5652],[x]));
```

```
rat: replaced -0.5652 by -1413/2500 = -0.5652
```

```
(%o2) 3.674514791999401
```

※ 「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

※ 「solve([變數算式],[變數])」指令表示求解。

隨堂練習：試利用附錄-常用對數表查出：

(1)滿足 $\log x=0.7340$ 之真數 x 的值

```
(%i1)float(solve([log(x)/log(10)=0.7340],[x]));
```

```
rat: replaced -0.734 by -367/500 = -0.734
```

```
(%o1) [x=5.420008904016239]
```

(2)滿足 $\log x=0.8284$ 之真數 x 的值

```
(%i2)float(solve([log(x)/log(10)=0.8284],[x]));
```

```
rat: replaced -0.8284 by -2071/2500 = -0.8284
```

```
(%o2) [x=6.73596776222943]
```

※ 「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

※ 「solve([變數算式],[變數])」指令表示求解。

例題 3：試利用附錄-常用對數表查出 $\log 8.36$ 的值，並利用對數的性質求 $\log 83600$

及 $\log 0.00836$ 的值

```
(%i1)float(log(8.36)/log(10));
```

```
(%o1) 0.92220627743902
```

```
(%i2)float(log(83600)/log(10));
```



```
(%o2) 4.922206277439016
```

```
(%i3)float(log(0.00836)/log(10));
```

```
(%o3) 2.077793722560983
```

※ 「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

P. 62

隨堂練習：試利用附錄-常用對數表查出 $\log 2.37$ 的值，並利用對數的性質求 $\log 2370$ 及 $\log 0.00237$ 的值

```
(%i1)float(log(2.37)/log(10));
```

```
(%o1) 0.3747483460101
```

```
(%i2)float(log(2370)/log(10));
```

```
(%o2) 3.374748346010103
```

```
(%i3)float(log(0.00237)/log(10));
```

```
(%o3) 2.625251653989896
```

※ 「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

例題 4：

(1)試利用附錄-常用對數表查出滿足 $\log x = 0.6702$ 之真數 x 的值

```
(%i1)float(solve([log(x)/log(10)=0.6702],[x]));
```

```
rat: replaced -0.6702 by -3351/5000 = -0.6702
```

```
(%o1) [x=4.679505908852534]
```

(2)已知 $\log x_1 = 4.6702$ ， $\log x_2 = -2.3298$ ，試利用(1)求出 x_1 、 x_2

```
(%i2)float(solve([log(x1)/log(10)=4.6702],[x]));
```

rat: replaced -4.6702 by $-23351/5000 = -4.6702$

(%o2) [x1=46795.05908852541]

(%i3)float(solve([log(x2)/log(10)=-2.3298],[x]));

rat: replaced 2.3298 by $11649/5000 = 2.3298$

(%o3) [x2=0.0046795059088525]

※ 「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

※ 「solve([變數算式],[變數])」指令表示求解。

隨堂練習：已知 $\log x_1=1.8698$ ， $\log x_2=-3.4855$ ，試利用常用對數表求出 x_1 、 x_2

(%i1)float(solve([log(x1)/log(10)=1.8698],[x]));

rat: replaced -1.8698 by $-9349/5000 = -1.8698$

(%o1) [x1=74.09689339136988]

(%i2)float(solve([log(x2)/log(10)=-3.4855],[x]));

rat: replaced 3.4855 by $6971/2000 = 3.4855$

(%o2) [x2=3.2696404683430505*10^-4]

※ 「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

※ 「solve([變數算式],[變數])」指令表示求解。

例題 5：

(1)試利用附錄-常用對數表查出 $\log 2$ 、 $\log 3$ 之值

(%i1)float(log(2)/log(10));

(%o1) 0.30102999566398

(%i2)float(log(3)/log(10));

(%o2) 0.47712125471966

(2)試利用(1)求 $\log 4$ 、 $\log 5$ 、 $\log 6$ 、 $\log 8$ 、 $\log 9$ 的值

```
(%i3)float(log(4)/log(10));
```

```
(%o3) 0.60205999132796
```

```
(%i4)float(log(5)/log(10));
```

```
(%o4) 0.69897000433602
```

```
(%i5)float(log(6)/log(10));
```

```
(%o5) 0.77815125038364
```

```
(%i6)float(log(8)/log(10));
```

```
(%o6) 0.90308998699194
```

```
(%i7)float(log(9)/log(10));
```

```
(%o7) 0.95424250943932
```

※ 「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

P. 63

隨堂練習：

(1)試利用附錄-常用對數表查出 $\log 2$ 、 $\log 3$ 、 $\log 7$ 之值

```
(%i1)float(log(2)/log(10));
```

```
(%o1) 0.30102999566398
```

```
(%i2)float(log(3)/log(10));
```

```
(%o2) 0.47712125471966
```

```
(%i3)float(log(7)/log(10));
```

```
(%o3) 0.84509804001426
```

(2)試利用(1)求 $\log 42$ 的值

```
(%i4)float(log(42)/log(10));
```

```
(%o4) 1.6232492903979
```

※ 「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

P. 64

例題 6：設 $\log x$ 的尾數與 $\log 5495$ 的尾數相同，且首數為 -2，試求 x 的值

```
(%i1) float(5495*10^-3);
```

```
(%o1) 5.495
```

```
(%i2)5.495*10^-2;
```

```
(%o2) 0.05495
```

$$\begin{aligned} * \log 5495 &= \log 1000 \times 5.495 = \log 1000 + \log 5.495 = \log 10^3 + \log 5.495 \\ &= 3 + \log 5.495 \end{aligned}$$

$$* \log 5.495 - 2 = \log 5.495 + \log 10^{-2} = \log 5.495 \times 10^{-2} = \log 0.05495$$

※ 「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

隨堂練習：設 $\log x$ 的尾數與 $\log 0.00543$ 的尾數相同，且首數為 6，試求 x 的值

```
(%i1) 0.00543*10^3;
```

```
(%o1) 5.43
```

```
(%i2)5.43*10^6;
```

```
(%o2) 5430000
```

$$* \log 0.00543 = \log \frac{1}{1000} \times 5.43 = -3 + \log 5.43$$

$$* \log 5.43 + 6 = \log 5.43 + \log 10^6 = \log 5.43 \times 10^6 = \log 5430000$$

例題 7：設 $\log 2=0.3010$ ：

(1) 試求 $\log 2^{50}$ 的首數與尾數

(2) 判斷 2^{50} 為幾位數

(3) 試求 2^{50} 的最高位數字

※本題不建議使用 Maxima 解題※

隨堂練習：設 $\log 2=0.3010$ 、 $\log 3=0.4771$ ：

(1) 試求 $\log 3^{32}$ 的首數與尾數

(2) 判斷 3^{32} 為幾位數、並求 3^{32} 的最高位數字

(3) 試比較 3^{32} 與 2^{50} 的大小

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P. 65

例題 8：設 $\log 2=0.3010$ 、 $\log 3=0.4771$ 、 $\log 7=0.8451$ ，若 2^{-60} 自小數點後第 n 位始出現不為 0 的數字 a ，試求 n 與 a 的值

※本題不建議使用 Maxima 解題※

隨堂練習：設 $\log 2=0.3010$ 、 $\log 3=0.4771$ ，若 3^{-40} 自小數點後第 n 位始出現不為 0 的數字 a ，試求 n 與 a 的值

※本題不建議使用 Maxima 解題※

例題 9：設本金 100000 元，年利率 6%，半年複利一次，五年期滿，試利用附錄-常用對數表求可得本利和多少元？

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P. 66

隨堂練習：設以年利率 6%，一年複利一次，現在至少應存多少錢，才能使五年期滿的本利和達到 100000 元。(利用附錄-常用對數表)

※本題不建議使用 Maxima 解題※

例題 10：設 $\log 2.387=0.3779$ 、 $\log 2.388=0.3781$ ，試利用內插法求 $\log 2.3876$ 的值

```
(%i1) float(solve([((2.388-2.387)/(2.388-2.3876))=((0.3781-0.3779)/(0.3781-x))],[x]));
```

```
rat: replaced 2.5 by 5/2 = 2.5
```

```
rat: replaced -1.9999999999978E-4 by -1/5000 = -2.0E-4
```

```
rat: replaced 0.3781 by 3781/10000 = 0.3781
```

```
(%o1) [x=0.37802]
```

※「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

※「solve([變數算式],[變數])」指令表示求解。

隨堂練習：設 $\log 1.575=0.1973$ 、 $\log 1.576=0.1976$ ，試利用內插法求 $\log 157.57$ 的值

```
(%i1) float(solve([((1.576-1.575)/(1.576-1.5757))=((0.1976-0.1973)/(0.1976-x))],[x]));
```

```
rat: replaced 3.333333333334073 by 10/3 = 3.333333333333334
```

```
rat: replaced -2.99999999999947E-4 by -3/10000 = -3.0E-4
```

```
rat: replaced 0.1976 by 247/1250 = 0.1976
```

```
(%o1) [x=0.19751]
```

```
(%i2) 2+0.19751;
```

```
(%o2) 2.19751
```

* $\log 157.57 = \log 100 \times 1.5757 = \log 100 + \log 1.5757 = \log 10^2 + \log 1.5757$

$= 2 + \log 1.5757$

※ 「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

※ 「solve([變數算式],[變數])」指令表示求解。

P. 68

例題 11：設 $\log 4.07=0.6096$ 、 $\log 4.08=0.6107$ ，若 $\log x=-1.3897$ 試利用內插法求 x 的值

```
(%i1)2-1.3897;
```

```
(%o1) 0.6103
```

```
(%i2) float(solve([(4.08-4.07)/(4.08-t))=((0.6107-0.6096)/(0.6107-0.6103))],[t]);
```

```
rat: replaced -2.74999999999951 by -11/4 = -2.75
```

```
rat: replaced 0.0099999999999998 by 1/100 = 0.01
```

```
rat: replaced 4.08 by 102/25 = 4.08
```

```
(%o2) [t=4.076363636363636]
```

```
(%i3) float(-2+log(4.076363636363636)/log(10));
```

```
(%o3) -1.38972708123529
```

```
(%i4) float(solve([log(x)/log(10)=-1.38972708123529],[x]));
```

```
(%o4) [x=0.040763637194326]
```

※ 「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

※ 「solve([變數算式],[變數])」指令表示求解。

隨堂練習：設 $\log 306=2.4857$ 、 $\log 30.7=1.4871$ ，試利用內插法求 $10^{3.48654}$ 的值

```
(%i1) float(solve([(3.07-3.06)/(3.07-x))=((0.4871-0.4857)/(0.4871-0.48654))],[x]);
```

```
rat: replaced -2.49999999999999 by -5/2 = -2.5
```

```
rat: replaced 0.0099999999999998 by 1/100 = 0.01
```

rat: replaced 3.07 by $307/100 = 3.07$

(%o1) [x=3.066]

* $\log 306 = \log 100 \times 3.06 = \log 100 + \log 3.06 = 2 + \log 3.06$

→ $\log 3.06 = 2.4857 - 2 = 0.4857$

* $\log 30.7 = \log 10 \times 3.07 = \log 10 + \log 3.07 = 1 + \log 3.07$

→ $\log 3.07 = 1.4871 - 1 = 0.4871$

* $\log 3.066 + 3 = \log 3.066 + \log 1000 = \log 3.066 \times 1000 = \log 3066$

※本題答案為 3066

※「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

例題 12：試利用附錄-常用對數表求 $\sqrt[3]{5.266}$ 的值

(%i1) float(solve(log(x)/log(10)=log((5.266)^(1/3))/log(10)));

rat: replaced -0.553757020358 by $-3250/5869 = -0.5537570284546$

(%o1) [x=1.739777146769346]

※「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

※「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

P. 69

隨堂練習：試利用附錄-常用對數表求 $\sqrt[5]{8.944}$ 的值

(%i1) float(solve([log(x)/log(10)=log((8.944)^(1/5))/log(10)], [x]));

rat: replaced -0.4381965832825 by $-7824/17855 = -0.43819658359$

(%o1) [x=1.549909564259625]

※「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

※ 「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

例題 13：試利用附錄-常用對數表求 $\frac{2.36 \times (5.73)^4 \times (4.99)^2}{(3.38)^2 \times (4.02)^3}$ 的值

```
(%i1) float(solve(log(x)/log(10)=log(2.36*(5.73^4)*(4.99^2)/(3.38^2*4.02^3))/log(10)));
```

```
rat: replaced -4.44679843458832 by -9445/2124 = -4.44679849340866
```

```
(%o1) [x=85.3532471315238]
```

※ 「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

※ 「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

隨堂練習：試利用附錄-常用對數表求 $\sqrt{\frac{5110}{17 \times (5.36)^3}}$ 的值

```
(%i1) float(solve(log(x)/log(10)=log((5110/(17*5.36^3))^(1/2)/log(10))));
```

```
rat: replaced 1.397136391118208 by 1854/1327 = 1.397136397889977
```

```
(%o1) [x=0.31651352053621]
```

※ 「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

※ 「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

P.70 **習題 1-5**

1. 觀念題：對的在題號前打○，錯的在題號前打×

___ (1) 若 $\log x = -2.4231$ ，則 $\log x$ 的尾數為 0.4231。

___ (2) 若 $\log x = -3.1728$ ，則 x 為純小數且自小數第四位始不為 0。

___ (3) 若 $\log x^2$ 與 $\log \frac{1}{x}$ 的尾數相同，則 $\log x^3$ 為整數。

___ (4) $\log 1.37$ 與 $\log 13700$ 的尾數相同。

___ (5) 若 x 為 13 位正整數，則 $12 \leq \log x \leq 13$

___ (6) 若 x 為純小數且自小數第八位始不為 0，則 $-8 \leq \log x \leq -7$

___ (7) 設 $a \cdot 10^n$ 為正數 x 的科學記號，則 $1 \leq a \leq 10$ 且 $n \in \mathbb{Z}$

___ (8) 設 $\log a$ 的尾數是 $\log b$ 尾數的 2 倍，則 $\log b$ 的尾數小於 $\frac{1}{2}$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

2. 利用附錄-常用對數表，寫出下列對數值：

(1) $\log 5.468$

(%i1)float(log(5.486)/log(10));

(%o1) 0.73925580326851

(2) $\log 27.38$

(%i1)float(log(27.38)/log(10));

(%o1) 1.437433443797971

(3) $\log 0.04364$

(%i1)float(log(0.04364)/log(10));

(%o1) -1.360115258083696

※ 「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

3. 利用附錄-常用對數表，求下列方程式中 x 的值：

(1) $\log x = 2.4823$

```
(%i1)float(solve([log(x)/log(10)=2.4823],[x]));
```

```
rat: replaced -2.4823 by -12131/4887 = -2.48229997953755
```

```
(%o1) [x=303.5987502942292]
```

(2) $\log x = 4.7147$

```
(%i1)float(solve([log(x)/log(10)=4.7147],[x]));
```

```
rat: replaced -4.7147 by -21136/4483 = -4.71469997769351
```

```
(%o1) [x=51844.17616793088]
```

※ 「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

※ 「solve([變數算式],[變數])」指令表示求解。

4. 利用附錄-常用對數表，求 $(2.7)^{100}$ 乘開後的整數部分是幾位數？又其最高位數字為何？

※本題不建議使用 Maxima 解題※

5. 已知 47^{100} 為 168 位數，試問 47^{27} 是幾位數？

※本題不建議使用 Maxima 解題※

6. $\left(\frac{5}{8}\right)^{40}$ 表成小數時，在小數點後第幾位數字不為 0？又此不為 0 之數字為何？

※本題不建議使用 Maxima 解題※

7. 設 $\log 341=2.5328$ ， $\log 34.2=1.5340$ ， $\log x=-3.4670$ ，試求 x 的值

※本題不建議使用 Maxima 解題※

8. 小明將 100 萬元以定期存款存入銀行，年利率為 1.8%，每年複利計息一次，試問幾年(取整數)後，問小明可得本利和 200 萬元？

※本題不建議使用 Maxima 解題※

9. 根據統計資料，在 A 鎮裡，某件訊息發佈後， t 小時內聽到該訊息的人口佔全鎮人口的 $100(1-2^{-kt})\%$ ，其中 k 是大於 0 的常數；今有某項訊息發佈 3 小時內已經有 70% 人口聽聞此訊息，試問最快要多少小時(以四捨五入法取到小數點後第一位)，才能使全鎮 99% 的人聽到該訊息？

※本題不建議使用 Maxima 解題※

10. 假設世界人口自 1980 年起，五十年內每年的增長率均固定，已知西元 1987 年 7 月 11 日世界人口達 50 億人(聯合國將 7 月 11 日訂為"世界人口日")，西元 1999 年第 60 億人口誕生在東歐塞拉耶佛；根據上述資料推估在哪一年，世界人口將達 70 億人？

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.72**綜合練習**

1. 計算下列各式的值：

(1) $64^{\frac{2}{3}}$

(%i1) $64^{(2/3)}$;

(%o1) 16

(2) $0.04^{\frac{3}{2}}$

(%i2) $0.04^{(3/2)}$;

(%o2) 0.008

(3) $\sqrt{7+4\sqrt{3}} + (7-4\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}$

(%i3) $\text{sqrt}(7+4*(\text{sqrt}(3))) + (\text{sqrt}(7-4*(\text{sqrt}(3))))$;

(%o3)

2. 求下列各式的值：

(1) $\log_{\frac{3}{\sqrt{5}}}(1.8)^2$

(%i1) $\text{float}(\log((1.8)^2)/\log(3/(\text{sqrt}(5))))$;

(%o1) 4.0

(2) $\log_4 \sqrt{\frac{7}{48}} + \log_4 12 - \frac{1}{2} \log_4 42$

(%i2) $\text{float}((\log(\text{sqrt}(7/48))/\log(4))+\log(12)/\log(4)-(1/2*(\log(42)/\log(4))))$;

(%o2) -0.25

$$(3) (\log_2 5 + \log_8 125) \cdot (\log_{\sqrt{5}} 2 + \log_5 16)$$

```
(%i3) float(((log(2)/log(5))+ (log(125)/log(8)))* ((log(2)/log(sqrt(5)))+ (log(16)/log(5))));
```

```
(%o3) 7.112893786043668
```

※ 「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

3. 求下列各式的值

$$(1) \log_3 54 + \log_3 6 - \log_3 2$$

```
(%i1) float((log(54)/log(3))+log(6)/log(3)-(log(2)/log(3)));
```

```
(%o1) 4.630929753571458
```

$$(2) \log \frac{4}{7} - \frac{4}{3} \log \sqrt{8} + \frac{2}{3} \log \sqrt{343}$$

```
(%i1) float((log(4/7)/log(10))-((4/3)*log(sqrt(8))/log(10))+ ((2/3)*log(sqrt(343))/log(10)));
```

