

## 高中數學與MAXIMA：

以下將依據教育部審核教科書內容，以MAXIMA軟體解答例題、隨堂練習及自我評量以供高中生參考

### 高一上數學

-目次-

#### 第一章 數與坐標

1-1 整數

1-2 有理數與實數

1-3 平面坐標系

1-4 複數與複數平面

#### 第二章 數列與級數

2-1 等差級數與等比級數

2-2 無窮等比級數與循環小數

2-3 數學歸納法

#### 第三章 多項式

3-1 多項式的四則運算

3-2 餘式定理、因式定理

3-3 最高公因式與最低公倍式

3-4 多項函數

3-5 多項方程式

3-6 多項不等式

## MAXIMA 指令簡介

- ※ 「factor( 數值 )」指令表示求因式分解。
- ※ 「primep( 數值 )」指令表示求是否為質數。
- ※ 「gcd( 數值,數值 )」指令表示求最大公因數。
- ※ 「lcm( 數值,數值 )」指令表示求最小公倍數。
- ※ 「load (functs)」指令表示先讀取此 function(函數)。
- ※ 「float( 數值 )」指令表示將結果轉換為小數。
- ※ 「abs( 數值 )」指令表示絕對值。
- ※ 「solve([ 變數算式 ],[ 變數 ])」指令表示求解。
- ※ 「sqrt ( 數值 )」指令表示數值開根號。
- ※ 「divisors ( 數值 )」指令表示求出數值之因數。
- ※ 「quotient ( 被除數,除數 )」指令表示求商。
- ※ 「remainder ( 被除數,除數 )」指令表示求餘數。
- ※ 「imagpart( 數值 )」指令表示找出數值虛部係數
- ※ 「realpart( 數值 )」指令表示找出數值實部係數
- ※ 「conjugate (數值)」指令表示列出複數之共軛複數
- ※ 「expand ([ 算式 ] × [ 算式 ])」指令表示展開算式。
- ※ 「ratsimp ([ 算式 ] × [ 算式 ])」指令表示化簡算式。
- ※ 「radcan ([ 算式 ] × [ 算式 ])」指令表示化簡算式。
- ※ 「rootscontract((sqrt 數值)\*(sqrt 數值))」指令執行乘開兩根號數值。
- ※ 「load (fourier\_elim)」指令可執行不等式計算，須先載入。
- ※ 「fourier\_elim([ 變數算式 ],[ 變數 ])([ 變數算式 ],[ 變數 ])」求解不等式。
- ※ 「harmonic (a, b, c, n)」表示分子為 a、分子為  $b+(n-1)*c$ 、n 項之數列； $a/b, a/(b + c), a/(b + 2*c), \dots, a/(b + (n - 1)*c)$

- ※ 「arithmetic (a, d, n)」表示首項為 a、公差為 d、n 項之等差數列； $a, a + d, a + 2*d, \dots, a + (n - 1)*d$ .
- ※ 「geometric (a, r, n)」表示首項為 a、公比為 r、n 項之等差數列； $a, a*r, a*r^2, \dots, a*r^{(n - 1)}$ .
- ※ 「sum(計算式,變數,起始, 結束)」指令表示含變數之算式由起始連加至結束。
- ※ 「rat(數值)」指令將數值轉換成分數形式。
- ※ 「limit (變數算式, 變數, inf)」指令表示算式變數無窮大，算式趨近於數值。

## 第一章 數與坐標

### 1-1 整數

#### P.7

**隨堂練習：**78 除以 5，若以除法原理的型式表示，應為下列哪一個選項？

(1)  $78=5\times 16+(-2)$

(2)  $78=5\times 14+8$

(3)  $78=5\times 15+3$

**※本大題不建議使用 Maxima 解題※**

**例題 1：**設  $a$  為正整數

(1) 試問： $a$  被 2 除的餘數為何？

(2) 若  $a^2$  是奇數，請問  $a$  是奇數嗎？

(3) 當  $a$  為正奇數時，請問  $a^2$  被 4 除所得的餘數為何？

**※本題不建議使用 Maxima 解題※**

#### P.8

**隨堂練習：**任意正偶數的平方被 4 除，所得的餘數為何？

**※本題不建議使用 Maxima 解題※**

**例題 2：**設二正整數  $x$  與  $y$  除以 7 的餘數分別為 2 與 4，

(1) 試將  $x$  除以 7 及  $y$  除以 7，以除法原理的形式表示

(2) 求  $x + y$  除以 7 之後的餘數

(3) 求  $xy$  除以 7 之後的餘數

**※本大題不建議使用 Maxima 解題※**

**P.9**

**隨堂練習：**設二正整數  $x, y$  除以 11 的餘數分別為 6 與 8，則

(1) 試將  $x$  除以 11 及  $y$  除以 11，以除法原理的形式表示

(2) 求  $x + y$  除以 11 之後的餘數

(3) 求  $xy$  除以 11 之後的餘數

**※本大題不建議使用 Maxima 解題※**

**例題 3：**求 12 與 -12 的因數

(1) 12 的因數

方法 1

(%i1) factor(12);

(%o1)  $2^2 3$

\*1, -1 為任一數之因數，故 12 的因數有 1, -1, 2, -2,  $2 \times 2$ ,  $-(2 \times 2)$ ,  $2 \times 3$ ,  $-(2 \times 3)$ ,  $2 \times 2 \times 3$ ,  $-(2 \times 2 \times 3)$  [ $1 \times 12 = 2 \times 6 = 3 \times 4 = -1 \times -12 = -2 \times -6 = -3 \times -4$ ];

方法 2

(%i1) divisors(12);

(%o1) {1, 2, 3, 4, 6, 12}

\*12 的正因數有 1, 2, 3, 4, 6, 12，負因數為 -1, -2, -3, -4, -6, -12

(2) -12 的因數

方法 1

(%i1) factor(-12);

(%o1)  $-2^2 3$

\*1 與本身皆為自己的因數，故-12 的因數有 1,-1, 2,-2, 2×2, -(2×2), 2×3, -(2×3), 2×2×3, -(2×2×3) [1×-12=2×-6=3×-4=-1×12=-2×6=-3×4]；

### 方法 2

(%i1) divisors(-12);

(%o1) {1,2,3,4,6,12}

\*12 的正因數有 1,2,3,4,6,12，負因數為-1,-2,-3,-4,-6,-12

**\*若 a 為整數，則 a 與-a 的因數完全相同。**

※「factor(數值)」指令表示求該數值之因式分解。

※「divisors(數值)」指令表示求出該數值之因數。

## P.10

### 例題 4：

(1)設 a,b 為正整數，且 a 小於 11，則滿足  $a \mid b$  且  $b \mid 21$  的 a 值可能是多少？

### 方法 1

(%i1) factor(21);

(%o1) 3 7

\*1 與本身皆為自己的因數，a 為 21 的正因數，由上式可知 21 的因數為 1,3,7,21，且 a 小於 11，故可知 a 可能為 1,3,7。

### 方法 2

(%i1) divisors(21);

(%o1) {1,3,7,21}

\*由上式可知 21 的因數為 1,3,7,21，且 a 小於 11，故可知 a 可能為 1,3,7。

(2)a 為正整數，若  $a \mid (3a+4)$  且  $a \mid (2a+6)$ ，求 a 值。

(%i1) ratsimp((3\*a+4)\*2-(2\*a+6)\*3);

(%o1) 10

(%i2) divisors(10);

(%o2) {1,2,5,10}

(%i3) 3\*(1)+4;

(%o3) 7

(%i4) divisors(7);

(%o4) {1,7}

(%i5) 2\*(1)+6;

(%o5) 8

(%i6) divisors(8);

(%o6) {1,2,4,8}

(%i7) 3\*(2)+4;

(%o7) 10

(%i8) divisors(10);

(%o8) {1,2,5,10}

(%i7) 2\*(2)+6;

(%o7) 10

(%i9) divisors(10);

(%o9) {1,2,5,10}

(%i10) 3\*(5)+4;

(%o10) 19

(%i11) divisors(19);

(%o11) {1,19}

(%i12) 2\*(5)+6;

(%o12) 16

(%i13) divisors(16);

(%o13) {1,2,4,8,16}

(%i14) 3\*(10)+4;

(%o14) 34

(%i15) divisors(34);

(%o15) {1,2,17,34}

(%i16) 2\*(10)+6;

(%o16) 26

(%i17) divisors(26);

(%o17) {1,2,13,26}

**\*若  $a \mid b$  且  $a \mid c$ ，則  $a \mid (mb+nc)$  -  $m、n$  為任意整數**

\*由上式可知  $a \mid 10$  為{1,2,5,10}，將 1,2,5,10 帶入  $a \mid (3a+4)$ 與  $a \mid (2a+6)$ 檢驗，可知  $a$  為 1、2。

※「factor(數值)」指令表示求該數值之因式分解。

※「divisors(數值)」指令表示求出該數值之因數。

※「ratsimp([算式]×[算式])」指令表示化簡算式。

※「divisors(數值)」指令表示求出該數值之因數。

## P.11

**隨堂練習：**設  $a$  是正整數，已知  $a \mid (5a+4)$ ，求  $a$  之值

方法 1



(%i1) f(a):=5\*a+4;

(%o1) f(a):=5a+4;

(%i2) f(1);

(%o2) 9

(%i3) f(2);

(%o3) 14

(%i4) factor(14);

(%o4) 2 7

(%i5) f(3);

(%o5) 19

(%i6) factor(19);

(%o6) 19

(%i7) f(4);

(%o7) 24

(%i8) factor(24);

(%o8) 2<sup>3</sup> 3

(%i9) f(5);

(%o9) 29

(%i10) factor(29);

(%o10) 29

(%i11) f(6);

(%o11) 34

(%i12) factor(34);

(%o12) 2 17

(%i13) f(7);

(%o13) 39

(%i14) factor(39);