```
(%o1) 0.0
```

※ 「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

4. 設 $\log_2 3 = a$ ， $\log_3 5 = b$ ，試將下列對數用 a 、 b 的式子表示

$$(1) \log_{12} 75$$

$$(2) \log_{15} 150$$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

5. 在坐標平面上，設 P 為 $y = 2 + x - x^2$ 圖形上的一點，若 P 的 x 座標為 $\log_3 10$ ，則 P 的位置在第幾象限？

※本題不建議使用 Maxima 解題※

6. 試解不等式 $\log_3(3^x + 8) < \frac{x}{2} + 1 + \log_3 2$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

7. 試解方程式 $x^{\log x} = \frac{x^3}{100}$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

8. 設 $a = \log_{0.2} 0.3$, $b = \log_2 3$, $c = \log_{20} 30$, 試比較 a、b、c 的大小

(%i1)a:log(0.3)/log(0.2);

(%o1) 0.74807036358741

(%i2)b:log(3)/log(2);

(%o2) $\frac{\log(3)}{\log(2)}$

(%i3)c:log(30)/log(20);

(%o3) $\frac{\log(30)}{\log(20)}$

(%i4) compare(a,b) ;

rat: replaced 0.74807036358741 by 5912/7903 = 0.74807035303049

(%o4) <

(%i5) compare(a,c) ;

rat: replaced 0.74807036358741 by 5912/7903 = 0.74807035303049

(%o5) <

(%i6) compare(b,c) ;

(%o6) >

本題數值依大至小為： $b = \log_2 3 > c = \log_{20} 30 > a = \log_{0.2} 0.3$

※「compare (A 變數,B 變數)」指令表示比較 A 變數、B 變數兩數值大小關係。

9.談到網路謠言的散布速度，其與細菌的繁殖速度同樣驚人，若其散布速度的關係式如下： $N = P(1 - 10^{-0.1d})$ ，其中 P 表網友總數，N 為謠言流傳 d 天後，聽過這則謠言的人數，根據這式子，試問一則謠言開始流傳後多少天，就會超過 80% 的網友聽過這則謠言？

10.設大明巷銀行貸款 100 萬元，約定從次月開始每月償還銀行 1 萬元，依月利率 0.6% 複利計算，則大明需要幾年才能還清？(答案請以四捨五入計算成整數， $\log 2 = 0.3010$ ， $\log 1.006 = 0.0026$)

※本題不建議使用 Maxima 解題※

第二章 三角函數的基本概念

※本章節角度須轉換成弧度以 Maxima 解題※

2-1 銳角三角函數

P.78

例題 1：

(1) 設 $\triangle ABC$ 為直角三角形，其中 $\angle A=30^\circ$ 、 $\angle B=60^\circ$ 、 $\angle C=90^\circ$ ，試證： $\overline{BC}:\overline{AC}:\overline{AB}=1:1:\sqrt{2}$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

(2) 試求 30° 的六個三角函數值

(%i1) sin((30/180)*%pi);

(%o1) $\frac{1}{2}$

(%i2) cos((30/180)*%pi);

(%o2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(%i3) tan((30/180)*%pi);

(%o3) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(%i4) cot((30/180)*%pi);

(%o4) $\sqrt{3}$

(%i5) sec((30/180)*%pi);

(%o5) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

(%i6) csc((30/180)*%pi);

(%o6) 2

隨堂練習：承例題 1，試求 $\sin 60^\circ$ 、 $\cos 60^\circ$ 、 $\tan 60^\circ$ 、 $\cot 60^\circ$ 、 $\sec 60^\circ$ 、 $\csc 60^\circ$ 之值

(%i1) sin((60/180)*%pi);



$$(\%o1) \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(\%i2) \cos((60/180)*\%pi);$$

$$(\%o2) \frac{1}{2}$$

$$(\%i3) \tan((60/180)*\%pi);$$

$$(\%o3) \sqrt{3}$$

$$(\%i4) \cot((60/180)*\%pi);$$

$$(\%o4) \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$(\%i5) \sec((60/180)*\%pi);$$

$$(\%o5) 2$$

$$(\%i6) \csc((60/180)*\%pi);$$

$$(\%o6) \frac{2}{\sqrt{3}}$$

P.79

例題 2：設 $\triangle ABC$ 為等腰直角三角形，其中 $\angle A = \angle B = 45^\circ$ 、 $\angle C = 90^\circ$ ，

(1) 試證： $\overline{BC} : \overline{AC} : \overline{AB} = 1 : 1 : \sqrt{2}$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

(2) 試求 45° 的六個三角函數值

$$(\%i1) \sin((45/180)*\%pi);$$

$$(\%o1) \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$(\%i2) \cos((45/180)*\%pi);$$

$$(\%o2) \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$(\%i3) \tan((45/180)*\%pi);$$

(%o3) 1

(%i4) $\cot((45/180)*\pi)$;

(%o4) 1

(%i5) $\sec((45/180)*\pi)$;(%o5) $\sqrt{2}$ (%i6) $\csc((45/180)*\pi)$;(%o6) $\sqrt{2}$ **隨堂練習：**請在下列表格中填入正確的函數值

	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$	$\cot \theta$	$\sec \theta$	$\csc \theta$
30°						
45°						
60°						

 30° (%i1) $\sin((30/180)*\pi)$;(%o1) $\frac{1}{2}$ (%i2) $\cos((30/180)*\pi)$;(%o2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (%i3) $\tan((30/180)*\pi)$;(%o3) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (%i4) $\cot((30/180)*\pi)$;(%o4) $\sqrt{3}$ (%i5) $\sec((30/180)*\pi)$;(%o5) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

$$(\%i6) \csc((30/180)*\%pi);$$

$$(\%o6) 2$$

$$\underline{60^\circ}$$

$$(\%i7) \sin((60/180)*\%pi);$$

$$(\%o7) \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(\%i8) \cos((60/180)*\%pi);$$

$$(\%o8) \frac{1}{2}$$

$$(\%i9) \tan((60/180)*\%pi);$$

$$(\%o9) \sqrt{3}$$

$$(\%i10) \cot((60/180)*\%pi);$$

$$(\%o10) \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$(\%i11) \sec((60/180)*\%pi);$$

$$(\%o11) 2$$

$$(\%i12) \csc((60/180)*\%pi);$$

$$(\%o12) \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\underline{45^\circ}$$

$$(\%i13) \sin((45/180)*\%pi);$$

$$(\%o13) \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$(\%i14) \cos((45/180)*\%pi);$$

$$(\%o14) \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$(\%i15) \tan((45/180)*\%pi);$$

$$(\%o15) 1$$

$$(\%i16) \cot((45/180)*\%pi);$$

$$(\%o16) 1$$

$$(\%i17) \sec((45/180)*\%pi);$$

$$(\%o17) \sqrt{2}$$

$$(\%i18) \csc((45/180)*\%pi);$$

$$(\%o18) \sqrt{2}$$

P.82

例題 6：設圓 O 為圓心在座標圓點的單位圓(半徑為 1)且交兩軸正向於 A 、 F 兩點，交直線 L 於 C 點，如下圖：其中 $\overline{BC} \perp x$ 軸， \overline{AD} 、 \overline{EF} 均為圓 O 的切線，設 $\angle AOC = \theta$ ，在下邊每一線段，可以在(a)~(f)的選項中找到一個正確的三角函數之對應，請將正確的選項填入下列空格中：

$$(1) \quad \underline{\quad} \overline{BC} \qquad (a) \sin \theta$$

$$(2) \quad \underline{\quad} \overline{OB} \qquad (b) \cos \theta$$

$$(3) \quad \underline{\quad} \overline{AD} \qquad (c) \tan \theta$$

$$(4) \quad \underline{\quad} \overline{OE} \qquad (d) \cot \theta$$

$$(5) \quad \underline{\quad} \overline{EF} \qquad (e) \sec \theta$$

$$(6) \quad \underline{\quad} \overline{OD} \qquad (f) \csc \theta$$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.83

隨堂練習：承例題 6，若 $\angle EOF = a$ ，則在下列每一線段，都可以在右邊(a)~(c)的選項中找到一個正確的三角函數與之對應，請將正確選項填入下列空格中：

$$(1) \quad \underline{\quad} \overline{OB} \qquad (a) \sin \theta$$

(2) $\underline{\quad} \overline{BC}$ (b) $\cos \theta$

(3) $\underline{\quad} \overline{EF}$ (c) $\tan \theta$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.83

隨堂練習：

(1) 試估計 $\sin 45^\circ$ 、 $\cos 45^\circ$ 、 $\tan 45^\circ$ 的值

(%i1) $\sin((45/180)*\%pi);$

(%o1) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

(%i2) $\cos((45/180)*\%pi);$

(%o2) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

(%i3) $\tan((45/180)*\%pi);$

(%o3) 1

(2) 試估計 $\sin 37^\circ$ 、 $\cos 37^\circ$ 、 $\tan 37^\circ$ 的值

(%i4) $\text{float}(\sin((37/180)*\%pi));$

(%o4) 0.60181502315205

(%i5) $\text{float}(\cos((37/180)*\%pi));$

(%o5) 0.79863551004729

(%i6) $\text{float}(\tan((37/180)*\%pi));$

(%o6) 0.75355405010279

※「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

P.85 **習題 2-1**

1. 觀念題：對的在題號前打○，錯的在題號前打×

___ (1) 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\overline{AB}=5$ 、 $\overline{AC}=3$ 、 $\overline{BC}=4$ ，則 $\sin A = \frac{4}{5}$ 。

___ (2) 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\overline{AB}=7$ 、 $\overline{AC}=6$ 、 $\overline{BC}=5$ ，則 $\cos A = \frac{6}{7}$ 。

___ (3) 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\angle C=90^\circ$ 且 $\overline{AB}=c$ ，則 $\overline{BC}=c \sin A$

___ (4) 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\angle C=90^\circ$ 且 $\overline{AB}=c$ ，則 $\overline{BC}=c \cos A$

___ (5) 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\angle C=90^\circ$ 且 $\overline{AC}=b$ ，則 $\overline{BC}=c \cos A$

___ (6) 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\angle C=90^\circ$ 且 $\overline{AC}=b$ ，則 $\overline{BC}=c \tan A$

___ (7) $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$

___ (8) $\log_2(\sin 45^\circ + \cos 45^\circ) = \frac{1}{2}$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

2. 下列各選項中，何者為直角三角形的三邊長？

(1) 3、4、5

方法一：

(%i1) compare(3^2+4^2,5^2);

(%o1)=

方法二：

(%i2) if 3^2+4^2=5^2 then answer=yes else answer=no;

(%o2) answer=yes

(2) 5、12、13

方法一：

(%i1) compare(5^2+12^2 , 13^2);

(%o1)=

方法二：

(%i2) if $5^2+12^2=13^2$ then answer=yes else answer=no;

(%o2) answer= yes

(3) 7、24、25

方法一：

(%i1) compare(7^2+24^2 , 25^2);

(%o1) =

方法二：

(%i2) if $7^2+24^2=25^2$ then answer=yes else answer=no;

(%o2) answer= yes

(4) 8、15、17

方法一：

(%i1) compare(8^2+15^2 , 17^2);

(%o1) =

方法二：

(%i2) if $8^2+15^2=17^2$ then answer=yes else answer=no;

(%o2) answer= yes

(5)20、21、29

方法一：

(%i1) compare($20^2+21^2,29^2$);

(%o1) =

方法二：

(%i2) if $20^2+21^2=29^2$ then answer=yes else answer=no;

(%o2) answer= yes

* 上述各小題皆為直角三角形

* if $3^2+4^2=5^2$ then answer=yes else answer=no; 表示若 $3^2+4^2=5^2$ 此式成立，則出現 answer=yes；若 $3^2+4^2=5^2$ 此式不成立，則出現 answer=no。

※ 「compare (A 變數,B 變數)」指令表示比較 A 變數、B 變數兩數值大小關係。

3. 設 $\triangle ABC$ 為直角三角形，若 $\overline{AC}=15$ 、 $\overline{BC}=8$ ，試求 $\angle B$ 的六個三角函數值(AB 為斜邊)

(%i1) $AB=(15^2+8^2)^{(1/2)}$;

(%o1) $AB=17$

(%i2) $AB:17; BC:8; AC:15$;

(%o2) 17

(%o3) 8

(%o4) 15

(%i5) $\sin B = AC/AB$;

(%o5) $\sin B = \frac{15}{17}$

(%i6) $\cos B = BC/AB$;

(%o6) $\cos B = \frac{8}{17}$

(%i7) $\tan B = AC/BC$;

(%o7) $\tan B = \frac{15}{8}$

(%i8) $\cot B = BC/AC$;

(%o8) $\cot B = \frac{8}{15}$

(%i9) $\sec B = AB/BC$;

(%o9) $\sec B = \frac{17}{8}$

(%i10) $\csc B = AB/BC$;

(%o10) $\csc B = \frac{8}{17}$

4. 設 θ 為一銳角，且 $\cot \theta = 2$ ，試求其餘五個三角函數值

(%i1) $z = (1^2 + 2^2)^{1/2}$;

(%o1) $z = \sqrt{5}$

(%i2) $x:1; y:2; z:\sqrt{5}$;

(%o2) 1

(%o3) 2

(%o4) $\sqrt{5}$

(%i5) $\sin = x/z$;

(%o5) $\sin = \frac{1}{\sqrt{5}}$

(%i6) $\cos = y/z$;

$$(\%06) \cos = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$(\%i7) \tan = x/y;$$

$$(\%07) \tan = \frac{1}{2}$$

$$(\%i8) \sec = z/y;$$

$$(\%08) \sec = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$(\%9) \csc = z/x;$$

$$(\%09) \csc = \sqrt{5}$$

* 求出 z 為斜邊，並定義 x 為對邊、y 為鄰邊、z 為斜邊

5. 試求下列各式之值：

$$(1) \tan 30^\circ \tan 60^\circ - \tan 45^\circ \cos 60^\circ$$

$$(\%i1) \tan((30/180)*\%pi)*\tan((60/180)*\%pi) - \tan((45/180)*\%pi)*\cos((60/180)*\%pi);$$

$$(\%o1) \frac{1}{2}$$

$$(2) \sin 30^\circ \sec 60^\circ + \cot 60^\circ \csc 60^\circ$$

$$(\%i2) \sin((30/180)*\%pi)*\sec((60/180)*\%pi) + \cot((60/180)*\%pi)*\csc((60/180)*\%pi);$$

$$(\%o2) \frac{5}{3}$$

P.86

6. 已知 $\triangle ABC$ 中 $\angle C = 90^\circ$ 且 $\overline{BC} = 10$

(1) 若 $\sin A = \frac{4}{5}$ ，求 \overline{AB} 與 \overline{AC} 之長

$$(\%i1) AB = (10 / (4/5));$$

$$(\%o1) AB = \frac{25}{2}$$

$$(\%i2) AC = \sqrt{(25/2)^2 - 10^2};$$



$$(\%o2) AC = \frac{15}{2}$$

(2) 若 $\cos B = \frac{5}{13}$ ，求 \overline{AB} 與 \overline{AC} 之長

$$(\%i3) AB = (10/(5/13));$$

$$(\%o3) AB = 26$$

$$(\%i4) AC = \sqrt{26^2 - 10^2};$$

$$(\%o4) AC = 24$$

7. 設 θ 為一銳角，且 $\sin \theta = \frac{7}{25}$ ，試求 $\frac{\sec \theta}{1 - 2 \tan \theta} + \frac{\tan \theta}{1 + \sec \theta}$ 之值

$$(\%i1) x:7; y:\sqrt{25^2-7^2}; z:25;$$

$$(\%o1) 7$$

$$(\%o2) 24$$

$$(\%o3) 25$$

$$(\%i4) ((z/y)/(1-2*(x/y)))+(x/y)/(1+(z/y));$$

$$(\%o4) \frac{37}{14}$$

8. 設 $\triangle ABC$ 為等腰三角形：

(1) 若 $\overline{AB} = 13$ 、 $\overline{BC} = 24$ ，試求 $\angle B$ 的六個三角函數值

$$(\%i1) AB:13; AC:13; BC:24;$$

$$(\%o1) 13$$

$$(\%o2) 13$$

$$(\%o3) 24$$

$$(\%i4) \sin = AC/BC;$$

$$(\%o4) \sin = \frac{13}{24}$$

$$(\%i5) \cos = AB/BC;$$

$$(\%o5) \cos = \frac{13}{24}$$

$$(\%i6) \tan = AC/AB;$$

$$(\%o6) \tan = 1$$

$$(\%i7) \cot = AB/AC;$$

$$(\%o7) \cot = 1$$

$$(\%i8) \sec = BC/AB;$$

$$(\%o8) \sec = \frac{13}{24}$$

$$(\%i9) \csc = BC/AC;$$

$$(\%o9) \csc = \frac{13}{24}$$

(2) 若 $\overline{AB} = 10$ 、 $\cos B = \frac{4}{5}$ ，求 $\triangle ABC$ 面積

$$(\%i10) BM = 10 * (4/5);$$

$$(\%o10) BM = 8$$

$$(\%i11) AM = \sqrt{10^2 - 8^2};$$

$$(\%o11) AM = 6$$

$$(\%i11) \text{AREA} = (8 * 2) * 6 / 2;$$

$$(\%o11) \text{AREA} = 48$$

9. 設 $\triangle ABC$ 為等腰三角形，若底邊 $\overline{BC} = 10$ ，頂角 $\angle A = 72^\circ$ ，則下列何者可以表示腰長 \overline{AB}

$$(1) 5 \cdot \sin 36^\circ$$

$$(2) 5 \cdot \tan 36^\circ$$

$$(3) 5 \cdot \cot 36^\circ$$

$$(4) 5 \cdot \sec 36^\circ$$

$$(5) 5 \cdot \csc 36^\circ$$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

10. 設四邊形 ABCD 為正方形， $\overline{BE} = \frac{1}{3}\overline{AB}$ ，求 $\sin \theta$ 之值

※本題不建議使用 Maxima 解題※

2-2 三角函數的基本關係

※本章節角度須轉換成弧度以 Maxima 解題※**P. 87**

隨堂練習：

(1) 試證： $\tan \theta \cot \theta = 1$

(2) 試求 $\sin 40^\circ \cos 40^\circ \tan 40^\circ \cot 40^\circ \sec 40^\circ \csc 40^\circ$ 之值

※本題不建議使用 Maxima 解題※**P. 88**

隨堂練習：

(1) 試證： $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$

(2) 設 θ 為銳角，且試求 $\cos \theta = 4 \sin \theta$ ，試求 $\tan \theta$ 之值

※本題不建議使用 Maxima 解題※**P. 89**隨堂練習：試證： $1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$ **※本題不建議使用 Maxima 解題※****例題 1：**試求下列各式之值：

(1) $\sin^2 40^\circ + \cos^2 40^\circ$

`(%i1) float((sin(40/180*%pi))^2+(cos(40/180*%pi))^2);`

`(%o1) 1.0`

(2) $\tan^2 20^\circ - \sec^2 20^\circ$

`(%i2) float((tan(20/180*%pi))^2-(sec(20/180*%pi))^2);`

(%o2) -1.0

(3) $(\sin 40^\circ + \cos 40^\circ)^2 + (\sin 40^\circ - \cos 40^\circ)^2$

(%i3) float((sin(40/180*%pi)+cos(40/180*%pi))^2-((sin(40/180*%pi)-cos(40/180*%pi))^2);

(%o3) 1.9999999999999999

※ 「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

隨堂練習：

(1) 試求 $\cot^2 20^\circ - \csc^2 20^\circ$ 與 $(\tan 20^\circ + \cot 20^\circ)^2 - \sec^2 20^\circ - \csc^2 20^\circ$ 之值

(%i1) float((cot(20/180*%pi))^2-(csc(20/180*%pi))^2);

(%o1) -1.0000000000000001

(%i2) float((tan(20/180*%pi)+cot(20/180*%pi))^2-(sec(20/180*%pi))^2-(csc(20/180*%pi))^2);

(%o2) 0.0

(2) 設 θ 為一銳角，試求 $(\sin \theta + \csc \theta)^2 - (\tan \theta + \cot \theta)^2 + (\cos \theta + \sec \theta)^2$

※ 「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

P. 90

例題 2：設 θ 為一銳角，若 $\cos \theta = \frac{12}{13}$

(1) 利用平方關係與倒數關係求 $\sin \theta$ 與 $\sec \theta$

(2) 利用(1)的結果與三角函數的基本關係求 $\tan \theta$ 、 $\cot \theta$ 、 $\csc \theta$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

隨堂練習：設 θ 為一銳角，已知 $\sin \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ，試利用三角函數的基本關係求其餘的五個三角函數值

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P. 91

例題 3：設 θ 為一銳角，若 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{7}{5}$ ，試求 $\sin \theta$ 與 $\cos \theta$ 之值

※本題不建議使用 Maxima 解題※

隨堂練習：設 θ 為一銳角，若 $\sin \theta - \cos \theta = \frac{7}{13}$ ，試求 $\sin \theta$ 與 $\cos \theta$ 之值

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P. 92

例題 4：試求下列各式之值

(1) $\sin^2 40^\circ + \sin^2 50^\circ$

```
(%i1) float((sin(40/180*%pi))^2+(sin(50/180*%pi))^2);
```

```
(%o1) 1.0
```

(2) $\tan^2 20^\circ - \csc^2 70^\circ$

```
(%i2) float((tan(20/180*%pi))^2-(csc(70/180*%pi))^2);
```

```
(%o2) -1.0
```

※「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

隨堂練習：試求下列各式之值

(1) $\cos^2 80^\circ + \cos^2 10^\circ$

(%i1) float((cos(80/180*%pi))^2+(cos(10/180*%pi))^2);

(%o1) 1.0

(2) $\cot^2 53^\circ - \sec^2 37^\circ$

(%i2) float((cot(53/180*%pi))^2-(sec(37/180*%pi))^2);

(%o2) -1.0

(3) $(\sin 40^\circ + \sin 50^\circ)^2 + (\cos 50^\circ - \cos 40^\circ)^2$

(%i3) float((sin(40/180*%pi)+sin(50/180*%pi))^2+(cos(50/180*%pi)-cos(40/180*%pi))^2);

(%o3) 1.9999999999999999

※ 「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

P. 93

例題 5：設 θ 為一銳角，

(1) 試證： $\tan \theta + \cot \theta = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta}$

(2) 若 $\tan \theta + \cot \theta = \frac{25}{12}$ ，試求下列各式之值：

(a) $\sin \theta \cos \theta$

(b) $\sin \theta + \cos \theta$

(c) $\sin \theta - \cos \theta$

(d) $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P. 94

隨堂練習：設 θ 為一銳角，若 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{3}{\sqrt{5}}$ ，試求下列各式之值：

(1) $\sin \theta \cos \theta$

(2) $\tan \theta + \cot \theta$

(3) $\sin \theta - \cos \theta$

(4) $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

例題 6：設 θ 為一銳角，試證：

(1) $\frac{1+\sin \theta}{1+\cos \theta} \times \frac{1+\sec \theta}{1+\csc \theta} = \tan \theta$

(2) $\sin \theta \cos \theta = \frac{\sec \theta \csc \theta}{\tan \theta \cot \theta}$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

隨堂練習：設 θ 為一銳角，試證：

(1) $\sin \theta \cos \theta = \frac{\cos \theta}{1-\tan \theta} + \frac{\sin \theta}{1-\cot \theta}$ ，其中 $\theta \neq 45^\circ$

(2) $(\tan \theta + \cot \theta)(\sec \theta - \cos \theta) = \sec \theta \tan \theta$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.95 **習題 2-2**

1. 觀念題：對的在題號前打○，錯的在題號前打×

___ (1) $\sin^2 30^\circ + \cos^2 60^\circ = 1$

___ (2) 設 θ 為一銳角，則 $\sin^2 \theta + \sin \theta = 1$ 。

___ (3) 設 θ 為一銳角，則 $\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$ 。

___ (4) 設 θ 為一銳角，則 $\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$ 。

___ (5) 設 θ 為一銳角，則 $\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$ 。

___ (6) 設 θ 為一銳角，則 $\tan(90^\circ - \theta) = \cot \theta$ 。

___ (7) 設 θ 為一銳角，則 $\csc(90^\circ - \theta) = \sec \theta$ 。

※本題不建議使用 Maxima 解題※

2. 設 θ 為一銳角，已知 $\tan \theta = \frac{1}{3}$ ，試利用三角函數的基本關係求其餘的五個三角函數值

※本題不建議使用 Maxima 解題※

3. 求下列各式的值：

(1) $2\sin^2 45^\circ + 4\cos^2 45^\circ - 3\csc 30^\circ$

```
(%i1) float(2*(sin(45/180*%pi))^2+(4*cos(45/180*%pi))^2-(3*csc(30/180*%pi)));
```

```
(%o1) 3.0
```

(2) $\frac{1 + \cot^2 30^\circ}{1 - \tan^2 30^\circ}$

```
(%i2) float((1+(cot(30/180*%pi))^2)/(1-(tan(30/180*%pi))^2));
```

```
(%o2) 6.0
```

※「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。



4. 求下列各式的值：

$$(1) \sin 30^\circ \cos 30^\circ \tan 30^\circ \cot 30^\circ \sec 30^\circ \csc 30^\circ$$

```
(%i1)float(sin(30/180*%pi)*cos(30/180*%pi)*tan(30/180*%pi)*cot(30/180*%pi)*sec(30/180*%pi)*csc(30/180*%pi);
```

```
(%o1) 1.0
```

$$(2) \sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \sin^2 30^\circ + \sin^2 40^\circ + \sin^2 50^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 70^\circ + \sin^2 80^\circ$$

```
(%i1)float((sin(10/180*%pi))^2+(sin(20/180*%pi))^2+(sin(30/180*%pi))^2+(sin(40/180*%pi))^2+(sin(50/180*%pi))^2+(sin(60/180*%pi))^2+(sin(70/180*%pi))^2+(sin(80/180*%pi))^2);
```

```
(%o1)4.0
```

$$(3) \tan^4 79^\circ + \csc^2 11^\circ + \csc^4 11^\circ$$

```
(%i1)float((tan(79/180*%pi))^4+(csc(11/180*%pi))^2-(csc(11/180*%pi))^4);
```

```
(%o1) 0.99999999999852
```

※ 「float(數值)」 指令表示將數值轉換為小數。

5. 若 θ 為銳角且 $\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{5}$ ，試求 $\cos \theta$ 之值

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.96

6. 若 θ 為銳角，求下列各式的值：

$$(1) \frac{1}{1 + \sin \theta} + \frac{1}{1 + \csc \theta}$$

$$(2) \sin^2 \theta (1 + \cot^2 \theta) + \cos^2 \theta (1 + \tan^2 \theta)$$



$$(3) \sin^4 \theta + 2\sin^2 \theta \cos^2 \theta + \cos^4 \theta$$

$$(4) \left(\sec \theta + \frac{1}{\cot \theta} \right) + \left(\sec \theta - \frac{1}{\cot \theta} \right)$$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

7. 設 θ 為銳角，試證下列三角恆等式：

$$(1) \tan \theta + \cot \theta = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = \sec \theta \csc \theta$$

$$(2) \cos^4 \theta - \sin^4 \theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 1 - 2\sin^2 \theta = 2\cos^2 \theta - 1$$

$$(3) \frac{\tan \theta - 1}{\tan \theta + 1} + \frac{1 - \cot \theta}{1 + \cot \theta}$$

$$(4) \frac{1 - \tan^4 \theta}{\sec^2 \theta} + 2\tan^2 \theta = \sec^2 \theta$$

$$(5) \tan^2 \theta - \sin^2 \theta = \tan^2 \theta \sin^2 \theta$$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

2-3 簡易測量與三角函數值表

P. 98

例題 1：某天，大明與小明利用假日到高雄 85 大樓附近逛街，由於最近學過三角測量，因此想測量 85 大樓之高度，他們在地面上的 A 點位置量測樓頂 C 的仰角為 30° ，接著面向大樓的方向前進 280 公尺後到達 D 點，再測得樓頂 C 的仰角為 45° ，試問他們測得 85 大樓的高度為多少公尺？

(%i1) $\tan(30/180*\%pi)$;

(%o1) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(%i2) $\text{solve}([\sqrt{3}*x=(280+x)],[x])$;

(%o2) $\left[x = \frac{280}{\sqrt{3}-x} \right]$

* 設 B 為 85 大樓，D 至 B 距離為 x；故 A 至 B 距離為 280+x

※ 「 $\text{solve}([\text{變數算式}], [\text{變數}])$ 」指令表示求解。

隨堂練習：阿明在 P 大樓正東方的地面 A 處，測得 P 棟大樓頂 C 的仰角為 30° ，又在此大樓正西方的地面 B 處，測得此頂樓 C 的仰角為 60° ，已知 A、B 兩地相距 500 公尺，求此大樓高度

(%i1) AB:500;

(%o1) 500

(%i2) CB:AB*cos(60/180*%pi);

(%o2) 250

(%i3) P=CB*sin(60/180*%pi);

(%o3) $P=125\sqrt{3}$

* 設 P 為大樓高度， $\triangle ABC$ 為 30° 、 60° 、 90° 直角三角形(邊長比為 $1 : \sqrt{3} : 2$)。

例題 2：小明家附近有相距 150 公尺的 P、Q 兩棟大樓，某天他在 P 棟大樓的樓底測得 Q 棟大樓的仰角為 60° ，又到 P 棟大樓之樓頂，測得 Q 棟大樓的仰角為 30° ，試求：

(1) Q 棟大樓的高度

$$(\%i1) Q=150*\tan(60/180*\%pi);$$

$$(\%o1) Q=50\sqrt{3}$$

(2) P 棟大樓的高度

$$(\%i2) P=\text{radcan}(150*((3)^{(1/2))}-(150*\tan(30/180*\%pi)));$$

$$(\%o2) P=100\sqrt{3}$$

※「**radcan**([算式] × [算式])」指令表示化簡算式。

P. 99

隨堂練習：大明家住在 E 棟大樓的某一層樓，他從家裡床門口測得對面 F 棟大樓樓頂的仰角為 30° ，又測得樓底的俯角為 45° ，已知這兩棟大樓相距 30 公尺，求 F 棟大樓高度。

$$(\%i1) F=30+(30*\tan(30/180*\%pi));$$

$$(\%o1) F=10\sqrt{3}+30$$

例題 2：大明與小明想要測量總統府的高度，由於憲兵不讓兩人接近，因此他們站在凱達格蘭大道上觀測，此時總統府的方位在大明北 55° 東，且大明測得其仰角為 45° ；又總統府的方位在小華的北 35° 西，且小明測得其仰角為 30° ，又相距 120 公尺，設總統府的高度為 x 公尺，試求：

(1) 以 x 表示大明與總統府的距離


```
(%i1) A=x*tan((45/180)*%pi);
```

```
(%o1) A=x
```

(2)以 x 表示小明與總統府的距離

```
(%i2) B=x*cot((30/180)*%pi);
```

```
(%o2) B= $\sqrt{3}x$ 
```

(3)求總統府的高度

```
(%i3) solve([(sqrt(3)*x)^2+x^2=120^2],[x]);
```

```
(%o3) [x=-60,x=60]
```

※ 「`solve([變數算式],[變數])`」指令表示求解。

P. 100

隨堂練習：小明在一座山的正南方，測得山頂的仰角為 30° ；大明在同座山的正東方，測得山頂的仰角為 60° ，已知小明與大明相距 2000 公尺，試求山的高度

```
(%i1) solve([(cot((60/180)*%pi)*x)^2+(cot((30/180)*%pi)*x)^2=2000^2],[x]);
```

```
(%o1) [x=-200 $\sqrt{3}$ ,x=200 $\sqrt{3}$ ]
```

※ 設 x 為山之高度，並利用畢式定理，求出 x 。

※ 「`solve([變數算式],[變數])`」指令表示求解。

P. 102

例題 4：請利用附錄三角函數值表，求出下列各三角函數值：

(1) $\sin 24^\circ 20'$

```
(%i1) float(sin((24/180+20/(60*180))*%pi));
```

(%o1) 0.41204452186687

(2) $\tan 65^{\circ} 50'$

(%i2) float(tan((65/180+50/(60*180))*%pi));

(%o2) 2.228567593920636

※ 「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

P. 103

隨堂練習：請利用附錄三角函數值表，求出下列各三角函數值：

(1) $\cos 43^{\circ} 10'$

(%i1) float(cos((43/180+10/(60*180))*%pi));

(%o1) 0.72936675739699

(2) $\sec 18^{\circ} 50'$

(%i2) float(sec((18/180+50/(60*180))*%pi));

(%o2) 1.056566886500089

(3) $\csc 58^{\circ} 30'$

(%i3) float(csc((58/180+30/(60*180))*%pi));

(%o3) 1.172827696614009

(4) $\cot 78^{\circ} 40'$

(%i4) float(cot((78/180+40/(60*180))*%pi));

(%o4) 0.20042479364716

※ 「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

例題 5：請利用附錄三角函數值表，求出下列銳角 θ 的值：

(1) $\sin \theta = 0.3311$

(2) $\tan \theta = 2.8770$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P. 104

隨堂練習：請利用附錄三角函數值表，求出下列銳角 θ 的值：

(1) $\cos \theta = 0.6088$

(2) $\sec \theta = 1.1110$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

例題 6：請利用附錄三角函數值表及內插法，求 $\sin 35^\circ 43'$

```
(%i1) float(sin((35/180+43/(60*180))*%pi));
```

```
(%o1) 0.58377741218676
```

※「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

P. 105

隨堂練習：請利用附錄三角函數值表及內插法，求 $\cos \theta = 0.7817$ 的銳角 θ 的近似值

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P. 106

例題 7：試比較下列各三角函數值的大小

(1) $\sin 56^\circ$ 、 $\sin 48^\circ$

```
(%i1) compare(sin(56/180*%pi),sin(48/180)*%pi);
```

(%o1) >

(2) $\cot 26^\circ$ 、 $\cot 32^\circ$

(%i2) compare(cot (26/180*%pi), cot (36/180)*%pi);

(%o2) <

(3) $\sin 46^\circ$ 、 $\cos 48^\circ$

(%i3) compare(sin(46/180*%pi), cos(48/180)*%pi);

(%o3) <

(4) $\sin 56^\circ$ 、 $\sec 48^\circ$

(%i4) compare(sin(56/180*%pi), sec(48/180)*%pi);

(%o4) <

※ 「compare (A 變數,B 變數)」指令表示比較 A 變數、B 變數兩數值大小關係。

隨堂練習：試比較下列各三角函數值的大小

(1) $\cos 38^\circ$ 、 $\cos 42^\circ$

(%i1) compare(cos(38/180*%pi), cos(42/180)*%pi);

(%o1) <

(2) $\sec 66^\circ$ 、 $\sec 62^\circ$

(%i2) compare(sec(66/180*%pi), sec(62/180)*%pi);

(%o2) <

(3) $\tan 8^\circ$ 、 $\cot 86^\circ$

```
(%i3) compare(tan(8/180*%pi), cot(86/180)*%pi);
```

```
(%o3) <
```

(4) $\csc 56^\circ$ 、 $\cos 48^\circ$

```
(%i4) compare(csc(56/180*%pi), cos(48/180)*%pi);
```

```
(%o4) <
```

※ 「compare (A 變數,B 變數)」指令表示比較 A 變數、B 變數兩數值大小關係。

例題 8: 大明於板橋火車站候車時，走到樓上參觀，並利用自備的三角簡易測量工具，測得對面 300 公尺處的台北縣政府樓頂之直升機之停機坪的仰角為 18° ，以及一樓樓底的俯角為 8° ，根據大明測得的資料，求直升機停機坪離地面的高度

```
(%i1) float(x=300*tan(18/180*%pi)+300*tan(8/180*%pi));
```

```
(%o1) x=139.6381592805893
```

* 台北縣政府頂樓與停機坪高度為 $300 \times \tan 18^\circ$ 、停機坪與地面高度為 $300 \times \tan 8^\circ$ ；

停機坪距地面高度為 $300 \times \tan 18^\circ + 300 \times \tan 8^\circ$

※ 「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

P. 107

隨堂練習：有一座天橋長 16 公尺，自天橋的 A、B 兩端測的在下方的一部汽車車頂的俯角分別為 25° 與 20° ，設車子高度為 1.53 公尺，試求天橋的高度。(四捨五入後求到小數第二位)

```
(%i1) float(solve([x*tan(25/180*%pi)=(16-x)*tan(20/180*%pi)],[x]));
```

```
(%o1) [x=7.013945332540491]
```

```
(%i2) float(7.013*tan(25/180*%pi));
```

```
(%o2) 3.270215606641005
```

```
(%i3) (%o2)+1.53;
```

```
(%o3) 4.800215606641005
```

*設天橋垂直汽車車頂為點 D，D 點距 A 為 x 公尺、D 點距 B 點為(16-x)公尺，求得天橋垂直汽車車頂高度後，再加上汽車高度，即可求得天橋距地面高度。

※「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

※「solve([變數算式],[變數])」指令表示求解。

例題 9：台北縣消防局有梯臂最多可伸長 72 公尺之最高雲梯消防車，其底離地 1.5 公尺，當梯臂完全展開且與地面的夾角為 75° 時：

(1)求梯頂離地面的高度(四捨五入後求到整數位)

```
(%i1) float(72*sin(75/180*%pi));
```

```
(%o1) 69.54665949281292
```

```
(%i2) (%o1)+1.5;
```

```
(%o2) 71.04665949281292
```

(2)若一大樓的層樓高 3 公尺，此時梯臂最高可至第幾層樓

```
(%i3) (%o2)/3;
```

```
(%o3) 23.68221983093764
```

※「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

P. 108

隨堂練習：若飛機起飛時爬升仰角為 12° ，為了飛航安全考量，則離機場 2500 公尺以內的建築物高不可以超過多少公尺(小數點以下捨去不計)

```
(%i1) float(2500*tan(12/180*%pi));
```

```
(%o1) 531.3914041750553
```

※ 「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

P.109 **習題 2-3**

1. 觀念題：對的在題號前打○，錯的在題號前打×

___ (1) 若 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ，則 $0 < \sin \theta < 1$ 且 $0 < \cos \theta < 1$ 恆成立。

___ (2) 若 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ，則 $\tan \theta$ 與 $\cot \theta$ 均為任意實數。

___ (3) 若 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ，則 $\sec \theta > 1$ 、 $\csc \theta > 1$ 恆成立。

___ (4) 若 $0^\circ < \theta < 45^\circ$ ，則 $\sin \theta < \cos \theta$ 恆成立。

___ (5) 若 $0^\circ < \theta < 45^\circ$ ，則 $\tan \theta > \cot \theta$ 恆成立。

___ (6) 若 $45^\circ < \theta < 90^\circ$ ，則 $\sec \theta > \csc \theta$ 恆成立。

※本題不建議使用 Maxima 解題※

2. 請利用附錄三角函數值表，求出下列各三角函數值：

(1) $\cos 41^\circ 20'$

```
(%i1) float(cos((41/180+20/(60*180))*%pi));
```

```
(%o1) 0.7508800329815
```

(2) $\csc 76^\circ 40'$

```
(%i2) float(csc((76/180+40/(60*180))*%pi));
```

```
(%o2) 1.027701835994587
```

(3) $\tan 34^\circ 24'$

```
(%i1) float(tan((34/180+24/(60*180))*%pi));
```

```
(%o1) 0.68471429034165
```

※「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

3. 請利用附錄三角函數值表，求出下列銳角 θ 的值：

(1) $\sin \theta = 0.5050$

(2) $\cot \theta = 0.5505$

(3) $\csc \theta = 1.9851$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

4. A 和 B 兩艘船同時離開港口，A 船以每小時 30 公里的速率向北 40° 東的方向行駛，B 船以每小時 40 公里的速率向南 50° 東的方向行駛，試問 2 小時後，A 船與 B 船相距多少公里？

```
(%i1) sqrt((30*2)^2+(40*2)^2);
```

```
(%o1) 100
```

5. 小明學校的操場有一司令台，司令台屋頂上有一根旗杆，已知司令台的屋頂高度是 5 公尺，今小明在操場 A 處，測得旗杆頂 E 的仰角為 30° ，朝司令台方向前進 20 公尺至 B 處後，再測得旗杆頂點 E 仰角為 60° ，試求旗杆的高度

方法一：

```
(%i1) solve([(20+x)*tan((30/180)*%pi) = (x)*tan((60/180)*%pi)], [x]);
```

```
(%o1) [x=10]
```

```
(%i1) (20+10)*tan((30/180)*%pi)-5;
```

```
(%o1) 10*sqrt(3)-5
```

※ 設 x 為司令台至 B 處距離，將 x 帶入等號左右其一，則可知司令台+旗杆 E 高度，最後減掉司令台高度，即可得旗杆高度。

方法二：

```
(%i1) solve([tan((30/180)*%pi)=(x/((x/sqrt(3))+20))],[x]);
```

```
(%o1) [x=10*sqrt(3)]
```

```
(%i2) 10*sqrt(3)-5;
```

```
(%o2) 10*sqrt(3)-5
```

※ 設 x 為司令台+旗杆 E 高度，最後減掉司令台高度，即可得旗杆高度。

※ 「**solve**([變數算式], [變數])」指令表示求解。

6. A 、 B 兩港口在河的南北兩岸遙遙相對，距 B 港口 500 公尺的右方有一瞭望台 C ，若小明測得 $\angle ACB = 56^\circ 20'$ ，求河寬(小數點以下四捨五入)

```
(%i1) float(500*tan((56/180+20/(60*180))*%pi));
```

```
(%o1) 750.6640927016382
```

※ 「**float**(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

7. 某人隔河預測一山高，在 A 點觀測山時，山的方位為東偏北 60° ，山頂的仰角為 45° ；某人自 A 點向東行 600 公尺到達 B 點後，山的方位變成西偏北 60° ，試求山的高度為多少公尺。

```
(%i1) x=600*tan(45/180*%pi);
```

```
(%o1) x=600
```

* 設山高為 x ； AB 山三點為正三角形各邊長皆為 600，又由 A 點觀測山頂為 45°

8. 小明在山的正西方平地上 A 處，測得山頂仰角為 45° ，他南行 4 公里到達 B 處後，又側得山頂的仰角為 30° ，設山高 x 公尺，試求：

(1) 以 x 表示 \overline{AC} 長

```
(%i1) AC=x*cot((45/180)*%pi);
```

(%o1) $AC=x$

(2) 以 x 表示 \overline{BC} 長

(%i2) $BC=x*\cot((30/180)*\%pi);$

(%o2) $BC=\sqrt{3}x$

(3) 山的高度

(%i3) $\text{solve}([x^2+(\sqrt{3}*x)^2=4000^2],[x]);$

(%o3) $[x=-2000,x=2000]$

※ 「 $\text{solve}([\text{變數算式 }], [\text{變數 }])$ 」指令表示求解。

9. 某機場基於飛航安全考量，限制機場附近建築物，從機場中心地面到建築物頂樓的仰角不超過 8° ，某建築公司打算在離機場中心 3 公里且地表高度和機場中心一樣高的地方，蓋一棟平均每樓層高 5 公尺的大樓，在符合機場的限制規定之下，該大樓在地面以上最多可以蓋幾層樓？($\sin 8^\circ=0.1392$ 、 $\cos 8^\circ=0.9903$ 、 $\tan 8^\circ=0.1405$)

(%i1) $\text{float}(3000*\tan(8/180*\%pi));$

(%o1) 421.6225041071743

(%i2) $(\%o1)/5;$

(%o2) 84.32450082143487

* 地面上最多可蓋每層 5 公尺共 84 層樓

※ 「 $\text{float}(\text{數值})$ 」指令表示將數值轉換為小數。

2-4 簡易測量與三角函數值表

※本章節角度須轉換成弧度以 Maxima 解題※

P. 113

隨堂練習：若廣義角 θ 為第一象限角，則 θ 角的範圍可表示為

$n \times 360^\circ < \theta < 90^\circ + n \times 360^\circ, n \in Z$ ，當廣義角為第二、三、四象限角時， θ 角的範圍應如何表示？

※本題不建議使用 Maxima 解題※

例題 1：設 $\theta = 70^\circ$ ，試回答下列問題：

(1) 下列哪些角度與 θ 為同界角？ $(-70^\circ、430^\circ、-430^\circ、1150^\circ、-1010^\circ)$

```
(%i1) for n:-4 thru 4 do (print(m:70+n*360));
```

-1370

-1010

-650

-290

70

430

790

1150

1510

```
(%o1) done
```

(2) 若 ϕ 與 θ 為同界角，且 $1200^\circ \leq \phi \leq 1600^\circ$ ，則 ϕ 之值為何？