(%o14) 3 13

(%i15) f(8);

(%o15) 44

(%i16) factor(44);

(%o16) 2<sup>2</sup> 11

(%i17) f(9);

(%o17) 49

(%i18) factor(49);

(%o18) 7<sup>2</sup>

(%i17) f(10);

(%o17) 54

(%i18) factor(54);

(%o18) 2 3<sup>3</sup>

(%i17) f(11);

(%o17) 59

(%i18) factor(59);

(%o18) 59

...(同理)

\* a 值為 1,2,4

方法 2

(%i1) divisors(4);



(%o1) {1,2,4}

\*  $a \mid b$  且  $a \mid c$ ，則  $a \mid (mb+nc)$ -其中  $m$ 、 $n$  為任意整數

\* 本題已知  $a \mid 5a+4$ ，反推可知  $a \mid 5a$  且  $a \mid 4$ ，考慮  $a \mid 4$ ，得知  $a$  值可為 1,2,4

※  $f(x):=ax+b$ ; 定義函數：須以”:=”定義； 定義後只需輸入  $f(x)$ 之  $x$  數值即可求得

結果。

※ 「factor(數值)」指令表示求該數值之因式分解。

※ 「divisors(數值)」指令表示求出該數值之因數。

## P.12

**例題 5**：試將 350 化為標準分解式，並寫出該數的所有質因數

(%i1) factor(350);

(%o1)  $2^2 5^2 7$

\*  $a$  質因數為 2,5,7

\* ※ 「factor( 數值 )」指令表示求因式分解。

**隨堂練習**：試將 1540 化為標準分解式，並寫出該數的所有質因數

(%i1) factor(1540);

(%o1)  $2^2 5 7 11$

\*  $a$  質因數為 2,5,7,11

\* ※ 「factor( 數值 )」指令表示求因式分解。

## P.13

**例題 6**：試找出 1~100 間的質數

(%i1) for i:1 thru 100 do (if primep(i)=true then print(i));

2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67,71,73,79,83,89,97

(%o1) done

**\* i:1 thru 100 ( i 範圍為 1~100) ; if primep(i)=true ( 如果 i 判斷後是質數) ; print(i)**

**(列出 i)**

## P.15

**例題 7**：據西元 2004 年報導，世界最高建築物為台北 101 金融大樓，請問 101 這個數是否為質數？

### 方法 1

(%i1) factor(101);

(%o1) 101

\*101 無 1 與本身除外之因數，故為質數。

### 方法 2

(%i1) primep(101);

(%o1) true

\*101 是否為質數，答案 true(事實)代表 101 是質數。(若為 false 代表非質數)

※ 「factor( 數值 )」指令表示求因式分解。

※ 「primep( 數值 )」指令表示求是否為質數。

**隨堂練習**：試判斷 401 是否為質數？

### 方法 1

(%i1) factor(401);

(%o1) 401

\*401 無 1 與本身除外之因數，故為質數。

### 方法 2

```
(%i1) primep(401);
```

```
(%o1) true
```

\*401 是否為質數，答案 true(事實)代表 401 是質數。(若為 false 代表非質數)

※ 「factor( 數值 )」指令表示求因式分解。

※ 「primep( 數值 )」指令表示求是否為質數。

## P.16

**隨堂練習：**試判斷下列各數是否為 9 的倍數

(1) 347562

### 方法 1

```
(%i1) factor(347562);
```

```
(%o1) 2 32 19309
```

\*式中  $3^2=9$ ，故本題為 9 的倍數

。

### 方法 2

```
(%i1) 347562/9;
```

```
(%o1) 38618
```

\*式中無分數或小數，代表本題為 9 的倍數

### 方法 3

```
(%i1) remainder(347562,9);
```

```
(%o1) 0
```

\* 餘數為 0(可整除)，代表本題為 9 的倍數

(2) 1000001

方法 1

(%i1) factor(1000001);

(%o1) 101 9901

\* 式中無  $3^2$ ，故本題不是 9 的倍數

方法 2

(%i1) 1000001/9;

(%o1)  $\frac{1000001}{9}$

(%i2) float(1000001/9);

(%o2) 111111.2222222222

\* 式中有分數或小數，代表本題不為 9 的倍數

方法 3

(%i1) remainder(1000001,9);

(%o1) 2

\* 餘數為 2(不可整除)，代表本題不為 9 的倍數

(3)  $3^{67}$

方法 1

\* 式中可寫成  $3^2 \times 3^{65}$ ，故本題為 9 的倍數

方法 2

(%i1) 3^67/9;

(%o1) 10301051460877537453973547267843

\* 式中無分數或小數，代表本題為 9 的倍數

### 方法 3

(%i1) remainder(3^67,9);

(%o1) 0

\* 餘數為 0(可整除)，代表本題為 9 的倍數

(4) 3756x2541

### 方法 1

(%i1) factor(3756);

(%o1) 2<sup>2</sup> 3 313

(%i2) factor(2541);

(%o2) 3 7 11<sup>2</sup>

\* 由上可知  $3756 \times 2541 = 2^2 \times 3^2 \times 7 \times 11^2 \times 313$ ，故本題為 9 的倍數

### 方法 2

(%i1) 3756\*2541;

(%o1) 9543996

(%i2) factor(%);

(%o2) 2<sup>2</sup> 3<sup>2</sup> 7 11<sup>2</sup> 313

\* 由上可知  $3756 \times 2541 = 2^2 \times 3^2 \times 7 \times 11^2 \times 313$ ，故本題為 9 的倍數

### 方法 3

(%i1) 3756\*2541/9;

(%o1) 1060444

\* 式中無分數或小數，代表本題為 9 的倍數

#### 方法 4

(%i1) remainder(3756\*2541,9);

(%o1) 0

\* 餘數為 0(可整除)，代表本題為 9 的倍數

※ 「factor( 數值 )」指令表示求因式分解。

※ 「float(數值)」指令表示將結果轉換為小數；括弧內數值可以輸入某一輸入或輸出

指令編號例 float (%o1)。

※ 「remainder ( 被除數,除數 )」指令表示求餘數。

## P.17

**例題 8：**求 84 與 90 的最大公因數

#### 方法 1

(%i1) factor(84);

(%o1) 2<sup>2</sup> 3 7

(%i2) factor(90);

(%o2) 2 3<sup>2</sup> 5

\* 最大公因數為二式**共同質因數**次方最低者相乘，可知 84 與 90 之最大公因數為 6(=2  
×3)

#### 方法 2

(%i1) gcd(84,90);



(%o1) 6

\*84,90 最大公因數為 6

※ 「factor( 數值 )」指令表示求因式分解。

※ 「gcd( 數值,數值 )」指令表示求最大公因數。

**隨堂練習：**求 228 與 306 的最大公因數

方法 1

(%i1) factor(228);

(%o1)  $2^2 \cdot 3 \cdot 19$

(%i2) factor(306);

(%o2)  $2 \cdot 3^2 \cdot 17$

\*最大公因數為共同質因數次方最低者相乘，可知 228 與 306 之最大公因數為  $6(=2 \times 3)$

方法 2

(%i1) gcd(228,306);

(%o1) 6

\*228,306 最大公因數為 6

※ 「factor( 數值 )」指令表示求因式分解。

※ 「gcd( 數值,數值 )」指令表示求最大公因數。

## P.18

**例題 9：**設  $a$  為整數，試判斷下列四個敘述是否成立

(1)若  $a \mid (6 \times 10)$ ，則  $a \mid 6$  或  $a \mid 10$

(2)若  $a$  為質數且  $a \mid (6 \times 10)$ ，則  $a \mid 6$  或  $a \mid 10$

(3)若  $a \mid (6 \times 10)$  且  $(a, b) = 1$ ，則  $a \mid 10$

(4)若  $(a, 12) = 1$ ，則  $(a, 12^2) = 1$

**※本大題不建議使用 Maxima 解題※**

### P.19

**隨堂練習：**設  $a$  為整數，若  $(a, 20) = 1$ ，則下列哪些選項是正確的？

(1)  $(a, 2) = 1$

(2)  $(a, 5) = 1$

(3)  $(a, 25) = 1$

(4)  $(a, 90) = 1$

(5)  $(a, 100) = 1$

**※本大題不建議使用 Maxima 解題※**

**例題 10：**求 84 與 90 的最小公倍數

方法 1

(%i1) factor(84);

(%o1)  $2^2 \cdot 3 \cdot 7$

(%i2) factor(90);

(%o2)  $2 \cdot 3^2 \cdot 5$

(%i3)  $2^2 * 3^2 * 5 * 7$

(%o3) 1620

\*最小公倍數為所有質因數次方最高者相乘，可知 84 與 90 之最小公倍數為  $1260 (= 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7)$

方法 2

```
(%i1) lcm(84,90);
```

```
(%o1) 1260
```

\*84,90 最小公倍數為 1260

※ 「factor( 數值 )」指令表示求因式分解。

※ 「lcm( 數值,數值 )」指令表示求最小公倍數。

**P.20**

**隨堂練習：**求 228 與 306 的最小公倍數

方法 1

```
(%i1) factor(228);
```

```
(%o1) 22 3 19
```

```
(%i2) factor(306);
```

```
(%o2) 2 32 17
```

```
(%i3) 2^2*3^2*17*19
```

```
(%o3) 11628
```

\*最小公倍數為所有質因數次方最高者相乘，可知 228 與 306 之最小公倍數為 11628

(=2<sup>2</sup>×3<sup>2</sup>×17×19)

方法 2

```
(%i1) lcm(84,90);
```

```
(%o1) 11628
```

\*228, 306 最小公倍數為 11628

※ 「factor( 數值 )」指令表示求因式分解。

※ 「lcm( 數值,數值 )」指令表示求最小公倍數。

**例題 11：**設有二正整數，其最大公因數為 6，最小公倍數為 72，求此二數

※本大題不建議使用 Maxima 解題※

**隨堂練習：**設  $a, b$  為二正整數且  $a < b$ ，若  $(a, b) = 14$  且  $[a, b] = 210$ ，求  $a, b$  兩數

※本大題不建議使用 Maxima 解題※

## P.20

**例題 12：**

(1) 試求  $(236, 354, 413) = ?$

(2) 試求  $[236, 354, 413] = ?$

方法 1

(%i1) factor(236);