```
(%i2) float(1200/360);
```

```
(%o2) 3.3333333333333334
```



(%i3) float(1600/360);

(%o3) 4.4444444444444445

(%i4) 70+4*360;

(%o4) 1510

※ 「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

P. 114

隨堂練習：設 $\theta = 914^\circ$ ，且 ϕ 與 θ 為同界角，試回答下列問題：

(1) 若 $0^\circ \leq \phi \leq 360^\circ$ ，則 ϕ 之值為何？

(%i1) float(914/360);

(%o1) 2.538888888888889

(%i2) 914-360*2;

(%o2) 194

(2) 若 $-360^\circ \leq \phi \leq 0^\circ$ ，則 ϕ 之值為何？

(%i3) float((914+360)/360);

(%o3) 3.538888888888889

(%i4) 914-360*3;

(%o4) -166

※ 「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

P. 116

例題 2：試求：

(1) 120° 的六個三角函數值

$$(\%i1) \sin((120/180)*\%pi);$$

$$(\%o1) \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(\%i2) \cos((120/180)*\%pi);$$

$$(\%o2) -\frac{1}{2}$$

$$(\%i3) \tan((120/180)*\%pi);$$

$$(\%o3) -\sqrt{3}$$

$$(\%i4) \cot((120/180)*\%pi);$$

$$(\%o4) -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$(\%i5) \sec((120/180)*\%pi);$$

$$(\%o5) -2$$

$$(\%i6) \csc((120/180)*\%pi);$$

$$(\%o6) \frac{2}{\sqrt{3}}$$

(2) -120° 的六個三角函數值

$$(\%i7) \sin((-120/180)*\%pi);$$

$$(\%o7) -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(\%i8) \cos((-120/180)*\%pi);$$

$$(\%o8) -\frac{1}{2}$$

$$(\%i9) \tan((-120/180)*\%pi);$$

$$(\%o9) \sqrt{3}$$

$$(\%i10) \cot((-120/180)*\%pi);$$

$$(\%o10) \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$(\%i11) \sec((-120/180)*\%pi);$$

(%o11) -2

(%i12) $\csc((-120/180)*\pi)$;

(%o12) $-\frac{2}{\sqrt{3}}$

P. 117

隨堂練習：試求：

(1) 315° 的六個三角函數值

(%i1) $\sin((315/180)*\pi)$;

(%o1) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

(%i2) $\cos((315/180)*\pi)$;

(%o2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(%i3) $\tan((315/180)*\pi)$;

(%o3) -1

(%i4) $\cot((315/180)*\pi)$;

(%o4) -1

(%i5) $\sec((315/180)*\pi)$;

(%o5) $\sqrt{2}$

(%i6) $\csc((315/180)*\pi)$;

(%o6) $-\sqrt{2}$

(2) -210° 的六個三角函數值

(%i7) $\sin((-210/180)*\pi)$;

(%o7) $\frac{1}{2}$

(%i8) $\cos((-210/180)*\pi)$;

$$(\%o8) \quad -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(\%i9) \quad \tan((-210/180)*\%pi);$$

$$(\%o9) \quad -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$(\%i10) \quad \cot((-210/180)*\%pi);$$

$$(\%o10) \quad -\sqrt{3}$$

$$(\%i11) \quad \sec((-210/180)*\%pi);$$

$$(\%o11) \quad -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$(\%i12) \quad \csc((-210/180)*\%pi);$$

$$(\%o12) \quad 2$$

P. 118

例題 3：試判斷下列各式中的廣義角 θ 為第幾象限角

$$(1) \quad \sin \theta \cdot \cos \theta > 0$$

$$(2) \quad \cos \theta \cdot \tan \theta < 0$$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

隨堂練習：試判斷下列各式中的廣義角 θ 為第幾象限角

$$(1) \quad \frac{\cot \theta}{\cos \theta} < 0$$

(2) 設 θ 為第三象限角，則點 $(\sin \theta + \cos \theta, \tan \theta + \cot \theta)$ 在第幾象限？

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P. 119

例題 4：若 $\sin \theta = \frac{4}{5}$ ，試求 $\cos \theta$ 、 $\tan \theta$ 之值

※本題不建議使用 Maxima 解題※



隨堂練習：已知 $\cot \theta = -\frac{3}{4}$ ，試求：

(1) $\cos \theta$ ， $\csc \theta$ 之值

(2) $\frac{1-\cos \theta}{1+\csc \theta}$ 之值

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P. 120

例題 5：

(1) 在座標平面上，以圓點 O 為圓心， r 為半徑作一圓，設有向角 θ 的終邊與圓交於一點 P ，請說明交點座標為 $P(r \cos \theta, r \sin \theta)$

(2) 當有向角 θ 分別為 60° 、 120° 時，試其終邊與單位圓的交點座標

※本題不建議使用 Maxima 解題※

隨堂練習：當 θ 分別為 240° 、 300° 時，試其終邊與單位圓的交點座標

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P. 121

例題 6：若 $\sin \theta = \frac{4}{5}$ ，且 $180^\circ < \theta < 270^\circ$ ，試求 $\sin \theta$ 、 $\tan \theta$ 之值

※本題不建議使用 Maxima 解題※

隨堂練習：若 $\cos \theta = -\frac{4}{5}$ ，且 $90^\circ < \theta < 180^\circ$ ，試求 $\cos \theta$ 、 $\tan \theta$ 之值

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P. 122

隨堂練習：試求下列各式之值：

$$(1) \sin 840^\circ$$

$$(\%i1) \sin((840/180)*\%pi);$$

$$(\%o1) \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(2) \cos 1290^\circ$$

$$(\%i2) \cos((1290/180)*\%pi);$$

$$(\%o2) -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(3) \tan (-780^\circ)$$

$$(\%i3) \tan((-780/180)*\%pi);$$

$$(\%o3) -\sqrt{3}$$

$$(4) \sec(-1020^\circ)$$

$$(\%i4) \sec((-1020/180)*\%pi);$$

$$(\%o4) 2$$

P. 124

例題 7：試求下列各式之值：

$$(1) \sin(-60^\circ)$$

$$(\%i1) \sin((-60/180)*\%pi);$$

$$(\%o1) -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(2) \cos(1200^\circ)$$

$$(\%i2) \cos((1200/180)*\%pi);$$

$$(\%o2) -\frac{1}{2}$$

隨堂練習：試求下列各式之值：

(1) $\cot(-30^\circ)$

(%i1) $\cot((-30/180)*\pi)$;

(%o1) $-\sqrt{3}$

(2) $\csc(-1590^\circ)$

(%i2) $\csc((-1590/180)*\pi)$;

(%o2) -2

P. 125

例題 8：試求下列各式之值：

(1) $\sin 150^\circ$

(%i1) $\sin((150/180)*\pi)$;

(%o1) $\frac{1}{2}$

(2) $\cos 120^\circ$

(%i2) $\cos(((120/180)*\pi)$;

(%o2) $-\frac{1}{2}$

(3) $\tan 210^\circ$

(%i3) $\tan(((210/180)*\pi)$;

(%o3) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(4) $\sin(-240^\circ)$

(%i4) $\sin((-240/180)*\pi)$;

$$(\%04) \frac{\sqrt{3}}{2}$$

P. 126

隨堂練習：試求下列各式之值：

$$(1) \cot 135^\circ$$

$$(\%i1) \cot((135/180)*\%pi);$$

$$(\%o1) -1$$

$$(2) \sec 240^\circ$$

$$(\%i2) \sec(240/180*\%pi);$$

$$(\%o2) -2$$

$$(3) \csc 150^\circ$$

$$(\%i3) \csc(150/180*\%pi);$$

$$(\%o3) 2$$

$$(4) \sin(-945^\circ)$$

$$(\%i14) \sin(-945/180*\%pi);$$

$$(\%o14) \frac{1}{\sqrt{2}}$$

P. 126

例題 9：若 $\sin \theta = \frac{2}{3}$ ，且 $90^\circ < \theta < 180^\circ$ ，試求下列各式之值：

$$(1) \sin(810^\circ + \theta)$$

$$(2) \cos(450^\circ + \theta)$$

$$(3) \sin(630^\circ - \theta)$$

(4) $\cos(990^\circ + \theta)$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P. 128

隨堂練習：若 $\cos\theta = -\frac{4}{5}$ ，且 $180^\circ < \theta < 270^\circ$ ，試求下列各式之值：

(1) $\sin(810^\circ + \theta)$

(2) $\cos(450^\circ + \theta)$

(3) $\sin(630^\circ - \theta)$

(4) $\cos(990^\circ + \theta)$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.130 **習題 2-4**

1. 觀念題：對的在題號前打○，錯的在題號前打×

___ (1) $\sin(90^\circ - \theta) = \sin(\theta - 90^\circ)$ 。

___ (2) $\cos(90^\circ - \theta) = \cos(\theta - 90^\circ)$ 。

___ (3) $\tan(180^\circ - \theta) = -\cot \theta$ 。

___ (4) $\sin(180^\circ - \theta) = \sin(\theta - 180^\circ)$ 。

___ (5) $\cos(180^\circ - \theta) = \cos(\theta - 180^\circ)$ 。

___ (6) $\sec(270^\circ - \theta) = -\csc \theta$ 。

___ (7) 若 $90^\circ < \theta < 180^\circ$ ，則 $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$ 。

___ (8) 若 $90^\circ < \theta < 180^\circ$ ，則 $\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta}$ 。

※本題不建議使用 Maxima 解題※

2. 試判斷下列各式中的角 θ 為第幾象限角：

(1) $\frac{\csc \theta}{\cos \theta} > 0$

(2) $\sin \theta \cdot \tan \theta < 0$

(3) $\tan \theta$ 與 $\sec \theta$ 同號

(4) $\cot \theta$ 與 $\sin \theta$ 同號

※本題不建議使用 Maxima 解題※

3. 若 $P(-5, 12)$ 為廣義角 θ 終邊上的一點，試求角 θ 的六個三角函數值

※本題不建議使用 Maxima 解題※

4. 若 $\cos \theta = -\frac{8}{17}$ ，試求角 θ 的其餘五個三角函數值

※本題不建議使用 Maxima 解題※

5. 試求下列各三角函數值：

(1) $\sin 300^\circ$

(%i1) $\sin(300/180*\%pi)$;

(%o1) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\cos(-210^\circ)$

(%i2) $\cos(-210/180*\%pi)$;

(%o2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $\tan(-1020^\circ)$

(%i3) $\tan(-1020/180*\%pi)$;

(%o3) $\sqrt{3}$

(4) $\cot 1035^\circ$

(%i4) $\cot(1035/180*\%pi)$;

(%o4) -1

(5) $\sec 390^\circ$

(%i5) $\sec(390/180*\%pi)$;

(%o5) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

(6) $\csc 315^\circ$

(%i6) $\csc(315/180*\%pi)$;

(%o6) $\sqrt{2}$

(7) $\sin 0^\circ$

$(\%i7) \sin(0/180*\%pi);$

$(\%o7) 0$

(8) $\cos 180^\circ$

$(\%i18) \cos(180/180*\%pi);$

$(\%o18) -1$

(9) $\tan 360^\circ$

$(\%i9) \tan(360/180*\%pi);$

$(\%o9) 0$

(10) $\cot 270^\circ$

$(\%i10) \cot(270/180*\%pi);$

$(\%o10) 0$

(11) $\sec 90^\circ$

$(\%i11) \sec(90/180*\%pi);$

Division by 0

-- an error. To debug this try `debugmode(true);`

(12) $\csc 270^\circ$

$(\%i12) \csc(270/180*\%pi);$

$(\%o12) -1$



6.化下列各三角函數為銳角的三角函數：(答案不唯一)

(1) $\sin 490^\circ$

(%i1) float(sin(490/180*%pi));

(%o1) 0.76604444311898

(%i2) float(solve([sin(x/180*%pi)=0.76604444311898],[x]));

rat: replaced -0.766044443119 by -4309/5625 = -0.766044444444

solve: using arc-trig functions to get a solution.

Some solutions will be lost.

(%o2) 50.00000011814732

(2) $\cos 880^\circ$

(%i3) float(cos(880/180*%pi));

(%o3) -0.93969262078591

(%i4) float(solve([cos(x/180*%pi)=-0.93969262078591],[x]));

rat: replaced 0.93969262078591 by 5625/5986 = 0.93969261610424

solve: using arc-trig functions to get a solution.

Some solutions will be lost.

(%o4) [x=159.9999992157198]

(%i5) float(cos(-20/180*%pi));

(%o5) 0.93969262078591

* $\cos 160^\circ = \cos -20^\circ$

(3) $\tan 640^\circ$

(%i6) float(tan(640/180*%pi));

(%o6) -5.671281819617731

(%i7) float(solve([tan(x/180*%pi)=-5.671281819617731],[x]));

rat: replaced 5.671281819617731 by $12698/2239 = 5.671281822242072$

solve: using arc-trig functions to get a solution.

Some solutions will be lost.

(%o7) [x=-80.00000000453406]

(4) $\cot(-430^\circ)$

(%i8) float(cot(-430/180*%pi));

(%o8) -0.3639702342662

(%i9) float(solve([cot(x/180*%pi)=-0.3639702342662],[x]));

rat: replaced 0.3639702342662 by $3766/10347 = 0.36397023291775$

solve: using arc-trig functions to get a solution.

Some solutions will be lost.

(%o9) [x=-70.000000006822265]

(5) $\sec(-500^\circ)$

(%i10) float(sec(-500/180*%pi));

(%o10) -1.30540728933228

(%i11) float(solve([sec(x/180*%pi)=-1.30540728933228],[x]));

rat: replaced 1.30540728933228 by $5625/4309 = 1.305407287073567$

solve: using arc-trig functions to get a solution.

Some solutions will be lost.

(%o11) [x=140.0000001181473]



(6) $\csc(-740^\circ)$

(%i12) float(csc(-740/180*%pi));

(%o12) -2.923804400163095

(%i13) float(solve([csc(x/180*%pi)= -2.923804400163095],[x]));

rat: replaced 2.923804400163095 by 10821/3701 = 2.923804377195353

solve: using arc-trig functions to get a solution.

Some solutions will be lost.

(%o13) [x=-20.00000016381677]

※ 「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

※ 「solve([變數算式],[變數])」指令表示求解。

7. 試求下列各式之值

(1) $\sin 270^\circ \cos 360^\circ + \cos 180^\circ \tan 45^\circ + \csc 90^\circ \cos 60^\circ$

(%i1) sin(270/180*%pi)* cos(360/180*%pi)+ cos(%pi)*tan(45/180*%pi)+

csc(90/180*%pi)*cos(60/180*%pi);

(%o1) $-\frac{3}{2}$

(2) $\tan 360^\circ + 2\cot 270^\circ - 4 \sec 0^\circ + 5\sin 0^\circ$

(%i2) tan(360/180*%pi)+ 2*cos(270/180*%pi)-4*sec(0/180*%pi)+5*sin(0/180*%pi);

(%o2)-4

(3) $\sec 120^\circ - \tan 225^\circ + \cot 420^\circ \sin(-240^\circ) - \csc 480^\circ \sec 1110^\circ$

(%i3) sec(120/180*%pi)-tan(225/180*%pi)+cot(420/180*%pi)*sin(-240/180*%pi)-csc(48

0/180*%pi)* sec(1110/180*%pi);

$$(\%03) -\frac{23}{6}$$

8.化簡下列各式：

$$(1) \sin(180^\circ - \theta) \cos(180^\circ + \theta) \tan(270^\circ + \theta) + \cos(90^\circ + \theta) \sin(360^\circ - \theta)$$

$$(2) \frac{\tan(180^\circ + \theta)}{\cos(90^\circ + \theta)} \times \frac{\tan(90^\circ + \theta)}{\sin(270^\circ - \theta)} \times \frac{\tan(180^\circ - \theta)}{\cos(180^\circ + \theta)}$$

$$(3) \frac{\sin(180^\circ - \theta)}{\sin(-\theta)} \times \frac{\cot(180^\circ - \theta)}{\tan(\theta - 90^\circ)} \times \frac{\cos(\theta - 180^\circ)}{\sin(270^\circ - \theta)}$$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

9. 若 $\cos \theta = -\frac{3}{5}$ ，且角 θ 為第二象限角，試求下列各式之值：

$$(1) \sin \theta$$

$$(2) \tan \theta$$

$$(3) \sin(270^\circ - \theta)$$

$$(4) \tan(90^\circ + \theta)$$

$$(5) \sec(-\theta)$$

$$(6) \csc(180^\circ + \theta)$$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

10. 設 $\tan \theta = -\frac{8}{15}$ ，且 $270^\circ < \theta < 360^\circ$ ，試求 $\frac{2 \sin(180^\circ + \theta) - \sin(90^\circ - \theta)}{\sec(-\theta) + 2 \tan(180^\circ + \theta)}$ 之值

※本題不建議使用 Maxima 解題※

11. 已知 $\triangle ABC$ ，試求 $\frac{\tan(A+C) \tan B - \sec(A+C) \sec B}{\sin(A+B) \sin C - \cos(A+B) \cos C}$ 之值

※本題不建議使用 Maxima 解題※

2-5 正弦定理與餘弦定理

P. 133

例題 1: $\triangle ABC$ 中， $\angle A=60^\circ$ ， \overline{AD} 平分 $\angle A$ ，且 $\overline{AB}=10$ 、 $\overline{AC}=12$ 、設 $\overline{AD}=x$ ：

(1) 求 $\triangle ABC$ 的面積

$$(\%i1) \text{ ABC(AREA)}=10*12*\sin(60/180*\%pi)/2;$$

$$(\%o1) \text{ ABC(AREA)}=10 \cdot 3^{3/2}$$

(2) 試以 x 表示 $\triangle ABD$ 與 $\triangle ACD$ 的面積

$$(\%i2) \text{ ABD(AREA)}=x*10*\sin(60/180*\%pi)/2;$$

$$(\%o2) \text{ ABD(AREA)}= \frac{5}{2}x$$

$$(\%i3) \text{ ACD(AREA)}=x*12*\sin(60/180*\%pi)/2;$$

$$(\%o3) \text{ ACD(AREA)}=3x$$

(3) 求分角線 \overline{AD} 長

$$(\%i4) \text{ solve}([10*3^{3/2}=(5*x)/2+3*x],[x]);$$

$$(\%o4) [x=\frac{20 \cdot 3^{3/2}}{11}]$$

$* \triangle ABC \text{ 的面積} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$
--

* $\triangle ABC$ 的面積 = $\triangle ABD$ + $\triangle ACD$ 的面積。

隨堂練習: $\triangle ABC$ 中， $\angle B=120^\circ$ ， \overline{BD} 平分 $\angle B$ ，且 $\overline{AB}=12$ 、 $\overline{BC}=8$ 、設 $\overline{BD}=x$ ：

(1) 求 $\triangle ABD$ 的面積

$$(\%i1) \text{ ABD(AREA)}=1/2*12*8*\sin(60/180*\%pi);$$

$$(\%o1) \text{ ABD(AREA)}=8 \cdot 3^{3/2}$$

(2) 試以 x 表示 $\triangle ABC$ 與 $\triangle BCD$ 的面積

$$(\%i2) \text{ ABC(AREA)} = 1/2 * x * 12 * \sin(60/180 * \%pi);$$

$$(\%o2) \text{ ABC(AREA)} = 3^{3/2} x$$

$$(\%i3) \text{ BCD(AREA)} = 1/2 * x * 8 * \sin(60/180 * \%pi);$$

$$(\%o3) \text{ BCD(AREA)} = 2\sqrt{3}x$$

(3) 求 \overline{BC} 長

$$(\%i4) \text{ solve}([3^{3/2} * x = 8 * 3^{3/2} + 2 * \text{sqrt}(3) * x], [x]);$$

$$(\%o4) [x=24]$$

※ $\triangle ABC$ 的面積 = $\triangle ABD$ + $\triangle BCD$ 的面積

P. 136

例題 2： $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 4\sqrt{2}$ ， $\angle B = 75^\circ$ ， $\angle A = 60^\circ$ ，試求：

(1) \overline{BC} 長

$$(\%i1) 180 - 75 - 60;$$

$$(\%o1) 45$$

$$(\%i2) \text{ solve}([BC / \sin(60/180 * \%pi) = 4 * \text{sqrt}(2) / \sin((45/180 * \%pi)], [BC]);$$

$$(\%o2) [BC = 4\sqrt{3}]$$

(2) $\triangle ABC$ 的外接圓半徑

$$(\%i3) \text{ solve}([4 * \text{sqrt}(2) / \sin(45/180 * \%pi) = 2 * R], [R]);$$

$$(\%o3) [R=4]$$

※ 「 $\text{solve}([\text{變數算式}], [\text{變數}])$ 」指令表示求解。

隨堂練習：△ABC 中， $\overline{AB}=12$ ， $\angle C=45^\circ$ ， $\angle B=15^\circ$ ，試求：

(1) \overline{BC} 長

(%i1) 180-75-60;

(%o1) 45

(%i2) rootscontract(solve([BC/sin(120/180*%pi)=12/sin(45/180*%pi)],[BC]));

(%o2) [BC=6^{3/2}]

(2) △ABC 的外接圓半徑

(%i3) solve([12/sin(45/180*%pi)=2*R],[R]);

(%o3) [R=3 2^{3/2}]

※ 「rootscontract((sqrt 數值)*(sqrt 數值))」指令執行乘開兩根號數值。

※ 「solve([變數算式],[變數])」指令表示求解。

P. 137

例題 3：△ABC 中， $\overline{AB}=2\sqrt{3}-2$ 、 $\overline{AC}=4$ 、 $\overline{BC}=2\sqrt{2}$ ，試求三角形的三內角

(%i1) cosA=factor(((4^2+(2*sqrt(3)-2)^2-(2*sqrt(2))^2)/(2*4*(2*sqrt(3)-2)));

(%o1) $\cos A = -\frac{\sqrt{3}-3}{2(\sqrt{3}-1)}$

(%i2) expand(-(sqrt(3)-3)/(sqrt(3)));

(%o2) $\sqrt{3}-1$

(%i3) solve([cos(A/180*%pi)=sqrt(3)/2],[A]);

solve: using arc-trig functions to get a solution.

Some solutions will be lost.

(%o3) [A=30]

(%i5) cosB=factor(((2*sqrt(2))^2+(2*sqrt(3)-2)^2-4^2)/(2*(2*sqrt(2))*(2*sqrt(3)-2)));

$$(\%o5) \cos B = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

(%i6) solve([cos(B/180*%pi)= -(1/sqrt(2))],[B]);

solve: using arc-trig functions to get a solution.

Some solutions will be lost.

(%o6) [B=135]

(%i7)C=180-30-135;

(%o7) C=15

※ 「factor(數值)」指令表示求因式分解。

※ 「expand([算式] × [算式])」指令表示展開算式。

※ 「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

P. 137

隨堂練習：△ABC 中， $\overline{AB} = 3\sqrt{2} + \sqrt{6}$ 、 $\overline{AC} = 2\sqrt{6}$ 、 $\overline{BC} = 6$ ，試求三角形的三內角

(%i1)cosA=ratsimp(((2*sqrt(6))^2+(3*sqrt(2)+sqrt(6))^2-6^2)/(2*(2*sqrt(6))*(3*sqrt(2)+sqrt(6))));

$$(\%o1) \cos A = \frac{1}{2}$$

(%i2) solve([cos(A/180*%pi)= 1/2],[A]);

solve: using arc-trig functions to get a solution.

Some solutions will be lost.

(%o2) [A=60]

※ 「ratsimp([算式] × [算式])」指令表示化簡算式。

※ 「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

例題 4： $\triangle ABC$ 中， $\overline{AC} = 4\sqrt{3}$ ， $\angle A = 30^\circ$

(1) 若 $\overline{BC} = 2$ 時，求 \overline{AB} 長， $\angle B$ 與 $\angle C$

```
(%i1) solve([2^2=(4*sqrt(3))^2+AB^2-2*4*sqrt(3)*AB*cos(30/180*%pi)],[AB]);
```

```
(%o1) [AB=6-2^(3/2)*%i,AB=2^(3/2)*%i+6]
```

*x 不含虛數 i，故不存在

(2) 若 $\overline{BC} = 2\sqrt{3}$ 時，求 \overline{AB} 長， $\angle B$ 與 $\angle C$

```
(%i2) solve([(2*sqrt(3))^2=(4*sqrt(3))^2+AB^2-2*4*sqrt(3)*AB*cos(30/180*%pi)],[AB]);
```

```
(%o2) [AB=6]
```

* $\overline{BC} : \overline{AB} : \overline{AC} = 1 : \sqrt{3} : 2$ ，為 30° 、 60° 、 90° 直角三角形

(3) 若 $\overline{BC} = 4$ 時，求 \overline{AB} 長， $\angle B$ 與 $\angle C$

```
(%i3) solve([4^2=(4*sqrt(3))^2+AB^2-2*4*sqrt(3)*AB*cos(30/180*%pi)],[AB]);
```

```
(%o3) [AB=4,AB=8]
```

當 $\overline{BC} = \overline{AB} = 4$ ，為等 \overline{AB} 腰三角形，故 $\angle C = \angle A = 30^\circ$