(%o1)  $2^2 \cdot 59$

(%i2) factor(354);

(%o2)  $2 \cdot 3 \cdot 59$

(%i3) factor(413);

(%o3)  $7 \cdot 59$

(%i4)  $2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 59$

(%o4) 4956

\*最大公因數為共同質因數次方最低者相乘，可知 236, 354, 413 之最大公因數為 59；

最小公倍數為所有質因數次方最高者相乘，可知 236, 354, 413 之最小公倍數為 4956

( $= 2^2 \times 3 \times 7 \times 59$ )

方法 2

```
(%i1) gcd(gcd(236,354),413);
```

```
(%o1) 59
```

```
(%i2) lcm(236,354,413);
```

```
(%o2) 4956
```

\*236,354,413 最大公因數為 59，最小公倍數為 4956

\*gcd 只能處理 2 個數值，若有 3 個數值以上，則需要以 gcd(gcd(數值,數值),數值) ※

※ 「factor( 數值 )」指令表示求因式分解。

※ 「gcd( 數值,數值 )」指令表示求最大公因數。

※ 「lcm( 數值,數值 )」指令表示求最小公倍數。

**隨堂練習：**

(1) 試求(261,348,609)與 [261,348,609]

方法 1

```
(%i1) factor(261);
```

```
(%o1) 32 29
```

```
(%i2) factor(348);
```

```
(%o2) 22 3 29
```

```
(%i3) factor(609);
```

```
(%o3) 3 7 29
```

```
(%i4) 22*32*7*29
```

```
(%o4) 7308
```

\*最大公因數為共同質因數次方最低者相乘，可知 261,348,609 之最大公因數為 87(=3×29)；最小公倍數為所有質因數次方最高者相乘，可知 261,348,609 之最小公倍數

為 7308 ( $=2^2 \times 3^2 \times 7 \times 29$ )

### 方法 2

```
(%i1) gcd(gcd(261,348),609);
```

```
(%o1) 87
```

```
(%i2) lcm(261,348,609);
```

```
(%o2) 7308
```

\*261,348,609 最大公因數為 87，最小公倍數為 7308

\*gcd 只能處理 2 個數值，若有 3 個數值以上，則需要以 gcd(gcd(數值,數值),數值) ※

※「factor( 數值 )」指令表示求因式分解。

※「gcd( 數值,數值 )」指令表示求最大公因數。

※「lcm( 數值,數值 )」指令表示求最小公倍數。

(2)設 a,b,c 為正整數， $(a,b,c)[a,b,c]=abc$  是否恆成立？如果不成立，請舉例說明

**※本大題不建議使用 Maxima 解題※**

**例題 13：**一圓的圓周上，平均分布了 20 個洞，兩洞間稱為一間隔，請回答下列問題

(1)若由 A 洞依逆時針方向從 0 開始編號，0,1,2,...，輪回到 A 洞時繼續往下編號，則

A 洞的編號有何規則？

(2)在 A 洞打上一之木樁，然後依逆時針方向前進，每隔 3 個間隔就在打一支木樁，

依此繼續操作，打木樁的洞的編號有何規則？

(3)第一次輪回到 A 洞需再打樁前，總共已經打了幾支木樁？

**※本大題不建議使用 Maxima 解題※**

**隨堂練習：**在一圓的圓周上，平均分布了 60 個洞，兩個洞間稱為一個間隔，在 A 洞上打一支木樁，然後依逆時針方向前進，每隔 9 個間隔就再打一支木樁，依此繼續操作。試問：輪回到 A 洞需再打樁前，總共已經打了幾支木樁？

### 方法 1

```
(%i1) factor(60);
```

```
(%o1) 22 3 5
```

```
(%i2) factor(9);
```

```
(%o2) 32
```

```
(%i3) 22*32*5
```

```
(%o3) 180
```

```
(%i4) 180/9
```

```
(%o4) 20
```

### 方法 2

```
(%i1) lcm(60,9);
```

```
(%o1) 180
```

```
(%i2) 180/9
```

```
(%o2) 20
```

\*60, 9 最小公倍數為 180

\*最小公倍數為所有質因數次方最高者相乘，可知 60,9 之最小公倍數為 180 個間隔  
( $=2^2 \times 3^2 \times 5$ )，9 個間隔打一支木樁，故輪回到 A 洞需再打樁前，總共已經打了 20 支木樁

※ 「factor( 數值 )」指令表示求因式分解。

※ 「lcm( 數值,數值 )」指令表示求最小公倍數。

**P.24**

**例題 14**：利用輾轉相除法原理說明 $(442,364)=26$  **※本題以 Maxima 解題※**

方法 1

(%i1) factor(442);

(%o1) 2 13 17

(%i2) factor(364);

(%o2) 2<sup>2</sup> 7 13

(%i3) 2\*13

(%o3) 26

方法 2

(%i1) gcd(442,364);

(%o1) 26

\*最大公因數為共同質因數次方最低者相乘，可知 442,364 之最大公因數為 26(=2×13)

※「factor( 數值 )」指令表示求因式分解。

※「gcd( 數值,數值 )」指令表示求最大公因數。

**P.25**

**隨堂練習**：求(437,551)

方法 1

(%i1) factor(437);

(%o1) 19 23

(%i2) factor(551);

(%o2) 19 29



\*最大公因數為共同質因數次方最低者相乘，可知 437,551 之最大公因數為 19

### 方法 2

(%i1) gcd(437,551);

(%o1) 19

\*437,551 最大公因數為 19

※「factor( 數值 )」指令表示求因式分解。

※「gcd( 數值,數值 )」指令表示求最大公因數。

**例題 15**：設  $a$ 、 $b$ 、 $q_1$ 、 $q_2$ 、 $q_3$  均為正整數，且  $b > 3054$ ，並且滿足下列方程組，試求

( $a$ 、 $b$ )

$$a = bq_1 + 3054$$

$$b = 3054q_2 + 202$$

$$3054 = 202q_3 + 24$$

**※本題不建議使用 Maxima 解題※**

**隨堂練習**：設  $a$  為正整數，且  $a > 1000$ ，若  $a$  被 435 除後的餘數為 45，

(1) 將  $a$  除以 435 以除法原理的形式表示

(2) 求  $a$  與 435 最大公因數為何？

**※本題不建議使用 Maxima 解題※**

**P.26** **習題 1-1**

1. 觀念題：對的在題號前打○，錯的在題號前打×

\_\_\_ (1) 質數一定是奇數

\_\_\_ (2) 2 是最小的質數

\_\_\_ (3) 1 適任何整數的因數

\_\_\_ (4) 設  $a, b, c$  為整數，若  $a \mid (b+c)$  且  $a \mid b$ ，則  $a \mid c$

\_\_\_ (5) 設  $a$  為整數，若  $a \mid (1 \times 12 + 1 \times 18)$ ，則  $a \mid 12$  且  $a \mid 18$

\_\_\_ (6) 設  $a, b, c$  都是整數，若  $a \mid bc$ ，則  $a \mid b$  或  $a \mid c$

\_\_\_ (7) 設  $a, b$  是是整數且  $p$  是質數，若  $p \mid ab$ ，則  $p \mid a$  或  $p \mid b$

**※本大題不建議使用 Maxima 解題※**

2. 下列何者為質數？

(1) 143

(%i1) primep(143);

(%o1) false

\* 答案 true(事實)代表是質數。(若為 false 代表非質數)

(2) 197

(%i1) primep(197);

(%o1) true

\* 答案 true(事實)代表是質數。(若為 false 代表非質數)

(3) 157

(%i1) primep(157);

(%o1) true

\* 答案 true(事實)代表是質數。(若為 false 代表非質數)

(4) 313

(%i1) primep(313);

(%o1) true

\* 答案 true(事實)代表是質數。(若為 false 代表非質數)

(5) 403

(%i1) primep(403);

(%o1) false

\* 答案 true(事實)代表是質數。(若為 false 代表非質數)

※ 「primep( 數值 )」指令表示求是否為質數。

3.

(1)求 540 和 792 的最大公因數與最小公倍數

(%i1) gcd(540,792);

(%o1) 36

(%i2) lcm(540,792);

(%o2) 11880

\*540,792 最大公因數為 36，最小公倍數為 11880

(2)求 540,792 和 306 的最大公因數與最小公倍數

(%i1) gcd(gcd(540,792),306);

(%o1) 18

(%i2) lcm(540,792,306);

(%o2) 201960

\*540,792,306 最大公因數為 36，最小公倍數為 201960

\*gcd 只能處理 2 個數值，若有 3 個數值以上，則需要以 gcd(gcd(數值,數值),數值)

※「gcd( 數值,數值 )」指令表示求最大公因數。

※「lcm( 數值,數值 )」指令表示求最小公倍數。

4. 求 1769 與 1363 的最大公因數與最小公倍數

(%i1) gcd(1769,1363);

(%o1) 29

(%i2) lcm(1769,1363);

(%o2) 83143

\*1769,1363 最大公因數為 29，最小公倍數為 83143

※「gcd( 數值,數值 )」指令表示求最大公因數。

※「lcm( 數值,數值 )」指令表示求最小公倍數。

5.