```
(%i5) B=180-30-30;
```

```
(%o5) 120
```

當 $\overline{BC} = 4, \overline{AB} = 8$ ，

* $\overline{BC} : \overline{AC} : \overline{AB} = 1 : \sqrt{3} : 2$ ，為 30° 、 60° 、 90° 直角三角形

※ 「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

P. 140

隨堂練習：△ABC 中， $\overline{AC} = 4$ 、 $\overline{BC} = 4\sqrt{3}$ ， $\angle A = 60^\circ$ ，試求 \overline{AB} 長， $\angle B$ 與 $\angle C$

(%i1) solve([(4*sqrt(3))^2=4^2+AB^2-2*4*AB*cos(60/180*%pi)],[AB]);

(%o1) [AB=-4,AB=8]

當 $AB = -4$ 時，不存在

當 $AB = 8$ 時

* $\overline{AC} : \overline{BC} : \overline{AB} = 1 : \sqrt{3} : 2$ ，為 30° 、 60° 、 90° 直角三角形

※ 「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

例題 5：設四邊形 ABCD 為內接四邊形， $\overline{AB} = 4$ 、 $\overline{BC} = 3$ 、 $\overline{CD} = 4$ 、 $\overline{AD} = 6$ ，令 $\overline{BD} = x$ ，

$\angle BAD = \theta$ ，試回答下列問題：

(1) 利用△ABD 的邊角關係，寫出 x 與 θ 的關係式

(%i1) cosA=(4^2+6^2-x^2)/(2*4*6);

(%o1) cos A = $\frac{52-x^2}{48}$

(2) 利用△BCD 的邊角關係，寫出 x 與 θ 的關係式

(%i2) cos(180-A)=(3^2+4^2-x^2)/(2*3*4);

(%o2) cos(180° - A) = $\frac{25-x^2}{24}$

* $\cos(180^\circ - A) = \frac{25-x^2}{24} \Rightarrow -\cos A = \frac{25-x^2}{24} \Rightarrow \cos A = -\frac{25-x^2}{24}$

(3) 利用(1)、(2)的結果求 \overline{BD} 長

(%i3) solve([(52-x^2)/48= -(25-x^2)/24],[x]);

(%o3) [x=-√34,x=√34]

※ 「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

P. 141

隨堂練習：△ABC 中， $\overline{AB}=8$ 、 $\overline{AC}=5$ 、 $\overline{BD}=4$ 、 $\overline{CD}=6$ ，試求 \overline{AD} 長

$$(\%i1) \cos D = (\overline{AD}^2 + 4^2 - 8^2) / (2 * \overline{AD} * 4);$$

$$(\%o1) \cos D = \frac{\overline{AD}^2 - 48}{8\overline{AD}}$$

$$(\%i2) \cos(180-D) = (\overline{AD}^2 + 6^2 - 3^2) / (2 * \overline{AD} * 6);$$

$$(\%o2) \cos(180^\circ - D) = \frac{\overline{AD}^2 + 27}{12\overline{AD}}$$

$$(\%i3) \text{solve}([(AD^2-48)/(8*AD) = - (AD^2+27)/(12*AD)], [AD]);$$

$$(\%o3) [x = -3\sqrt{2}, x = 3\sqrt{2}]$$

$$* \cos(180^\circ - D) = \frac{\overline{AD}^2 + 27}{12\overline{AD}} \Rightarrow -\cos D = \frac{\overline{AD}^2 + 27}{12\overline{AD}} \Rightarrow \cos D = -\frac{\overline{AD}^2 + 27}{12\overline{AD}}$$

※ 「solve([變數算式], [變數])」 指令表示求解。

例題 6：試證平行四邊形中兩條對角線的平方和等於四邊形的平方和(平行四邊形定理)

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P. 141

隨堂練習：

(1) 平行四邊形 ABCD 中，設 $\overline{AB}=6$ 、 $\overline{AD}=4$ ，對角線 $\overline{AC}=8$ ，試求對角線 \overline{BD} 長

(2) 在△ABC 中， \overline{AD} 為 \overline{BC} 邊上的中線，已知 $\overline{AB}=6$ 、 $\overline{AC}=4$ 、 $\overline{BC}=8$ ，試求 \overline{AD} 長

(3) 在△ABC 中，D 為 \overline{BC} 邊上的中點，試證： $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2)$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.143 **習題 2-5**

1. 觀念題：對的在題號前打○，錯的在題號前打×

___ (1) 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\angle A : \angle B : \angle C = 1 : 2 : 3$ ，則 $\sin A : \sin B : \sin C = 1 : 2 : 3$ 。

___ (2) 在 $\triangle ABC$ 中， $a : b : c = \angle A : \angle B : \angle C$ 恆成立。

___ (3) 在 $\triangle ABC$ 中， $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$ 恆成立。

___ (4) 在 $\triangle ABC$ 中， $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ 。

___ (5) 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A > 90^\circ$ ，則 $a^2 > b^2 + c^2$ 。

___ (6) 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A < 90^\circ$ ，則 $a^2 < b^2 + c^2$ 。

※本題不建議使用 Maxima 解題※

2. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $(a+b) : (b+c) : (c+a) = 6 : 5 : 4$ 試求：

(1) $a : b : c$

(2) $\sin A : \sin B : \sin C$

(3) 在 $\triangle ABC$ 中最大的角為多少度？

※本題不建議使用 Maxima 解題※

3. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle A = 60^\circ$ 、 $\angle B = 75^\circ$ ， $\overline{BC} = 6$ ，試求：

(1) \overline{AB} 與 \overline{AC} 之長

(2) $\triangle ABC$ 的外接圓半徑 ($\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$)

※本題不建議使用 Maxima 解題※

4. 在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 2$ 、 $\overline{AC} = 1 + \sqrt{3}$ ， $\angle A = 30^\circ$ ，試求：

(1) \overline{BC} 之長

(2) $\angle C$ 的大小

※本題不建議使用 Maxima 解題※

5. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle A=60^\circ$ 、 $\overline{AB}=8$ 、 $\overline{AC}=6$ ，試求：

- (1) $\triangle ABC$ 的面積
- (2) $\angle A$ 的內角平分線之長
- (3) \overline{BC} 之長
- (4) \overline{BC} 邊上的高
- (5) \overline{BC} 邊上的中線長

※本題不建議使用 Maxima 解題※

6. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a=5$ 、 $b=6$ 、 $c=7$ ，試求：

- (1) $\cos A$
- (2) $\sin A$
- (3) $\triangle ABC$ 的面積
- (4) $\triangle ABC$ 的外接圓半徑
- (5) $\triangle ABC$ 的內切圓半徑

※本題不建議使用 Maxima 解題※

7. 四邊形 $ABCD$ 為內接四邊形，若 $\overline{AB}=3$ 、 $\overline{BC}=3$ 、 $\overline{CD}=5$ 、 $\overline{AD}=6$ ，則 \overline{AD} 長為多少？

※本題不建議使用 Maxima 解題※

8. 四邊形 $ABCD$ 為圓內接四邊形，若 $\angle ACB=30^\circ$ 、 $\angle ACD=45^\circ$ 、 $\overline{AB}=6$ ，則 \overline{AD} 長為多少

※本題不建議使用 Maxima 解題※

9. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle A=90^\circ$ 、 $\overline{AB}=3$ 、 $\overline{AC}=4$ ，今分別以 \overline{BC} 與 \overline{AC} 為邊長，往外作正方形BEDC與AFGC，試求：

(1) $\sin(\angle ACD)$ 與 $\sin(\angle DCG)$

(2) $\triangle ACD$ 的面積

(3) $\triangle CDG$ 的面積

※本題不建議使用 Maxima 解題※

10. 在 $\triangle ABC$ 中，設 $\overline{BC}=a$ 、 $\overline{AC}=b$ 、 $\overline{AB}=c$

(1) 試證 $\triangle ABC$ 的面積 $=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ，其中 $s=\frac{a+b+c}{2}$ ，海龍公式

(提示： $\triangle ABC$ 的面積 $=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}bc\sqrt{1-\cos^2 A}$)

(2) 若 $\overline{BC}=5$ 、 $\overline{AC}=6$ 、 $\overline{AB}=7$ ，求 $\triangle ABC$ 的面積

※本題不建議使用 Maxima 解題※

2-6 基本三角測量

P. 145

例題 1：在雷達站 A 處觀察一船以定數直線行駛，於中午 12 點 15 分，測得該船在北 55° 西的 P 處，於下午 2 點 15 分，測得該船在北 65° 東的 Q 處，若雷達站 A 與 P、Q 分別相距 30 公里與 50 公里，試求：

- (1) \overline{PQ} 的距離
- (2) 船航行的方向

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P. 146

隨堂練習：一船由 A 港口出發向西北方向行駛 100 哩抵達 B 地，然後再向南 15° 西航行 50 哩抵達 C 地，試求：

- (1) A、C 兩地的距離
- (2) 由 A 港口測得 C 地的方位為何？

※本題不建議使用 Maxima 解題※

例題 2：A、B 兩地分別在一山的東西兩側，今欲挖一條筆直的隧道連接兩地，為了節省時間，想從山的兩邊同時動工開挖，兩邊的工作人員應如何施工才能讓隧道在山的內部會合，若 C 地位於山的南方，與 A、B 兩地的距離分別為 5 公里與 8 公里，且測得 $\angle ACB=60^\circ$ ，試求：

- (1) A、B 的距離
- (2) 當兩邊的施工人員分別沿著動線 AP 與 BQ 施工時(點 A、P、Q、B 同一直線上)， $\angle CAP$ 與 $\angle CBQ$ 的角度應保持多少度，才能使兩邊的施工人員在山的內部會合

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P. 147

隨堂練習：為測量一湖的寬度，某人在湖的岸邊找到兩個目標物，A、B，另外找一點 C，並測得 $\angle ACB=60^\circ$ 、 $\overline{AC}=100$ 公尺、 $\overline{BC}=80$ 公尺，求湖的寬度

※本題不建議使用 Maxima 解題※

例題 3：P、Q、R 為一條筆直且水平的公路上的三點，且 $\overline{PQ}=\overline{QR}=20$ 公尺，設公路旁有一大型的廣告看板，今有一人駕車行駛於公路，由 P、Q、R 三點觀測看板的頂端 A 所得的仰角分別為 30° 、 45° 、 60° ，設 A 在地面上的垂足為 B 且 $\overline{AB}=x$ 公尺

(1) 試以 x 表 \overline{AC} 、 \overline{BC} 、 \overline{BR}

(2) 求廣告看板的高度

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P. 148

隨堂練習：承例題 3，若 $\overline{PQ}=20$ 公尺、 $\overline{QR}=10$ ，則廣告看板的高度是多少公尺？

※本題不建議使用 Maxima 解題※

例題 4：設台北市中正紀念堂的高度為 h 公尺，今甲、乙、丙三人分別在廣場上 A、B、C 三個位置測得中正紀念堂最高點 P 的仰望角皆為 30° ，設 P 點在地面上垂足為 Q 點，已知 $\overline{BC}=120$ 公尺， $\angle BAC=30^\circ$ ，試求：

(1) 以 h 表示 \overline{AQ} 、 \overline{BQ} 、 \overline{CQ}

(2) 以 h 表示 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑

(3) 中正紀念堂的高度(h)

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P. 149

隨堂練習：甲、乙、丙三人分別在地面上 A、B、C 三個位置測得氣球 P 的仰角皆為 60° ，若 $\overline{AB} = 300$ 公尺， $\angle BCA = 30^\circ$ ，並設氣球高度為 h 公尺，試求：

(1) 以 h 表示 \overline{AQ} 、 \overline{BQ} 、 \overline{CQ}

(2) 以 h 表示 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑

(3) 氣球的高度(h)

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.143 **習題 2-6**

1. 小明在廣場上某一點出發，先往東北方前進 50 公尺後，再轉往正西方向行進，一段時間後測得原出發點在他的南偏東 60° 方向，此時他距原出發點多少公尺？

※本題不建議使用 Maxima 解題※

2. 甲、乙兩人分別在海岸邊 A、B 兩個觀測點的位置，已知 A、B 相距 100 公尺，兩人同時發現海上有依漂流物 C，並測得 $\angle CAB=75^\circ$ 、 $\angle CBA=60^\circ$ ，試求：

(1) A、C 的距離

(2) 漂流物至海岸邊的距離 ($\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$)

※本題不建議使用 Maxima 解題※

3. A、B 兩觀測站相距 600 公尺，在 A 測得山頂 C 的仰角 30° ， $\angle CAB=75^\circ$ ，在 B 測得 $\angle CBA=45^\circ$ ，求山的高度

※本題不建議使用 Maxima 解題※

4. 有一船在燈塔西 25° 南，測得燈塔頂的仰角為 30° ，另一船在燈塔之東 35° 南，測得燈塔頂的仰角 60° ，若燈塔的高度為 30 公尺，求兩船的距離

※本題不建議使用 Maxima 解題※

5. 公園有一塔，塔高不滿 80 公尺，甲在塔的正西方測得塔頂的仰角為 30° ，然後向東 30° 南方前近 100 公尺，又測得塔頂的仰角為 45° ，試求：

(1) 塔的高度

(2) 若甲前進方向不變，則再前進多少公尺後又可測得塔頂的仰角為 30°

※本題不建議使用 Maxima 解題※

6. 某人於山腳下測得山頂的仰角為 30° ，沿著 15° 斜坡往上走 200 公尺後，再測得山頂的仰角為 45° ，試求山高 $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.151**綜合練習**

1. 設 $\triangle ABC$ 的三頂點 A、B、C 所對應的邊長為 a、b、c，若 \overline{AH} 為 \overline{BC} 邊上的高，則 \overline{AH} 之長為下列何者？

($b\sin B$ 、 $c\sin C$ 、 $b\sin C$ 、 $c\sin B$ 、 $a\sin A$)

※本題不建議使用 Maxima 解題※

2. 設 H 為銳角三角形 ABC 的垂心(三高之交點)，若以 c 表線段 \overline{AB} 之長，則線段 \overline{AH} 之長為下列何者？

($c \cos A \sin C$ 、 $c \cos A \cos C$ 、 $c \cos A \tan C$ 、 $c \cos A \sec C$ 、 $c \cos A \csc C$)

※本題不建議使用 Maxima 解題※

3. $\triangle ABC$ 中， \overline{BC} 邊上兩點 D、E 分別與 A 連線，假設 $\angle ACB = \angle ADC = 45^\circ$ ， $\triangle ABC$ 、 $\triangle ABD$ 、 $\triangle ABE$ 的外接圓半徑分別為 R_1 、 R_2 、 R_3 ，設 $\overline{AB} = c$ ，試求：

(1) 以 c 表示 R_1 、 R_2

(2) 比較 R_1 、 R_2 、 R_3 的大小

※本題不建議使用 Maxima 解題※

4. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle A = 60^\circ$ 、 $\overline{AB} = 2\sqrt{3}$ 、 $\overline{AC} = 3 + \sqrt{3}$ ，試求：

(1) \overline{BC} 長

(2) $\angle B$ 與 $\angle C$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

5. 已知 $\triangle ABC$ 三邊長 $\overline{AB}=7$ 、 $\overline{BC}=5$ 、 $\overline{AC}=3$ ，延長 \overline{BC} 至D，使得 $\overline{CD}=2$ ，試求：

(1) $\cos B$ 之值

(2) 線段 \overline{AD} 的長度

※本題不建議使用 Maxima 解題※

6. 氣象局測出在 20 小時期間內，颱風中心的位置由恆春東南方 400 公里的 A 處，值線移動到恆春南 15° 西 200 公里的 B 處，試求：

(1) A、B 之間的距離

(2) 颱風移動的平均速率

※本題不建議使用 Maxima 解題※

7. A、B 兩點分別位於一河口的兩岸邊，小明在通往 A 點的筆直公路上，距離 A 點 50 公尺的 C 點與距離 A 點 200 公尺的 D 點，分別測得 $\angle ACB=60^\circ$ 、 $\angle ADB=30^\circ$ ，試求：

(1) B 與 C 的距離

(2) A 與 B 的距離

※本題不建議使用 Maxima 解題※

8. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC=60^\circ$ 、 $\angle ABC$ 的角平分線 \overline{BD} 交 \overline{AC} 於D，已知 $\overline{AB}=6$ 、 $\overline{BD}=2\sqrt{3}$ ，試求：

(1) $\triangle ABD$ 面積

(2) 線段 \overline{BC} 長度

(3) 線段 \overline{AC} 長度

(4) $\triangle ABC$ 面積

※本題不建議使用 Maxima 解題※

9. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC$ 的平分線 \overline{AD} 交 \overline{BC} 於 D ，已知 $\overline{BD}=3$ 、 $\overline{DC}=6$ ，且 $\overline{AB}=\overline{AD}$ ，設 $\overline{AB}=x$ ，試求：

- (1) 試以 x 表示線段 \overline{AC} 的長
- (2) 求線段 \overline{AC} 長度

※本題不建議使用 Maxima 解題※

10. 以知四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{AB}=8$ 、 $\overline{CD}=8$ 、 $\overline{AD}=3$ ，且 $\angle ABC=\angle ADC=60^\circ$ ，試求：

- (1) 線段 \overline{AC} 長度
- (2) 線段 \overline{BC} 長度

※本題不建議使用 Maxima 解題※

11. 小明欲測量河的對岸 C 、 D 兩點間的距離，他在河岸 A 、 B 兩觀測站，分別測得 $\angle CAB=120^\circ$ 、 $\angle CBA=45^\circ$ ，且兩觀測站的距離為 30 公尺，試求： $(\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4})$

- (1) A 與 C 兩點間的距離
- (2) A 與 D 兩點間的距離
- (3) C 與 D 兩點間的距離

※本題不建議使用 Maxima 解題※

12. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{AB}=16$ 、 $\overline{AC}=12$ 、 $\overline{BC}=20$ ，且 $\overline{BD}:\overline{CD}=2:3$ ，試求 \overline{AD} 之長

※本題不建議使用 Maxima 解題※

第三章 三角函數的性質與應用

3-1 三角函數的圖形

P.156

例題 1：

(1) 試將下列各度數化為弧度：

(a) 15°

(%i1) $f(x) := x * (\%pi / 180);$

(%o1) $f(x) := x \frac{\pi}{180}$

(%i2) $f(15);$

(%o2) $\frac{\pi}{12}$

(b) 144°

(%i3) $f(144);$

(%o3) $\frac{4\pi}{5}$

(c) 285°

(%i4) $f(285);$

(%o4) $\frac{19\pi}{12}$

(2) 試將下列各弧度化為度數：

(a) $\frac{5\pi}{12}$

(%i1) $g(x) := x * \%pi * (180 / \%pi);$

(%o1) $g(x) := x\pi \frac{180}{\pi}$

(%i2) $g(5 / 12);$

(%o2) 75

(b) $\frac{8\pi}{5}$

(%i3) $g(8/5)$;

(%o3) 288

(c) $\frac{13\pi}{10}$

(%i4) $g(13/10)$;

(%o4) 234

P.158

隨堂練習：度與弧度的換算

(1) 0° 、 45° 、 60° 、 90° 、 120° 、 150° 、 180° 、 210° 、 270° 、 315° 、 330°

(%i1) $f(x) := x \cdot (\pi/180)$;

(%o1) $f(x) := x \frac{\pi}{180}$

(%i2) $f(0)$;

(%o2) 0

(%i3) $f(45)$;

(%o3) $\frac{\pi}{4}$

(%i4) $f(60)$;

(%o4) $\frac{\pi}{3}$

(%i5) $f(90)$;

(%o5) $\frac{\pi}{2}$

(%i6) $f(120)$;

$$(\%o6) \frac{3\pi}{4}$$

$$(\%i7) f(150);$$

$$(\%o7) \frac{5\pi}{6}$$

$$(\%i8) f(180);$$

$$(\%o8) \pi$$

$$(\%i9) f(210);$$

$$(\%o9) \frac{7\pi}{6}$$

$$(\%i10) f(270);$$

$$(\%o10) \frac{3\pi}{2}$$

$$(\%i11) f(315);$$

$$(\%o11) \frac{7\pi}{4}$$

$$(\%i12) f(330);$$

$$(\%o12) \frac{11\pi}{6}$$

$$(2) \frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$$

$$(\%i1) g(x) := x * \%pi * (180 / \%pi);$$

$$(\%o1) g(x) := x\pi \frac{180}{\pi}$$

$$(\%i2) g(1/6);$$

$$(\%o2) 30$$

$$(\%i3) g(3/4);$$

$$(\%o3) 135$$

$$(\%i4) g(5/4);$$

$$(\%o4) 225$$

$$(\%i5) g(4/3);$$

(%o5) 240

(%i6) $g(5/3)$;

(%o6) 300

例題 2：半徑為 1 的三個圓互相外切，求

(1) 三圓所圍成的區域周長

(%i1) $3*(2*\%pi*1*(\%pi/3))/(2*\%pi)$;

(%o1) π

(2) 三圓所圍成的區域面積

(%i2) $\text{sqrt}(3)/4*2^2-3*(\%pi*1^2*(\%pi/3))/(2*\%pi)$;

(%o2) $\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}$

P.159

隨堂練習：若一圓形中分割出來的扇形面積(A1)與剩餘面積(A2)的比值為 $\frac{\sqrt{5}}{2} \approx 0.618$ ，

則稱此扇形為符合黃金比例的扇形；一把符合黃金比例的摺扇，是指完全張開時符合黃金比例特性，試問黃金比例的摺扇完全張開時的角度為多少？

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.160

例題 3：

(1)

(a) 若 θ 與有向角 10 同界，且 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ，求 θ

(b) 有向角 10 為第幾象限角？

※本題不建議使用 Maxima 解題※

(2)寫出下列各函數值：

(a) $\sin \frac{5\pi}{2}$

(%i1) $\sin(5*\%pi/2);$

(%o1) 1

(b) $\cos \frac{16\pi}{3}$

(%i2) $\cos(16*\%pi/3);$

(%o2) $-\frac{1}{2}$

(c) $\tan\left(-\frac{9\pi}{4}\right)$

(%i3) $\tan(-9*\%pi/4);$

(%o3) -1

P.161

隨堂練習：寫出下列各函數值：

(1) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

(%i1) $\sin(-\%pi/2);$

(%o1) -1

(2) $\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$

(%i2) $\sin(-4*\%pi/3);$

(%o2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$(3) \cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$(\%i3) \cos(16*\%pi/3);$$

$$(\%o3) -\frac{1}{2}$$

$$(4) \cos\left(\frac{23\pi}{4}\right)$$

$$(\%i4) \cos(23*\%pi/4);$$

$$(\%o4) \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$(5) \tan 4\pi$$

$$(\%i5) \tan(4*\%pi);$$

$$(\%o5) 0$$

$$(6) \tan\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$(\%i6) \tan(-5*\%pi/6);$$

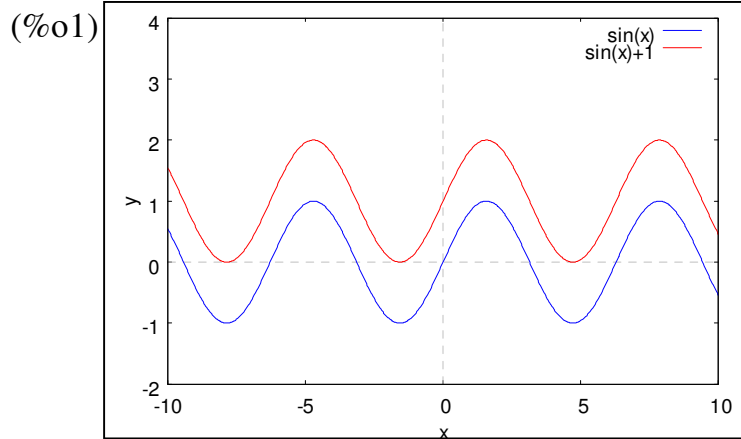
$$(\%o6) \frac{1}{\sqrt{3}}$$

P.164

例題 4：試利用正弦函數 $y = \sin x$ 的圖形描繪下列函數的圖形，並說明其周期

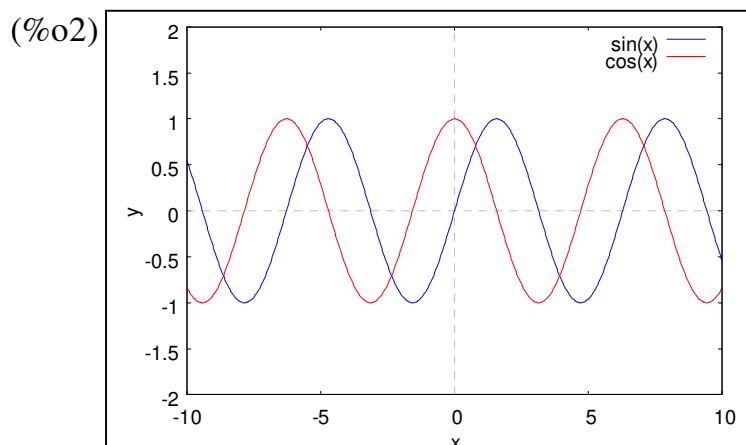
$$(1) y = \sin x + 1$$

$$(\%i1) \text{plot2d}([\sin(x), \sin(x)+1], [x, -10, 10], [y, -2, 4]);$$



(2) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

(%i2) `plot2d ([sin(x),sin(x+%pi/2)],[x,-10,10],[y,-2,2]);`



※「`plot2d ([方程式],[x,最小值,最大值],[y, 最小值,最大值])`」；指令表示繪出方程式之圖形，其中 x 軸刻度介於最小值~最大值之間、 y 軸刻度介於最小值~最大值之間。

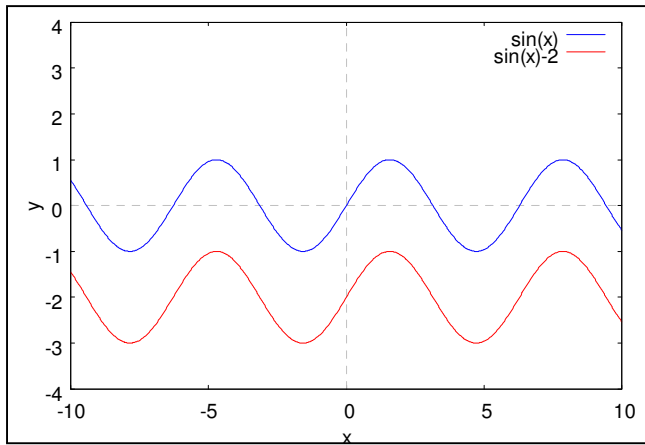
P.166

隨堂練習：試利用正弦函數 $y = \sin x$ 的圖形描繪下列函數的圖形，並說明其周期

(1) $y = \sin x - 2$

(%i1) `plot2d ([sin(x),sin(x)-2],[x,-10,10],[y,-4,4]);`

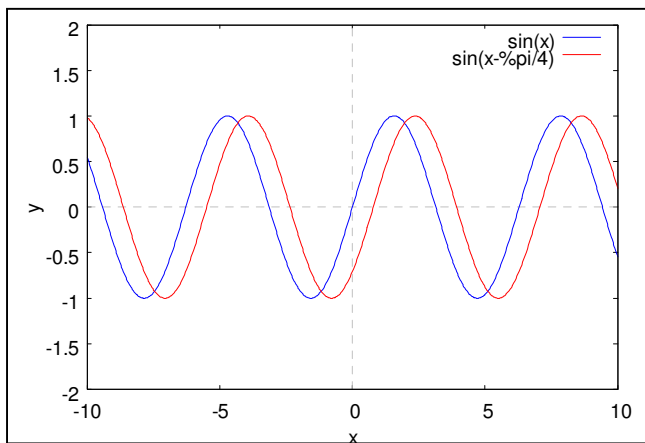
(%o1)



$$(2) y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

(%i2) plot2d ([sin(x),sin(x-%pi/4)], [x,-10,10],[y,-2,2]);

(%o2)



※「plot2d ([方程式],[x,最小值,最大值],[y, 最小值,最大值])」；指令表示繪出方程式之圖形，其中 x 軸刻度介於最小值~最大值之間、y 軸刻度介於最小值~最大值之間。

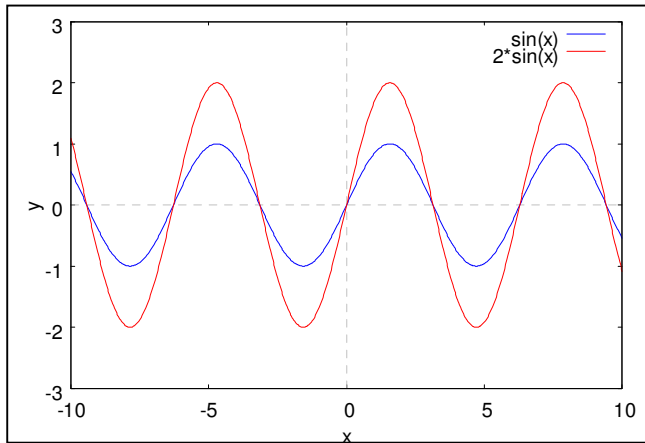
P.166

例題 5：試利用正弦函數 $y = \sin x$ 的圖形描繪下列函數的圖形，並說明其周期與振幅

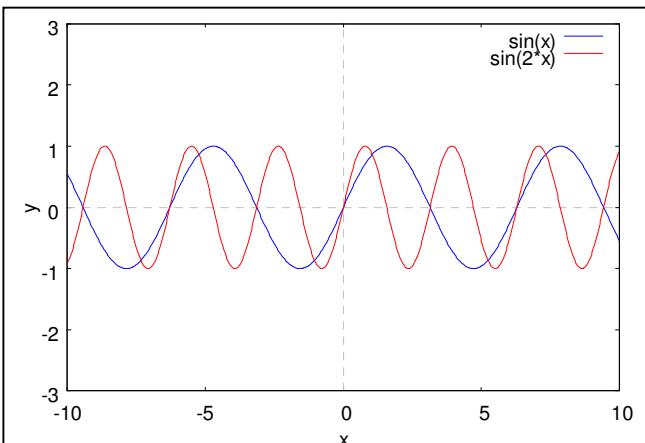
$$(1) y = 2 \sin x$$

(%i1) plot2d ([sin(x),2*sin(x)], [x,-10,10],[y,-3,3]);

(%o1)

(2) $y = \sin 2x$ (%i1) `plot2d ([sin(x),sin(2*x)], [x,-10,10], [y,-3,3]);`

(%o1)



※「`plot2d ([方程式],[x,最小值,最大值],[y, 最小值,最大值])`」；指令表示繪出方程式之圖形，其中 x 軸刻度介於最小值~最大值之間、 y 軸刻度介於最小值~最大值之間。

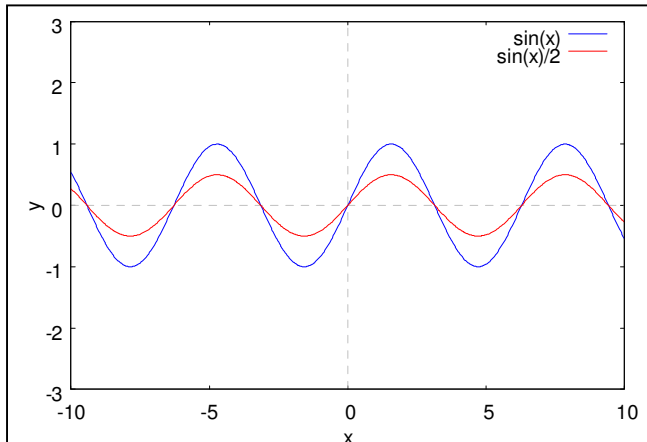
P.167

隨堂練習：試利用正弦函數 $y = \sin x$ 的圖形描繪下列函數的圖形，並說明其周期與振幅

(1) $y = \frac{1}{2} \sin x$

(%i1) plot2d ([sin(x),1/2*sin(x)], [x,-10,10],[y,-3,3]);

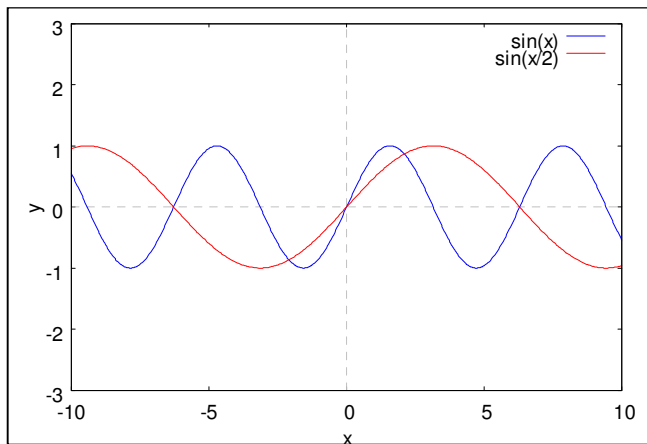
(%o1)



(2) $y = \sin \frac{1}{2}x$

(%i2) plot2d ([sin(x), sin(1/2*x)], [x,-10,10],[y,-3,3]);

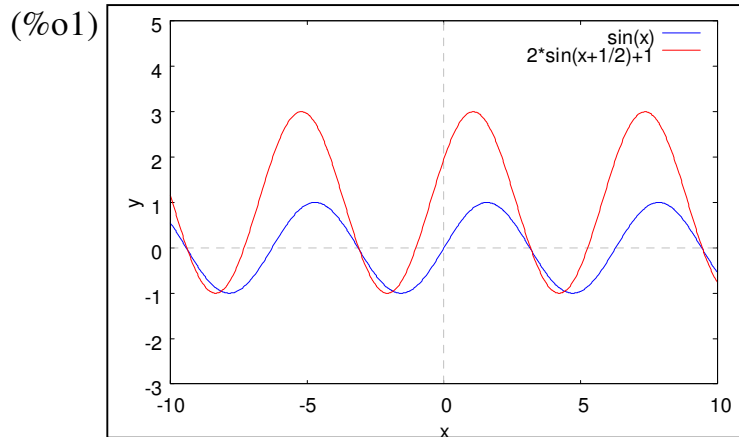
(%o2)



※「plot2d ([方程式],[x,最小值,最大值],[y, 最小值,最大值])」；指令表示繪出方程式之圖形，其中 x 軸刻度介於最小值~最大值之間、y 軸刻度介於最小值~最大值之間。

例題 6：試利用正弦函數 $y = \sin x$ 的圖形，並配合例題 4、例題 5 的平移與伸縮觀念，描繪 $y = 2\sin(x + \frac{1}{2}) + 1$ 的圖形。

(%i1) plot2d ([sin(x), 2*sin(x+1/2)+1], [x,-10,10],[y,-3,5]);

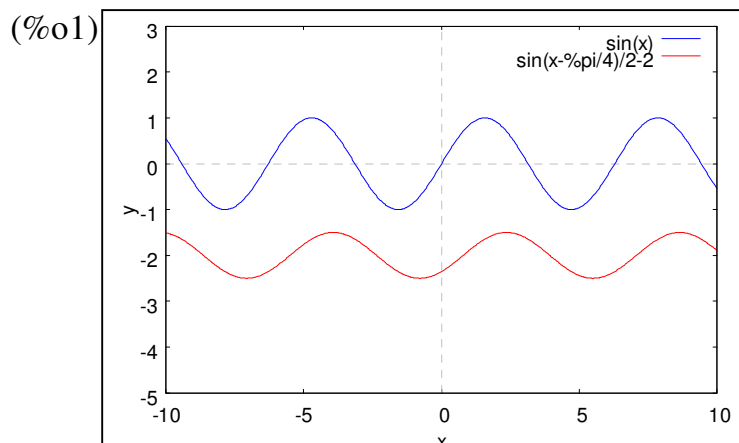


※「plot2d ([方程式],[x,最小值,最大值],[y, 最小值,最大值])」；指令表示繪出方程式之圖形，其中 x 軸刻度介於最小值~最大值之間、y 軸刻度介於最小值~最大值之間。

P.168

隨堂練習：試利用正弦函數 $y = \sin x$ 的圖形，並配合例題 4、例題 5 的隨堂練習之平移與伸縮觀念，描繪 $y = \frac{1}{2} \sin(x - \frac{\pi}{4}) - 2$ 的圖形。

(%i1) plot2d ([sin(x), 1/2*sin(x-%pi/4)-2],[x,-10,10],[y,-5,3]);



※「plot2d ([方程式],[x,最小值,最大值],[y, 最小值,最大值])」；指令表示繪出方程式

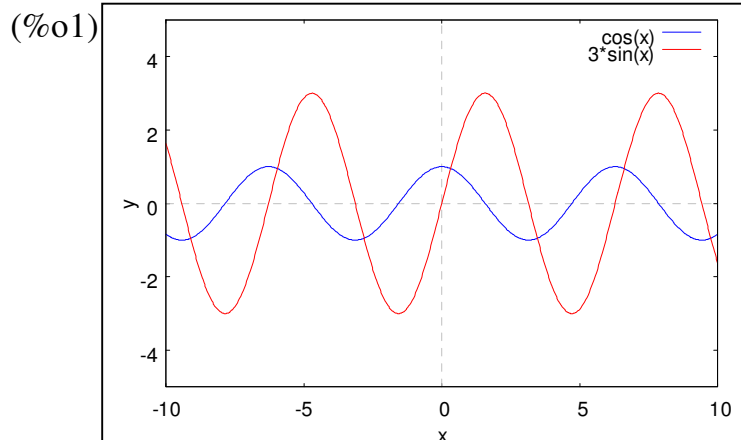
之圖形，其中 x 軸刻度介於最小值~最大值之間、 y 軸刻度介於最小值~最大值之間。

P.169

隨堂練習：試利用正弦函數 $y = \cos x$ 的圖形描繪下列函數的圖形，並說明其周期與振幅

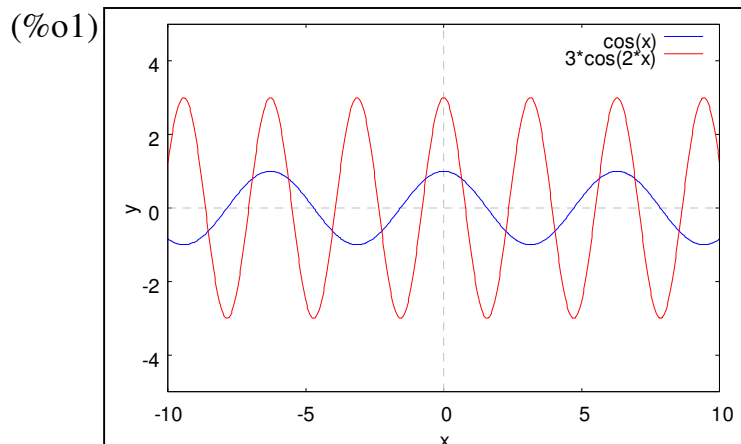
(1) $y = 3\cos(x - \frac{\pi}{2})$

(%i1) plot2d ([cos(x), 3*cos(x-%pi/2)], [x, -10, 10], [y, -5, 5]);



(2) $y = 3\cos 2x$

(%i1) plot2d ([cos(x), 3*cos(2*x)], [x, -10, 10], [y, -5, 5]);



※「plot2d ([方程式],[x,最小值,最大值],[y, 最小值,最大值])」; 指令表示繪出方程式之圖形，其中 x 軸刻度介於最小值~最大值之間、y 軸刻度介於最小值~最大值之間。

P.172

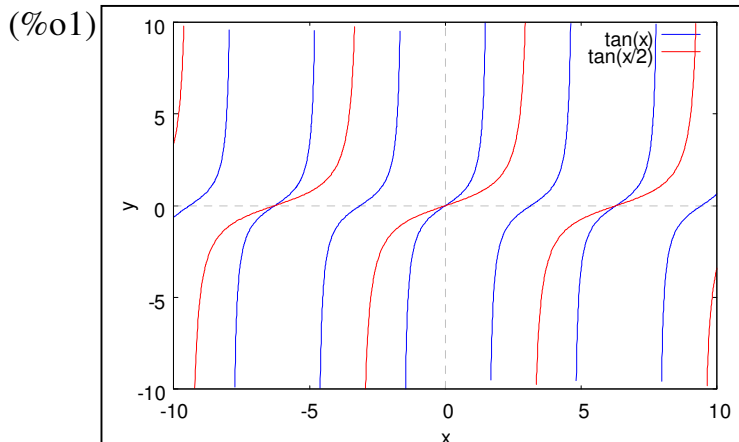
例題 7：

(1) 試利用正切函數 $y = \tan x$ 的圖形描繪 $y = \tan \frac{x}{2}$ 的圖形，並說明其周期