(1) 試問：任意正整數被 3 除的餘數為何？

(2) 試問：任意正整數的平方被 3 除的餘數有幾種情形？

**※本大題不建議使用 Maxima 解題※**

6. 設二正整數  $x, y$  除以 9 分別得餘數為 5 與 4，試問：

(1)  $3x+y$  除以 9 的餘數為多少？

(2)  $x^2+xy+2$  除以 9 的餘數為多少？

**※本大題不建議使用 Maxima 解題※**

7. 楊老師買了 903 枝黑色原子筆、602 枝紅色原子筆、731 枝藍色原子筆當作禮物，分送全班同學，若同學拿到每一種原子筆的數量都是相同的，請問該班最多有多少學生？

```
(%i1) gcd(gcd(903,602),731);
```

```
(%o1) 43
```

\*903,602,731 該班最多有學生 43 人(最大公因數)

\*gcd 只能處理 2 個數值，若有 3 個數值以上，則需要以 gcd(gcd(數值,數值),數值) 進行 maxima 運算

**※「gcd( 數值,數值 )」指令表示求最大公因數。**

## P.27

8. 一長方體木塊，長 120cm、寬 102cm、高 78cm，要想將這木塊鋸成體積相同的若干個正立方體，而不使剩下，則立方體的體積最大時可鋸成幾塊？此時正立方體的邊長為多少 cm？

```
(%i1) gcd(gcd(120,102),78);
```

```
(%o1) 6
```

```
(%i2) 120/6*102/6*78/6;
```

```
(%o2) 4420
```

\*長 120cm、寬 102cm、高 78cm 長方體木塊可切成最大邊長 6 cm 之正立方體共 4420 塊。

\*gcd 只能處理 2 個數值，若有 3 個數值以上，則需要以 gcd(gcd(數值,數值),數值)



※ 「gcd( 數值,數值 )」指令表示求最大公因數。

9.全用高中高一新生訓練，學生人數在 1000 人至 1200 人之間，而且每 5 人一數、7 人一數、11 人一數都餘 3，請問學生總共有多少人？

(%i1) lcm(5,7,11);

(%o1) 385

(%i2) f(a):=385\*a+3;

(%o2) f(a):=385a+3

(%i3) f(1);

(%o3) 388

(%i4) f(2);

(%o4) 773

(%i5) f(3);

(%o5) 1158

(%i6) f(4);

(%o6) 1543

\*學生人數介於 1000 人至 1200 人，故人數為 1158 人。

※  $f(x):=ax+b$ ; 定義函數：須以“:=”定義； 定義後只需輸入  $f(x)$ 之  $x$  數值即可求得

結果。

※ 「lcm( 數值,數值 )」指令表示求最小公倍數。

10.設  $a$  為正整數，且  $a > 1000$ ，若  $a$  被 240 除後的餘數為 75，試回答下列問題：

(1)將  $a$  除以 240 以除法原理的形式表示

(2)求  $a$  與 240 的最大公因數

**※本大題不建議使用 Maxima 解題※**

11. 設  $a, b$  都是正整數且  $a > b$ ，若  $(a, b) = 12$  且  $[a, b] = 420$ ，求  $a, b$  之值