```
(%i1) plot2d ([tan(x), tan(x/2)], [x, -10, 10], [y, -10, 10]);
```

plot2d: some values were clipped.

plot2d: some values were clipped.



(2) 試判斷方程式 $y = \tan \frac{x}{2}$ ，在 $-2\pi < x < 2\pi$ 內有幾組解

※「plot2d ([方程式],[x,最小值,最大值],[y, 最小值,最大值])」; 指令表示繪出方程式之圖形，其中 x 軸刻度介於最小值~最大值之間、y 軸刻度介於最小值~最大值之間。

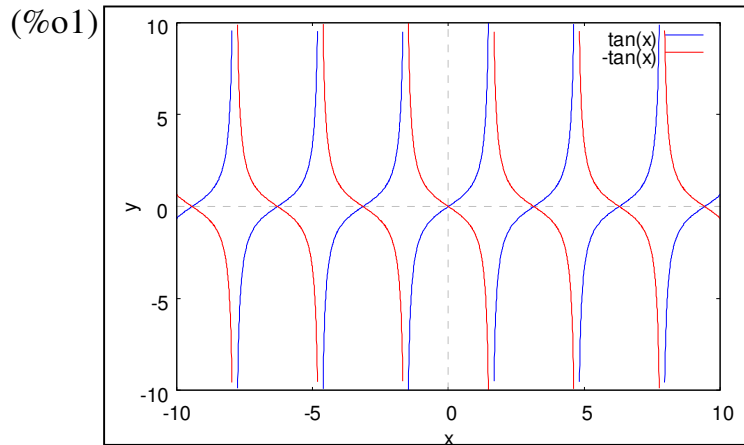
P.173**隨堂練習：**

(1) 試利用正切函數 $y = \tan x$ 的圖形描繪 $y = -\tan x$ 的圖形，並說明其周期

```
(%i1) plot2d ([tan(x), -tan(x)], [x, -10, 10], [y, -10, 10]);
```

plot2d: some values were clipped.

plot2d: some values were clipped.



(2) 試判斷方程式 $x = -\tan x$ ，在 $-\pi < x < \pi$ 內有幾組解

※「`plot2d ([方程式], [x, 最小值, 最大值], [y, 最小值, 最大值])`」；指令表示繪出方程式之圖形，其中 x 軸刻度介於最小值~最大值之間、 y 軸刻度介於最小值~最大值之間。

P.174 **習題 3-1**

1. 觀念題：對的在題號前打○，錯的在題號前打×

___ (1) 圓 O_1 的半徑 r_1 且 $\widehat{AB}=r_1$ ， $\angle AO_1B=\theta_1$ ，圓 O_2 的半徑為 r_2 且 $\widehat{CD}=r_2$ ， $\angle CO_2D=\theta_2$ ，若 $r_1 \neq r_2$ ，則 $\theta_1 \neq \theta_2$ 。

___ (2) $\sin 1 < \cos 1$ 。

___ (3) $\sin 1 < \sin 2 < \sin 3$ 。

___ (4) 單位圓 O 交 x 軸於 A ，標準位置銳角 θ (弧度) 的終邊 L 交單位圓於 C 、 D 在 L 上，且 $\overline{BC} \perp x$ 軸於 B ， $\overline{AD} \perp x$ 軸，則 $\overline{BC} = \sin \theta$ ， $\widehat{AC} = \theta$ ， $\overline{AD} = \tan \theta$ ，且 $\sin \theta < \theta < \tan \theta$ 。

___ (5) $y = \sin 2x$ 為周期函數且其周期為 4π 。

___ (6) 將餘弦函數的圖形右移 $\frac{\pi}{2}$ 個單位可得正弦函數的圖形。

___ (7) 正切函數 $y = \tan x$ ，須限制 $x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}$ ，其中 n 為任意整數。

___ (8) 正弦函數、餘弦函數、正切函數其周期都是 2π 。

___ (9) 正弦函數、餘弦函數、正切函數其函數值都可為任意實數。

※本題不建議使用 Maxima 解題※

2. 將下列各度數化為弧度：

(1) 18°

(%i1) f(x):=x*(%pi/180);

(%o1) $f(x) := x \frac{\pi}{180}$

(%i2) f(18);

(%o2) $\frac{\pi}{10}$

(2) 105°

(%i3) $f(105)$;

(%o3) $\frac{7\pi}{12}$

(3) -306°

(%i4) $f(-306)$;

(%o4) $-\frac{17\pi}{10}$

3. 將下列各弧度化為度數：

(1) $\frac{2\pi}{5}$

(%i1) $g(x) := x * \pi * (180 / \pi)$;

(%o1) $g(x) := x\pi \frac{180}{\pi}$

(%i2) $g(2/5)$;

(%o2) 72

(2) $\frac{11\pi}{12}$

(%i3) $g(11/12)$;

(%o3) 165

(3) $-\frac{6\pi}{5}$

(%i4) $g(-6/5)$;

(%o4) -216

P.175

4. 試求下列各函數值：

(1) $\sin \frac{7\pi}{6}$

(%i1) $\sin(7*\%pi/6);$

(%o1) $-\frac{1}{2}$

(2) $\cos \frac{7\pi}{4}$

(%i2) $\cos(7*\%pi/4);$

(%o2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(3) $\tan(-\frac{2\pi}{3})$

(%i3) $\tan(-2*\%pi/3);$

(%o3) $\sqrt{3}$

5. 設 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ，試求滿足 $\sin \theta = \frac{1}{2}$ 的 θ 值

(1) $\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) $\tan \theta = -\sqrt{3}$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

6. 兩同心圓的半徑分別為 3 公分、5 公分，若 \widehat{CD} 的弧長 7 公分，求：

(1) \widehat{AB} 的弧長

(2) 由 \widehat{AB} 、 \widehat{CD} 與兩半徑所圍的區域面積

※本題不建議使用 Maxima 解題※

7.校慶園遊會，某班設計出三層冰淇淋甜筒海報，若此圖形是由扇形 AOB 與以 \overline{AB} 為直徑的半圓所構成，且 $\angle AOB=60^\circ$ ， $\overline{OA}=30$ 公分，試求：

(1)中層香草口味的面積

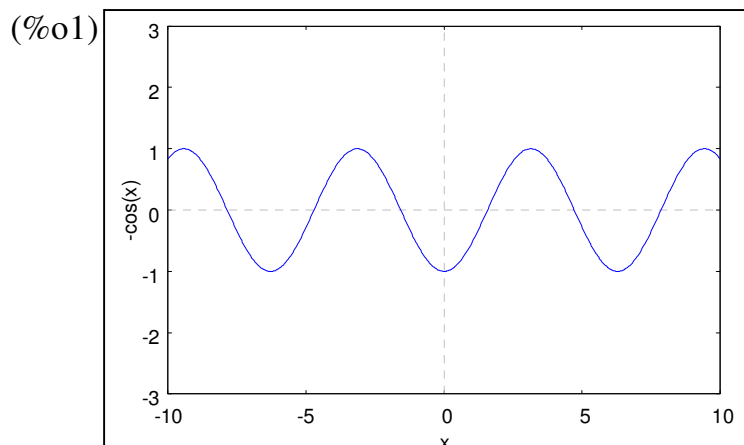
(2)上層草莓口味的面積

※本題不建議使用 Maxima 解題※

8.試繪下列各函數的圖形，並說明其周期與振幅

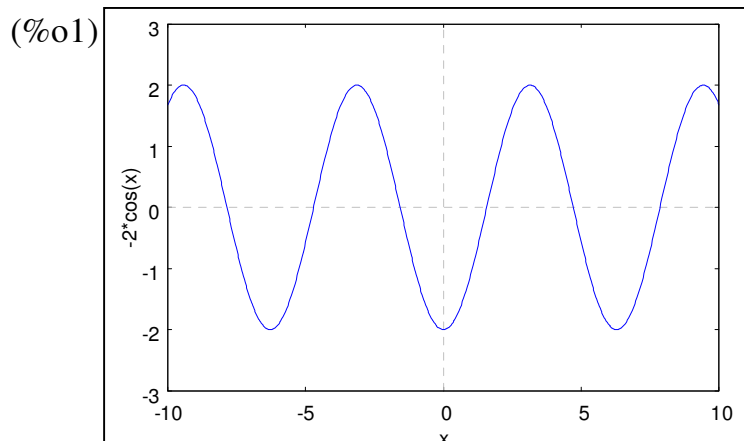
(1) $y = \sin(x - \frac{\pi}{2})$

(%i1) plot2d ([sin(x-%pi/2)],[x,-10,10],[y,-3,3]);



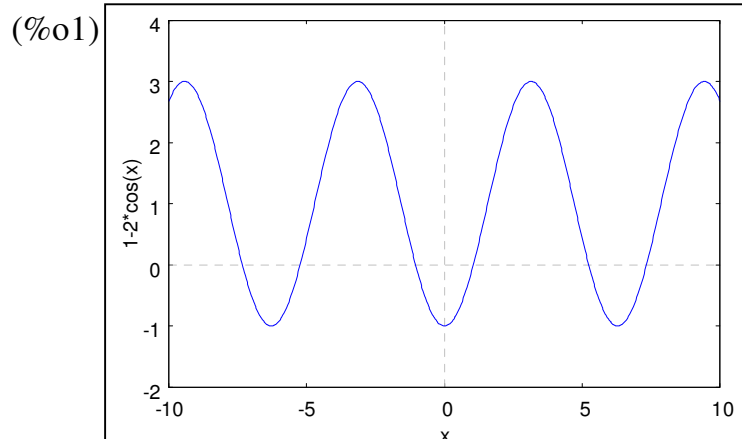
(2) $y = 2 \sin(x - \frac{\pi}{2})$

(%i1) plot2d ([2*sin(x-%pi/2)],[x,-10,10],[y,-3,3]);



$$(3) \quad y = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$$

```
(%i1) plot2d ([2*sin(x-%pi/2)+1],[x,-10,10],[y,-2,4]);
```



※ 「plot2d ([方程式],[x,最小值,最大值],[y, 最小值,最大值])」；指令表示繪出方程式之圖形，其中 x 軸刻度介於最小值~最大值之間、y 軸刻度介於最小值~最大值之間。

3-2 和角公式

P.178

例題 1：試求下列之值：

(1) $\cos 15^\circ$

```
(%i1) float(cos(15/180*%pi));
```

```
(%o1) 0.96592582628907
```

(2) $\cos 75^\circ$

```
(%i2) float(cos(75/180*%pi));
```

```
(%o2) 0.25881904510252
```

(3) $\cos 17^\circ \cos 28^\circ - \sin 17^\circ \sin 28^\circ$

```
(%i3) float(cos(17/180*%pi)*cos(28/180*%pi)- sin(17/180*%pi)* sin(28/180*%pi));
```

```
(%o3) 0.70710678118655
```

(4) $\cos 175^\circ \cos 25^\circ + \sin 175^\circ \sin 25^\circ$

```
(%i4) float(cos(175/180*%pi)*cos(25/180*%pi)+sin(175/180*%pi)*sin(25/180*%pi));
```

```
(%o4) 0.86602540378444
```

※ 「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

隨堂練習：試求下列之值：

(1) $\cos 105^\circ$

```
(%i1) float(cos(105/180*%pi));
```

```
(%o1) 0.25881904510252
```

$$(2) \cos 68^\circ \cos 67^\circ - \sin 68^\circ \sin 67^\circ$$

```
(%i2) float(cos(68/180*%pi)*cos(67/180*%pi)- sin(68/180*%pi)* sin(67/180*%pi));
```

```
(%o2) -0.70710678118655
```

$$(3) \cos(\theta + 30^\circ)\cos(\theta - 30^\circ) - \sin(\theta + 30^\circ)\sin(\theta - 30^\circ)$$

※ 「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

P.179

例題 2：試求下列之值：

$$(1) \sin 15^\circ$$

```
(%i1) float(sin(15/180*%pi));
```

```
(%o1) 0.25881904510252
```

$$(2) \sin 75^\circ$$

```
(%i2) float(sin(75/180*%pi));
```

```
(%o2) 0.96592582628907
```

$$(3) \sin 38^\circ \cos 68^\circ - \cos 38^\circ \sin 68^\circ$$

```
(%i3) float(sin(38/180*%pi)*cos(68/180*%pi)- cos(38/180*%pi)* sin(68/180*%pi));
```

```
(%o3) -0.5
```

$$(4) \sin 138^\circ \cos 87^\circ + \cos 138^\circ \sin 87^\circ$$

```
(%i4) float(sin(138/180*%pi)*cos(87/180*%pi)- cos(138/180*%pi)* sin(87/180*%pi));
```

```
(%o4) 0.77714596145697
```

※ 「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

P.180

隨堂練習：試求下列之值：

(1) $\sin 105^\circ$

```
(%i1) float(sin(105/180*%pi));
```

```
(%o1) 0.96592582628907
```

(2) $\sin 82^\circ \cos 38^\circ - \cos 82^\circ \sin 38^\circ$

```
(%i2) float(sin(82/180*%pi)*cos(38/180*%pi)- cos(82/180*%pi)* sin(38/180*%pi));
```

```
(%o2) 0.694658370459
```

(3) $\sin(\theta - 45^\circ)\cos(\theta + 45^\circ) - \cos(\theta - 45^\circ)\sin(\theta - 45^\circ)$

※ 「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

例題 3：設 α 是第一象限角， β 是第二象限角，且 $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ 、 $\sin \beta = \frac{12}{13}$ ，是分別求 $\sin(\alpha + \beta)$ 、 $\sin(\alpha - \beta)$ 、 $\cos(\alpha + \beta)$ 、 $\cos(\alpha - \beta)$ 的值

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.181

隨堂練習：設 α 是第三象限角， β 是第四象限角，且 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ 、 $\sin \beta = -\frac{7}{25}$ ，是分別求 $\sin(\alpha + \beta)$ 、 $\sin(\alpha - \beta)$ 、 $\cos(\alpha + \beta)$ 、 $\cos(\alpha - \beta)$ 的值

※本題不建議使用 Maxima 解題※

例題 4：兩直角三角形共一邊 \overline{AC} ，且 $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = 1$ ，若 $\angle CAB = \alpha$ 、 $\angle DAC = \beta$ ：

(1) 試求 $\sin \alpha$ 、 $\cos \alpha$ 、 $\sin \beta$ 、 $\cos \beta$

(%i1) $AC = \sqrt{1^2 + 1^2}$;

(%o1) $AC = \sqrt{2}$

(%i2) $AD = \sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2}$;

(%o2) $AD = \sqrt{3}$

$\sin \alpha$

(%i3) $\sin A = 1/\sqrt{2}$;

(%o3) $\sin A = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos \alpha$

(%i4) $\cos A = 1/\sqrt{2}$;

(%o4) $\cos A = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin \beta$

(%i5) $\sin B = 1/\sqrt{3}$;

(%o5) $\sin B = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\cos \beta$

(%i6) $\cos B = \sqrt{2}/\sqrt{3}$;

(%o6) $\cos B = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

(2) 試求 $\sin(\alpha + \beta)$ 之值

(3) 若 $\overline{DE} \perp \overline{AB}$ 交 \overline{AB} 於 E，試求 \overline{DE} 長。

※本題不建議使用 Maxima 解題※

隨堂練習：ABCD 為圓內接四邊形，直徑 $\overline{AB}=25$ ，且 $\overline{AD}=7$ 、 $\overline{BC}=15$ ，若 $\angle DAB=\alpha$ 、 $\angle CAB=\beta$ ：

(1) 試求 $\sin \alpha$ 、 $\cos \alpha$ 、 $\sin \beta$ 、 $\cos \beta$

(2) 試求 $\cos \angle DAC$ 之值

(3) 試求 \overline{CD} 長。

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.182

例題 5：試利用正弦函數的和角公式證明：

$$\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

隨堂練習：試利用餘弦函數的和角公式證明：

$$\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta$$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.183

例題 6：

(1) 試求 $\tan 15^\circ$ 、 $\tan 75^\circ$ 的值

```
(%i1) float(tan(15/180*%pi));
```

```
(%o1) 0.26794919243112
```

```
(%i2) float(tan(75/180*%pi));
```

```
(%o2) 3.732050807568878
```

(2) 設 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 、 $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ ，且 $\tan \alpha = 2$ 、 $\tan \beta = -\frac{1}{3}$ ，試求 $\tan(\alpha + \beta)$ 與角度 $\alpha + \beta$

※ 「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

P.184

隨堂練習：試求下列之值：

(1) $\tan 105^\circ$

```
(%i1) float(tan(105/180*%pi));
```

```
(%o1) -3.732050807568876
```

(2) $\frac{\tan 58^\circ - \tan 28^\circ}{1 - \tan 58^\circ \tan 28^\circ}$

※ 「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

例題 7：

四邊形 ABCH、HCDG、GDEF 皆為正方形，若 $\angle FBE = \alpha$ 、 $\angle FCE = \beta$ 、 $\angle FDE = \gamma$ ，試求下列之值：

(1) $\tan \alpha$ 、 $\tan \beta$ 、 $\tan \gamma$

(2) $\tan(\alpha + \beta)$

(3) $\alpha + \beta + \gamma$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.185

隨堂練習： $\triangle ABC$ 與 $\triangle ECD$ 為直角三角形，且 B、C、D 三點共線，若 $\overline{AB} = 1$ 、 $\overline{BC} = 3$ 、 $\overline{CD} = 3$ 、 $\overline{DE} = 4$ ， $\angle ACB = \alpha$ 、 $\angle ECD = \beta$ ，試求下列之值

(1) $\tan(\alpha + \beta)$

(2) $\tan \angle ACE$ 與 $\sin \angle ACE$

(3) $\triangle ACE$ 的面積

※本題不建議使用 Maxima 解題※

例題 8： $\triangle ABC$ 不為直角三角形，試證： $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

隨堂練習： $\triangle ABC$ 中，試證： $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} = 1$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.186 **習題 3-2**

1. 觀念題：對的在題號前打○，錯的在題號前打×

___ (1) 若 $\sin(\alpha + \beta) = 0$ ，則 $\tan(\alpha + \beta) = 0$ 。

___ (2) 若 $\cos(\alpha + \beta) = 0$ ，則 $\tan(\alpha + \beta) = 0$ 。

___ (3) 若 $\tan(\alpha + \beta)$ 無意義，則 $\alpha + \beta = n\pi + \frac{\pi}{2}$ ，其中 n 為整數。

又若下列各三角函數皆有意義，試判斷下列各式的真偽

___ (4) $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ 。

___ (5) $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$ 。

___ (6) $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ 。

___ (7) $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ 。

___ (8) $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$

___ (9) $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

2. 試求下列之值：

(1) $\sin(60^\circ + \theta) \cos(60^\circ - \theta) + \cos(60^\circ + \theta) \sin(60^\circ - \theta)$

(2) $\sin 37.5^\circ \cos 82.5^\circ + \cos 37.5^\circ \sin 82.5^\circ$

(3) $\cos \frac{17\pi}{24} \cos \frac{13\pi}{24} + \sin \frac{17\pi}{24} \sin \frac{13\pi}{24}$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

3. 設 α 是第一象限角， β 是第四象限角，且 $\tan \alpha = 2$ 、 $\tan \beta = -3$ ，試分別求 $\sin(\alpha - \beta)$ 、 $\cos(\alpha - \beta)$ 、 $\tan(\alpha - \beta)$ 的值

※本題不建議使用 Maxima 解題※

4. $\triangle ABC$ 中，若 $\cos A = \frac{2}{\sqrt{5}}$ 、 $\cos B = \frac{3}{\sqrt{10}}$ ，試求：

- (1) $\cos C$ 的值
- (2) $\angle C$ 的度數

※本題不建議使用 Maxima 解題※

5. $ABCD$ 為圓內接四邊形，直徑 $\overline{AC} = 25$ ，且 $\overline{AD} = 7$ 、 $\overline{CD} = 15$ ，若 $\angle DAC = \alpha$ 、 $\angle BAC = \beta$

- (1) 試求 $\sin \alpha$ 、 $\cos \alpha$ 、 $\sin \beta$ 、 $\cos \beta$ 之值
- (2) 試求 $\cos(\alpha + \beta)$ 之值
- (3) 試求 \overline{BD} 長

※本題不建議使用 Maxima 解題※

6. 已知 $\sin \alpha - \sin \beta = \frac{9}{\sqrt{25}}$ 、 $\cos \alpha - \cos \beta = -\frac{13}{25}$ ，試求 $\cos(\alpha - \beta)$ 之值

※本題不建議使用 Maxima 解題※

7. 每一小方格皆是邊長為一的正方形，若 $\angle BCA = \alpha$ 、 $\angle DCE = \beta$ ，試求下列之值：

- (1) $\tan(\alpha + \beta)$
- (2) $\tan \angle ACE$ 與 $\sin \angle ACE$
- (3) $\triangle ACE$ 的面積

※本題不建議使用 Maxima 解題※

8. 利用正切函數的和角公式

- (1) 若 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ ，試求 $(1 + \tan \alpha)(1 + \tan \beta)$
- (2) 試求 $\tan 55^\circ \tan 80^\circ - \tan 55^\circ - \tan 80^\circ$

```
(%i1) float(tan(55/180*%pi)*tan(80/180*%pi)- tan(55/180*%pi)-tan(80/180*%pi));
```

```
(%o1) 1.0
```

※ 「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

3-3 倍角公式與半角公式

P.189

例題 1：設 θ 為銳角，且 $\sin \theta = \frac{3}{5}$ ，試求 $\sin 2\theta$ 、 $\cos 2\theta$ 與 $\tan 2\theta$ 之值：

※本題不建議使用 Maxima 解題※

隨堂練習：設 θ 為第二象限角，且 $\cos \theta = \frac{12}{13}$ ，試求 $\sin 2\theta$ 、 $\cos 2\theta$ 與 $\tan 2\theta$ 之值：

※本題不建議使用 Maxima 解題※

例題 2：

(1) 試證： $(\sin \theta + \cos \theta)^2 = 1 + \sin 2\theta$

(2) 設 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{7}{17}$ ，試求 $\sin 2\theta$ 之值：

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.190

隨堂練習：

(1) 試證： $(\sin \theta - \cos \theta)^2 = 1 - \sin 2\theta$

(2) 設 $\sin \theta - \cos \theta = \frac{17}{25}$ ，試求 $\sin 2\theta$ 之值：

※本題不建議使用 Maxima 解題※

例題 3：三個直角三角形堆疊而成的圖形，且 $\overline{OD} = 8$ ， $\angle DOC = 30^\circ$ ， $\angle COB = \angle BOA = 15^\circ$ ，試求 \overline{AB} 長

※本題不建議使用 Maxima 解題※

隨堂練習：三個直角三角形堆疊而成的圖形，且 $\overline{OD}=8$ ， $\angle DOC=45^\circ$ ， $\angle COB=\angle BOA=22.5^\circ$ ，試求 \overline{AB} 長

※本題不建議使用 Maxima 解題※

例題 4：對任意角 θ ， $\theta \neq n\pi + \frac{\pi}{2}$ ， n 為整數，試證： $\sin 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta}$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.191

隨堂練習：對任意角 θ ， $\theta \neq n\pi + \frac{\pi}{2}$ ， n 為整數，試證： $\cos 2\theta = \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta}$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.192

例題 5：

(1) 試求 $\sin 22.5^\circ$ 、 $\cos 22.5^\circ$ 與 $\tan 22.5^\circ$ 的值

```
(%i1) float(sin(22.5/180*%pi));
```

```
(%o1) 0.38268343236509
```

```
(%i2) float(cos(22.5/180*%pi));
```

```
(%o2) 0.92387953251129
```

```
(%i3) float(tan(22.5/180*%pi));
```

```
(%o3) 0.4142135623731
```

(2) 已知 $\pi < \theta < 2\pi$ ，且 $\cos \theta = \frac{3}{5}$ ，試求 $\sin \frac{\theta}{2}$ 、 $\cos \frac{\theta}{2}$ 與 $\tan \frac{\theta}{2}$ 的值

※「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

隨堂練習：已知 $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$ ，且 $\sin 2\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ，試求 $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ 與 $\tan \theta$ 的值

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.193

例題 6：若角 θ ， $\theta \neq (2n+1)\pi$ ， n 為整數，試證： $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

隨堂練習：已利用例題 6 求 $\tan 22.5^\circ$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.194 **習題 3-3**

1. 觀念題：對的在題號前打○，錯的在題號前打×

___ (1) 若 θ 為第二象限角，則 $\frac{\theta}{2}$ 必為第一象限角。

___ (2) $\sin 36^\circ = 2 \sin 18^\circ$ 。

___ (3) $\cos 54^\circ = 3 \cos 18^\circ$ 。

___ (4) $\tan 72^\circ = \frac{2 \tan 36^\circ}{1 + \tan^2 36^\circ}$ 。

又若下列各三角函數皆有意義，試判斷下列各式的真偽

___ (5) $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta}$ 。

___ (6) $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta = \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta}$ 。

___ (7) $\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$ 。

___ (8) $\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2}$

___ (9) $\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2}$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

2. 試求下列各式之值：

(1) $\tan \frac{\pi}{8} + \cot \frac{\pi}{8}$

(%i1) float(tan(%pi/8)+cot(%pi/8));

(%o1) 2.82842712474619

(2) $\cos^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8}$

(%i2) float((cos(3*%pi/8))^2+sin((3*%pi/8))^2);

(%o2) 1.0

$$(3) \frac{2 \tan \frac{5\pi}{8}}{1 - \tan^2 \frac{5\pi}{8}}$$

(%i3) float((2*tan(5*%pi/8))/(1-(tan (5*%pi/8)^2)));

(%o3) 1.0

$$(4) \sin^4 \frac{7\pi}{8} + \cos^4 \frac{7\pi}{8}$$

(%i3) float((sin(7*%pi/8))^4+cos((7*%pi/8))^4);

(%o3) 0.75

3. 設 $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ ，且 $\cos \theta = \frac{7}{25}$

(1) 求 $\sin 2\theta$ 、 $\cos 2\theta$ 、 $\tan 2\theta$ 的值

(2) 求 $\sin \frac{\theta}{2}$ 、 $\cos \frac{\theta}{2}$ 、 $\tan \frac{\theta}{2}$ 的值

※本題不建議使用 Maxima 解題※

4.

(1) 若角 $\theta \neq n\pi$ ， n 為整數，試證： $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta}$

(2) 利用(1)，求 $\tan 15^\circ$ 的值

※本題不建議使用 Maxima 解題※

5. $\triangle ABC$ 為直角三角形，且 $\overline{CD} = \overline{AD}$ ，試利用此圖形：

(1) 令 $\theta = 30^\circ$ ，求 $\sin 15^\circ$ 的值

(2) 令 $\theta = 45^\circ$ ，求 $\tan 22.5^\circ$ 的值

※本題不建議使用 Maxima 解題※

6. 設 θ 為銳角，且 $\sin \theta - \cos \theta = -\frac{1}{5}$ ，試求：

(1) $\sin 2\theta$

(2) $\sin \theta + \cos \theta$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

7. 設 $\sin \theta$ 為 $13x^2 - 21x - 10 = 0$ 的一根，求 $\cos 2\theta$ 之值

※本題不建議使用 Maxima 解題※

8. 設 $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ 為 $x^2 + px + q = 0$ 的二根，試以 p 、 q 表示

※本題不建議使用 Maxima 解題※

9. 利用和角公式並配合二倍角公式，導出正弦函數及餘弦函數的三倍角公式：

(1) $\sin 3\theta = 3\sin \theta - 4\sin^3 \theta$

(2) $\cos 3\theta = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

3-4 積與和差的互化

P.197

例題 1：試求下列各式之值：

(1) $\sin 37.5^\circ \cos 7.5^\circ$

(%i1) float(sin(37.5/180*%pi)*cos(7.5/180*%pi));

(%o1) 0.60355339059327

(2) $\sin 82.5^\circ \sin 52.5^\circ$

(%i2) float(sin(82.5/180*%pi)*sin(52.5/180*%pi));

(%o2) 0.78656609248549

※ 「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

隨堂練習：試求下列各式之值：

(1) $\cos 70^\circ \sin 20^\circ + \cos 50^\circ \cos 10^\circ$

(%i1) float(cos(70/180*%pi)*sin(20/180*%pi)+ cos(50/180*%pi)*cos(10/180*%pi));

(%o1) 0.75

(2) $\sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{15} + \sin \frac{3\pi}{10} \cos \frac{11\pi}{30}$

(%i2) float(sin(%pi/5)*cos(2*%pi/15)+ sin(3*%pi/10)*cos(11*%pi/30));

(%o2) 0.86602540378444

※ 「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

例題 2：試求 $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$ 之值：

(%i1) float(cos(20/180*%pi)*cos(40/180*%pi)*cos(80/180*%pi));

(%o1)0.125

※「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

P.198

隨堂練習：試求 $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ$ 之值：

```
(%i1) float(sin (20/180*%pi)* sin (40/180*%pi)* sin (80/180*%pi));
```

(%o1) 0.21650635094611

※「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

例題 3：房屋外的一棵樹因颱風而傾斜，現欲在窗台與枝幹分叉點之間，用一根木頭 \overline{AB} 加以支撐，若 D 表枝幹分叉點正下方的點，且經測量知 $\overline{BC}=12$ 公尺， $\angle BCD=67.5^\circ$ 、 $\angle BAD=90^\circ$ 、 $\angle DAE=22.5^\circ$ ，試問應找多長的木頭(\overline{AB})來支撐？

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.199

隨堂練習： \overline{AB} 是圓的直徑，且 $\overline{AB}=12$ ，若取 $\angle PAB=52.5^\circ$ 、 $\angle QAB=7.5^\circ$ ，試求 $\triangle APQ$ 之面積：

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.200

例題 4：試求下列各式之值：

$$(1) \frac{\sin \frac{5\pi}{9} + \sin \frac{2\pi}{9}}{\cos \frac{5\pi}{9} - \cos \frac{2\pi}{9}}$$

```
(%i1) float((sin(5*%pi/9)+sin(2*%pi/9))/(cos(5*%pi/9)-(cos(2*%pi/9))));
```



(%o1) -1.732050807568877

(2) $\sin 20^\circ + \sin 40^\circ - \sin 80^\circ$

(%i2) float(sin(20/180*%pi)+sin(40/180*%pi)-sin(80/180*%pi));

(%o2) -1.1102230246251565 10⁻¹⁶

※ 「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

隨堂練習：試求下列各式之值：

$$(1) \frac{\sin \frac{11\pi}{30} - \sin \frac{\pi}{30}}{\cos \frac{11\pi}{30} + \cos \frac{\pi}{30}}$$

(%i1) float((sin(11*%pi/30)+sin(%pi/30))/(cos(11*%pi/30)-(cos(%pi/30))));

(%o1) -1.732050807568878

(2) $\cos 40^\circ + \cos 80^\circ - \cos 160^\circ$

(%i2) float(cos (40/180*%pi)+ cos (80/180*%pi)- cos (160/180*%pi));

(%o2) 1.879385241571817

※ 「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

例題 5：試 $\angle XOY=60^\circ$ 、P 為 $\angle XOY$ 內部一點且 $\overline{AB} \perp \overline{OX}$ 、 $\overline{PB} \perp \overline{OY}$ ，若 $\angle POA = \alpha$ 、

$\angle POB = \beta$

(1) 試以 \overline{OP} 及三角函數表示 \overline{PA} 、 \overline{PB} 、 \overline{OA} 、 \overline{OB}

(2) 試求 $\frac{\overline{PA} + \overline{PB}}{\overline{OA} + \overline{OB}}$ 之值

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.201

隨堂練習： \overline{AB} 是圓的直徑，且 $\overline{AB}=12$ ，若取 $\angle PAB=52.5^\circ$ 、 $\angle QAB=7.5^\circ$ ，試求 $\frac{\overline{AP}+\overline{AQ}}{\overline{BP}+\overline{BQ}}$

的比值

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.202 **習題 3-4**

1. 觀念題：對的在題號前打○，錯的在題號前打×

___ (1) $2\sin 55^\circ \cos 25^\circ = \sin 40^\circ + \sin 15^\circ$

___ (2) $\cos 55^\circ - \cos 25^\circ = 2\sin 40^\circ \sin 15^\circ$ 。

又若 α 、 β 為任意角，試判斷下列各式的真偽

___ (3) $2\sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$ 。

___ (4) $2\cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$ 。

___ (5) $2\cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$ 。

___ (6) $2\sin \alpha \sin \beta = -[\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$ 。

___ (7) $\sin \alpha + \cos \beta = 2\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ 。

___ (8) $\sin \alpha - \sin \beta = 2\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$ 。

___ (9) $\cos \alpha + \cos \beta = 2\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ 。

___ (10) $\cos \alpha - \cos \beta = -2\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$ 。

※本題不建議使用 Maxima 解題※

2. 試求下列各式之值

(1) $\sin 50^\circ \cos 20^\circ + \cos 100^\circ \sin 50^\circ - \cos 80^\circ \cos 60^\circ$

```
(%i1)float(sin(50/180*%pi)*cos(20/180*%pi)+cos(100/180*%pi)*sin(50/180*%pi)-cos(80/180*%pi)*cos(60/180*%pi));
```

(%o1) 0.5

(2) $\sin 5^\circ + \sin 55^\circ - \sin 65^\circ$

```
(%i2)float(sin(5/180*%pi) + sin(55/180*%pi)-sin(65/180*%pi));
```

(%o2) 0.0

$$(3) \sin^2 \theta + \sin^2(120^\circ + \theta) + \sin^2(120^\circ - \theta)$$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

$$(4) \log_2 \cos 20^\circ + \log_2 \cos 40^\circ + \log_2 \cos 60^\circ + \log_2 \cos 80^\circ$$

```
(%i4)float(log(cos(20/180*%pi))/log(2)+log(cos(40/180*%pi))/log(2)+log(cos(60/180*%pi))/log(2)+log(cos(80/180*%pi))/log(2));
```

```
(%o4) -4.0
```

※「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

3. 試求下列各式之值

$$(1) \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7}$$

```
(%i1)float(cos(2*%pi/7)*cos(4*%pi/7)*cos(6*%pi/7));
```

```
(%o1) 0.125
```

$$(2) \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$$

(提示： $\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = \frac{2 \sin \frac{\pi}{7} \cdot (\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7})}{2 \sin \frac{\pi}{7}}$)

```
(%i2)float(cos(2*%pi/7)+cos(4*%pi/7)+cos(6*%pi/7));
```

```
(%o2) -0.5
```

※「float(數值)」指令表示將數值轉換為小數。

P.203

4.

$$(1) \text{已知 } \cos 3\theta = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta, \text{ 試證: } \cos \theta \cos(60^\circ + \theta) \cos(60^\circ - \theta) = \frac{1}{4} \cos 3\theta$$



(2)利用(1)，求 $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ$ 的值

※本題不建議使用 Maxima 解題※

5.試證下列各等式

$$(1) \tan(30^\circ + \theta) \tan(30^\circ - \theta) = \frac{2 \cos 2\theta - 1}{2 \cos 2\theta + 1}$$

$$(2) \frac{\sin \theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta}{\cos \theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta} = \tan 2\theta$$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

6.設 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{3}$ 求下列各式之最大值與最小值

$$(1) \sin \alpha \cos \beta$$

$$(2) \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta$$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

7.和差化積是十六世紀法國數學家 Vieta(1594~1603)的傑作之一，試以正弦定理及和

差化積公式，證明 Vieta 的另一傑作---正切定理：設 $\triangle ABC$ 中， $\overline{BC} = a$ ， $\overline{AC} = b$ ，則

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan \frac{A-B}{2}}{\tan \frac{A+B}{2}}$$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

3-5 正餘弦函數之疊合

P.206

例題 1：試將下列各函數化成 $y=r\sin(x+\theta)$ 的形式，其中 $r>0$ ，並說明疊合後的圖形與 $y=\sin x$ 圖形的關係：

(1) $y=\sin x-\cos x$

(2) $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.207

隨堂練習：

(1)試將下列各函數化成 $y=r\sin(x+\theta)$ 的形式，其中 $r>0$ ，並說明其振幅及週期

(a) $y=-\sin x+\sqrt{3}\cos x$

(b) $y=3\sin x-4\cos x$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

(2)在前段正餘弦疊合的說明中，若將點取為 $P(b, a)$ ，且令 θ 為 x 軸正向旋轉到射線 OP 的有向角，則函數 $f(x)=a\sin x+b\cos x$ 也可轉化為以一個餘弦函數來表示，試寫出此函數

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.208

例題 2：試求下列各函數的最大值與最小值

(1) $y=\sin x+\cos x$

(2) $y=5\cos x-12\sin x$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

隨堂練習：試求下列各函數的最大值與最小值

$$(1) y = \sqrt{2} \sin x + \sqrt{2} \cos x$$

$$(2) y = 7 \sin x + 24 \cos x$$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.209

例題 3：試求函數 $y = 2\sqrt{3} \sin x - 2 \cos x + 1$ 在下列範圍內的最大值與最小值，以及發生最大值、最小值時的 x 值

$$(1) 0 \leq x \leq 2\pi$$

$$(2) 0 \leq x \leq \pi$$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.210

隨堂練習：試求函數 $y = \cos(x + \frac{\pi}{6}) + \sin x$ 在下列範圍內的最大值與最小值，以及發生最大值、最小值時的 x 值

大值、最小值時的 x 值

$$(1) 0 \leq x \leq 2\pi$$

$$(2) 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

例題 4：一風景區想仿照鹿港文開書院內的半圓形泮池(泮池在古代皇宮內才可為圓形)，在園區內建一個半徑 50 公尺的半圓形泮池，並預定在泮池上搭建 T 字型的燈籠橋(取燈籠門諧音之意)， O 為此泮池的圓心，且 $\overline{OC} \perp \overline{AB}$ ， \overline{AB} 與池邊平行，試問：



(1) 純就建築長度而言，此燈籠橋全長($\overline{OC} + \overline{AB}$)

(2) 若兩段使用不同的建材及施工方法建築師報價為 \overline{OC} 段每公尺 5000 元， \overline{AB} 段每公尺 6000 元，則就建築費而言，此燈籠橋建造費用最多為多少元？

※本題不建議使用 Maxima 解題※

隨堂練習：扇形 OAB 之圓心角為 $\frac{\pi}{4}$ ，且半徑為 1，P 為 \widehat{AB} 上之動點，若 $\overline{PC} \perp \overline{OA}$ 於 C

點， $\overline{PD} \perp \overline{OB}$ 於 D 點，求四邊形 PCOD 的最大面積

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.212 **習題 3-5**

1. 觀念題：對的在題號前打○，錯的在題號前打×

關於函數 $y = \sin x + \cos x$ 的性質，試判斷下列敘述的真偽

___ (1) $-1 \leq \sin x \leq 1$ ， $-1 \leq \cos x \leq 1$ ，所以函數的最大值為 2，最小值為 -2。

___ (2) 周期為 4π 。

___ (3) 當 $x = \frac{\pi}{4}$ 時， $y = \sqrt{2}$ 為函數的最大值。

___ (4) 當 $x = \frac{5\pi}{4}$ 時， $y = -\sqrt{2}$ 為函數的最小值。

___ (5) 函數圖形可由 $y = \sin x$ 的圖形向右平移 $\frac{\pi}{4}$ ，在上下伸張 $\sqrt{2}$ 倍。

___ (6) 圖形對稱於原點。

※本題不建議使用 Maxima 解題※

2. 將下列各函數疊合成 $y = r \sin(x + \theta)$ 的形式，其中 r, x 為實數且 $r > 0$ ，試求函數的振幅及週期

(1) $y = -7\sin x + 24\cos x$

(2) $y = 8\sin 2x - 15\cos 2x$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

3. 試問描繪函數 $y = \sqrt{3}\sin x - \cos x$ ， $0 \leq x \leq 2\pi$ 的圖形時，其波峰、波谷之座標為合？

※本題不建議使用 Maxima 解題※

4. $0 \leq x \leq 2\pi$ ， $y = 4\sin x - 2\sqrt{3}\sin(x - \frac{\pi}{6})$ ，的最大值與最小值，以及天氣及其發生最大、最小值時的 x 值

※本題不建議使用 Maxima 解題※

5. 設 $x + y = \frac{2}{3}$ ，試求 $\sin x - \sin y$ 的最大值、最小值

※本題不建議使用 Maxima 解題※

6. 試求 $\sin x + \sin(x + \frac{\pi}{3}) + \sin(x + \frac{2\pi}{3})$ 的最大值、最小值

※本題不建議使用 Maxima 解題※

3-6 複數的極式

P.213

隨堂練習：試在複數平面上，標示以下各點：

A : (1)、B : (-3)、C : (2i)、D : (-5i)、E : (1+i)、F : (-2-2i)、G : ($\sqrt{3}-i$)、H : ($-2+2\sqrt{3}i$)

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.215

例題 1：試將下列複數化為極式，並求主幅角

(1) $z=1$

(2) $z=5i$

(3) $z=1+i$

(4) $z=-2+2\sqrt{3}i$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

隨堂練習：試將下列複數化為極式，並求主幅角

(1) $z=-3$

(2) $z=2i$

(3) $z=-2-2i$

(4) $z=\sqrt{3}-i$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.216

例題 2：試將下列複數化為極式，

(1) $z=2(-\cos 50^\circ + i \sin 50^\circ)$

$$(2) z = 2\left(\cos\frac{\pi}{5} - i\sin\frac{\pi}{5}\right)$$

$$(3) z = 2(\sin 50^\circ + i \cos 50^\circ)$$

$$(4) z = 2\left(-\sin\frac{\pi}{5} + i\cos\frac{\pi}{5}\right)$$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.217

隨堂練習：

$$(1) z = 3(-\cos 20^\circ - i \sin 20^\circ)$$

$$(2) z = 3\left(\cos\frac{2\pi}{5} - i\sin\frac{2\pi}{5}\right)$$

$$(3) z = 3(\sin 20^\circ - i \cos 20^\circ)$$

$$(4) z = 2\left(-\sin\frac{2\pi}{5} + i\cos\frac{2\pi}{5}\right)$$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.218

例題 3：

$$(1) \text{ 設 } z_1 = -\sqrt{3} + i, z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i, z_3 = 1 + i, \text{ 試求複數 } z_1 \cdot z_2 \text{ 與 } z_1 \cdot z_3 \text{ 的極式}$$

$$(2) \text{ 承上，試在複數平面上標示點 } P(z_1), Q(z_1 \cdot z_2), R(z_1 \cdot z_3)$$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.219

隨堂練習：若複數 z 在複數平面上對應的點 P 為單位圓 O 上的一點，則 $z \cdot (-1 - \sqrt{3})$ 在複數平面上對應的點最有可能是哪一點？

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.220**例題 4：**

(1) 設 $z_1 = -\sqrt{3} + i$ 、 $z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$ 、 $z_3 = 1 + i$ ，試求複數 $\frac{z_1}{z_2}$ 與 $\frac{z_1}{z_3}$ 的極式

(2) 承上，試在複數平面上標示點 $P(z_1)$ 、 $M(\frac{z_1}{z_2})$ 、 $N(\frac{z_1}{z_3})$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.221

隨堂練習：若複數 z 在複數平面上對應的點 P 為單位圓 O 上的一點，則 $z \div (-1 - \sqrt{3})$ 在複數平面上對應的點最有可能是哪一點？

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.222**例題 5：**試求下列各式的值

(1) $(1+i)^{20}$

```
(%i1) ratsimp((1+%i)^20);
```

```
(%o1) -1024
```

(2) $(1 - \sqrt{3}i)^{10}$

```
(%i2) ratsimp((1-sqrt(3)*%i)^10);
```

```
(%o2) 512*sqrt(3)*%i-512
```

※「ratsimp([算式] × [算式])」指令表示化簡算式。

P.223**隨堂練習：**

(1) 試求下列各式的值

(a) $(\sqrt{3}+i)^5$

(%i1) ratsimp((sqrt(3)+%i)^5);

(%o1) 16%i-16 $\sqrt{3}$

(b) $(\frac{1-i}{\sqrt{2}})^{10}$

(%i2) ratsimp(((1-*%i)/ sqrt(2))^10);

(%o2) -%i

(2) 若複數 $z=r(\cos \theta -i \sin \theta)$ ， $r > 0$ 且 n 為正整數，試證： $z^n=r^n(\cos n \theta -i \sin n \theta)$

※ 「ratsimp ([算式] × [算式])」指令表示化簡算式。

P.223

例題 6：試求 $(\frac{\sqrt{3}-i}{2})^{-5}$ 的值

(%i1) ratsimp(((sqrt(3)-%i)/2)^-5);

(%o1) $-\frac{2}{%i+\sqrt{3}}$

※ 「ratsimp ([算式] × [算式])」指令表示化簡算式。

P.223

隨堂練習：試求 $(-1+\sqrt{3}i)^{-6}$ 的值

(%i1) ratsimp((-1+(sqrt(3)*%i))^5);

(%o1) -16 $\sqrt{3}$ %i-16

P.227

例題 7：

- (1)寫出 1 的所有 8 次方根
- (2)將 1 的所有 8 次方根標示於複數平面上，並將各對應點連接成多邊形

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.228

隨堂練習：

- (1)寫出 1 的所有 5 次方根
- (2)將 1 的所有 5 次方根標示於複數平面上，並將各對應點連接成多邊形

※本題不建議使用 Maxima 解題※

例題 8：試求 $2+2\sqrt{3}i$ 的平方根

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.229

隨堂練習：試求 $-8-8\sqrt{3}i$ 的平方根

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.230

例題 9：試求 $32+32\sqrt{3}i$ 的六次方根

※本題不建議使用 Maxima 解題※

隨堂練習：試求 $-8-8\sqrt{3}i$ 的四次方根

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.231

例題 10：在極座標平面上標示下列各點： $A\left[1, \frac{\pi}{4}\right]$ 、 $B\left[2, \frac{5\pi}{6}\right]$ 、 $C\left[3, \frac{2\pi}{3}\right]$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.232

隨堂練習：

(1)試在極座標平面上標示下列各點： $P\left[2, \frac{2\pi}{3}\right]$ 、 $Q\left[3, \frac{5\pi}{4}\right]$ 、 $R\left[1, -\frac{\pi}{6}\right]$

(2)極座標平面上，O 為極點，若 $\triangle OAB$ 為正三角形，且 $A[5, 37^\circ]$ ，求 B 點極座標

※本題不建議使用 Maxima 解題※

例題 11：試在極座標圖上標出極座標： $A\left[2, \frac{5\pi}{6}\right]$ 、 $B\left[3, -\frac{\pi}{2}\right]$ 兩點

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.232

隨堂練習：在極座標圖上標出極座標： $P\left[1, \frac{\pi}{6}\right]$ 、 $Q\left[3, \frac{11\pi}{6}\right]$ 兩點

例題 12：

(1)求直角坐標 $P(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ 、 $Q(-1, -\sqrt{3})$ 的極座標

(2)求極座標 $A\left[2, \frac{5\pi}{6}\right]$ 、 $B\left[3, -\frac{\pi}{2}\right]$ 的直角坐標

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.232**隨堂練習：**

(1) 求極座標 $P\left[1, \frac{\pi}{6}\right]$ 、 $Q\left[3, \frac{11\pi}{6}\right]$ 的直角坐標

(2) 求直角坐標 $R(-2, 0)$ 、 $S(2\sqrt{3}, -2)$ 的極座標

※本題不建議使用 Maxima 解題※

例題 13：若極座標 $A\left[2, \frac{5\pi}{6}\right]$ 、 $B\left[3, -\frac{\pi}{2}\right]$ ，試求 A、B 兩點的距離

※本題不建議使用 Maxima 解題※

隨堂練習：若極座標 $P\left[1, \frac{\pi}{6}\right]$ 、 $Q\left[3, \frac{11\pi}{6}\right]$ ，試求 P、Q 兩點的距離

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P.235 **習題 3-6**

1. 觀念題：對的在題號前打○，錯的在題號前打×

n 為自然數則

___ (1) 複數 $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ，其極式為 $z = \cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}$ 。

___ (2) $\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} = \left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right)^k, k \in Z$ 。

___ (3) 若 $\omega = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ ，則 $\omega^n = 1$ 。

___ (4) 若 $\omega = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ ，且 $z^n - 1 = (z-1)(z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z + 1)$

，則 $\omega^{n-1} + \omega^{n-2} + \dots + \omega + 1 = 0$ 。

___ (5) 若 $\omega = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ ，則 $z^n = 1$ 的 n 的根為 $1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$ 。

___ (6) 1 的 n 個 n 次方根在複數平面上的對應點將單位圓 n 等分。

___ (7) 極座標為 $[r, \theta]$ 的點，其直角座標為 $(r \sin \theta, r \cos \theta)$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

2. 若複數 z 與 $\sqrt{3} + i$ 的乘積為 $-2\sqrt{3} + 2i$ ，求

(1) z 的極式

(2) $|z|$

(3) $\text{Arg}(z)$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

3. 化簡下列各式

(1) $\frac{1 + i \tan \frac{\pi}{12}}{1 - i \tan \frac{\pi}{12}}$

(2) $\frac{(\cos 6^\circ + i \sin 6^\circ)^8 (\cos 25^\circ + i \sin 25^\circ)^4}{(\cos 4^\circ + i \sin 4^\circ)}$

(3) $(1+i)^{10}$

```
(%i1) ratsimp((1+%i)^10);
```

```
(%o1) 32%i
```

(4) $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+\sqrt{3}i}\right)^{10}$

```
(%i2) ratsimp(((sqrt(3)-%i)/(1+sqrt(3)*%i))^10);
```

```
(%o2) -1
```

※ 「ratsimp([算式] × [算式])」指令表示化簡算式。

4. $\triangle OAB$ 為正三角形，若 A 點是複數 z 的對應點，B 點是複數 $1+i$ 的對應點，試求複數 z

※本題不建議使用 Maxima 解題※

5. 試求下列的平方根

(1) $3-4i$

(2) i

※本題不建議使用 Maxima 解題※

6.

(1) 寫出 1 所有的六次方根

(2) 將(1)的所有六次方根標示於複數平面上，並將各對應點連接成多邊形

(3) 承(2)，求此多邊形的面積

※本題不建議使用 Maxima 解題※

7. 已知平面上直角座標系與極座標系的原點重合，且極軸恰為 x 軸的正向，

(1) 直角坐標為 $(-\sqrt{3}, 1)$ 的點，其極座標為何？

(2) 極座標為 $\left[2, \frac{5\pi}{4}\right]$ 的點，其直角坐標為何？

※本題不建議使用 Maxima 解題※

8. 在極座標系上，若 A、B 兩地的極座標為 $A\left[3, \frac{\pi}{3}\right]$ 、 $B[4, \pi]$ ，求 A、兩地的距離

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P. 237**綜合練習**

1. 交流電是隨時間而改變方向的電流，其電流強度呈現出正弦函數的特性，若右圖表電流強度 I (安培) 隨著時間 t (秒) 變化的函數： $I = a \sin(bt+c)$ ， $a, b > 0$ ；試求：

- (1) 此函數的振幅 a
- (2) 此函數的週期與 b
- (3) 當 $t = \frac{7}{144}$ 秒時的電流強度

※本題不建議使用 Maxima 解題※

2. 鉛球比賽是在直徑為 7 呎(為 2.135 公尺)的投擲圈內進行，並規定鉛球推出後必須落在 40 度角的落地區域內，才算有效投擲，已知西元 2005 年時，鉛球的世界紀錄為 75.8 呎(為 23.12 公尺)，若以預估最遠推 80 呎來規劃落地區域，試問此落地區域佔地面積為多少平方呎？

※本題不建議使用 Maxima 解題※

3. 右圖為函數 $y = 1 + \cos x$ 在 $0 \leq x \leq \pi$ 的圖形，試求圖形與 x 軸、 y 軸所圍的區域面積(提示：圖形對稱於 $(\frac{\pi}{2}, 1)$)

※本題不建議使用 Maxima 解題※

4. 如右圖，平面上兩個直角三角形共斜邊 \overline{AC} ，且知 $\overline{AB} = 24$ 、 $\overline{AC} = 25$ 、 $\overline{AD} = 20$ ，試求：

- (1) $\angle \sin BAD$
- (2) $\triangle ABD$ 的面積

※本題不建議使用 Maxima 解題※

P. 238

5. 六個邊長為 1 公分的小正方形，排列成如右之圖形，若 $\angle PAB = \alpha$ ， $\angle QAD = \beta$ ，試求：

- (1) $\alpha + \beta$
- (2) $\angle PAQ$
- (3) $\triangle PAQ$ 的面積

※本題不建議使用 Maxima 解題※

6. 化簡下列各式：

$$(1) \sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \sin^2 \frac{7\pi}{8}$$

$$(2) \frac{\sin 3\theta - \sin^3 \theta}{\sin \theta} - \frac{\cos 3\theta + \cos^3 \theta}{\cos \theta}, \text{ 其中 } \theta \text{ 不為象限角 (已知 } \sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta、$$

$$\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)$$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

7. 下圖的波動為兩個頻率相差頗大的正弦波的乘積： $y = 2 \sin x \cdot \sin 20x$ ，事實上任何一種形狀的波形都可由不同頻率的正弦波疊合而成，若此波動可視為

$$y = \sin\left(ax + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(bx + \frac{\pi}{2}\right), \text{ 試求正數 } a、b \text{ 之值}$$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

8.

$$(1) \text{ 已知 } \sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta, \text{ 試證：} \sin \theta \sin(60^\circ + \theta) \sin(60^\circ - \theta) = \frac{1}{4} \sin 3\theta$$

$$(2) \text{ 利用(1)，求 } \sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ \text{ 與 } \sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ$$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

9. x 為實數， m 、 n 為正數，若函數 $f(x) = 5\sin x + m\cos x + n$ 的最大值為 26，最小值為 0，試求 m 、 n 之值。

※本題不建議使用 Maxima 解題※

10. 如右圖， \overline{AB} 為半圓的直徑， $\overline{AB} = 10$ ， P 為半圓弧上的一動點，試求：

(1) $3\overline{PA} + 4\overline{PB}$ 的最大值

(2) $\triangle PAB$ 面積的最大值

※本題不建議使用 Maxima 解題※

11. 化簡下列各式：

$$(1) \frac{(\cos 18^\circ + i \sin 18^\circ)^3 (\cos 36^\circ + i \sin 36^\circ)^2}{\cos 54^\circ - i \sin 54^\circ}$$

$$(2) \left(\frac{-\sqrt{3} + i}{1 + i} \right)$$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

12. 若 $z^3 = i$ 的三根在複數平面上的對應點為 A 、 B 、 C ，試求：

(1) \overline{AB} 的長

(2) $\triangle ABC$ 的周長

(3) $\triangle ABC$ 的面積

※本題不建議使用 Maxima 解題※