**※本大題不建議使用 Maxima 解題※**

## 1-2 有理數與實數

### P.30

例題 1：試利用尺規作圖將有理數  $\frac{4}{3}$  標示在下圖的數線上

**※本大題不建議使用 Maxima 解題※**

### P.31

隨堂練習：

(1)除在例題 1 中， $\frac{8}{3}$  的位置在何處？

(2) 試利用尺規作圖將有理數  $\frac{7}{5}$  標示在下圖的數線上

**※本大題不建議使用 Maxima 解題※**

例題 2：請問在  $\frac{1}{5}$  與  $\frac{1}{4}$  之間是否能找到三個有理數？

**※本大題不建議使用 Maxima 解題※**

### P.32

隨堂練習：

(1)試在  $\frac{1}{3}$  與  $\frac{1}{4}$  之間，找出 3 個有理數

(2)請問在  $\frac{1}{3}$  與  $\frac{1}{4}$  之間，我們可以找到多少個有理數

**※本大題不建議使用 Maxima 解題※**

### P.33

例題 3：

(1)設  $a$  為整數，若  $a^2$  是 2 的倍數，試證  $a$  是 2 的倍數

(2)若  $x^2=2$ ，試證  $x$  不是有理數



**※本大題不建議使用 Maxima 解題※**

**隨堂練習：**

(1) 設  $a$  為整數，若  $a^2$  是 3 的倍數，試證  $a$  是 3 的倍數

(2) 若  $x^2=3$ ，試證  $x$  不是有理數

**※本大題不建議使用 Maxima 解題※**

### P.34

**例題 4：**試利用尺規作圖，在數線上標出  $\sqrt{2}$  所代表的點

**※本大題不建議使用 Maxima 解題※**

**隨堂練習：**試利用尺規作圖，在數線上標出  $\sqrt{5}$  所代表的點

**※本大題不建議使用 Maxima 解題※**

### P.35

**例題 5：**試利用十分逼近法求  $\sqrt{2}$  的近似值至小數第三位

```
(%i1) float(sqrt(2));
```

```
(%o1) 1.414213562373095
```

※ 「sqrt( 數值 )」指令表示數值開根號。

※ 「float( 數值 )」指令表示將結果轉換為小數。

### P.36

**隨堂練習：**試判斷  $\sqrt{137}$  介於哪兩個整數之間

```
(%i1) float(sqrt(137));
```

(%o1) 11.70469991071963

\*  $\sqrt{137}$  介於 11 與 12 之間。

※ 「sqrt ( 數值 )」指令表示數值開根號。

※ 「float( 數值 )」指令表示將結果轉換為小數。

**例題 6**：試證：

(1)  $5-\sqrt{2}$  為無理數

(2) 若 a 和 b 為有理數，a 為無理數，且  $a+ba=0$ ，則  $a=b=0$

**※本大題不建議使用 Maxima 解題※**

**隨堂練習**：設 x,y 為有理數，且  $(2-\sqrt{3})x+2\sqrt{3}y=6+\sqrt{5}$ ，求 x,y 之值

**※本大題不建議使用 Maxima 解題※**

### P.37

**隨堂練習**：計算下列各式

(1)  $\sqrt{5}\times\sqrt{13}$

方法 1：

(%i1) rootscontract(sqrt(5)\*sqrt(13));

(%o1)  $\sqrt{65}$

方法 2：

$\sqrt{5}\times\sqrt{13}=\sqrt{5\times 13}$

(%i1) sqrt(5\*13);

(%o1)  $\sqrt{65}$

(2)  $\sqrt{2} \times \sqrt{5}$

方法 1 :

```
(%i1) rootscontract(sqrt(2)*sqrt(5));
```

```
(%o1)  $\sqrt{10}$ 
```

方法 2 :

$$\sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{2 \times 5}$$

```
(%i1) sqrt(2*5);
```

```
(%o1)  $\sqrt{10}$ 
```

(3)  $\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{6}}$

```
(%i1) radcan(sqrt(30)/ sqrt(6));
```

```
(%o1)  $\sqrt{5}$ 
```

(4)  $\frac{\sqrt{42}}{\sqrt{14}}$

```
(%i1) radcan(sqrt(42)/ sqrt(14));
```

```
(%o1)  $\sqrt{3}$ 
```

※ 「sqrt ( 數值 )」指令表示數值開根號。

※ 「radcan ([ 算式 ] × [ 算式 ])」指令表示化簡算式。

※ 「rootscontract((sqrt 數值)\*(sqrt 數值))」指令執行乘開兩根號數值；

### P.38

**隨堂練習：**將下列各式化為最簡根式：

(1)  $\sqrt{48}$

(%i1) sqrt(48);

(%o1)  $4\sqrt{3}$

(2)  $\sqrt{108}$

(%i1) sqrt(108);

(%o1)  $2 \cdot 3^{\frac{3}{2}}$

\* 答案  $2 \cdot 3^{\frac{3}{2}}$  可寫成  $2 \times 3\sqrt{3}$

※ 「sqrt ( 數值 )」指令表示數值開根號。

(3)  $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$

(4)  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

※(3)(4)題不建議使用 Maxima 解題※

隨堂練習：

(1)  $\sqrt{8}$  與  $\sqrt{50}$  是否為同類方根？

(%i1) sqrt(8);

(%o1)  $2\sqrt{2}$

(%i2) sqrt(50);

(%o2)  $5\sqrt{2}$

\*  $\sqrt{8}$  與  $\sqrt{50}$  為同類方根( $\sqrt{2}$ )。

(2)  $\sqrt{48}$  與  $\sqrt{24}$  是否為同類方根？

(%i1) sqrt(48);

(%o1)  $4\sqrt{3}$

(%i2) sqrt(24);

(%o2)  $2\sqrt{6}$

\*  $\sqrt{48}$  與  $\sqrt{24}$  不為同類方根( $\sqrt{3}$ 、 $\sqrt{6}$ )。

※「sqrt ( 數值 )」指令表示數值開根號。

**例題 7**：化簡下列各式：

(1)  $3\sqrt{3} - 3\sqrt{12} + 4\sqrt{48} - 2\sqrt{75}$

(%i1) ratsimp(3\*sqrt(3)-3\*sqrt(12)+4\*sqrt(48)-2\*sqrt(75));

(%o1)  $3^{\frac{3}{2}}$

\* 答案  $3^{\frac{3}{2}}$  可寫成  $3\sqrt{3}$

(2)  $3\sqrt{12} + 2\sqrt{72} - 3\sqrt{27} - 2\sqrt{18}$

(%i1) ratsimp(3\*sqrt(12)+2\*sqrt(72)-3\*sqrt(27)-2\*sqrt(18));

(%o1)  $3 \cdot 2^{\frac{3}{2}} - 3^{\frac{3}{2}}$

\* 答案  $3 \cdot 2^{\frac{3}{2}} - 3^{\frac{3}{2}}$  可寫成  $6\sqrt{2} - 3\sqrt{3}$

※「sqrt ( 數值 )」指令表示數值開根號。

※「ratsimp ([ 算式 ] × [ 算式 ])」指令表示化簡算式。

### P.39

**隨堂練習**：化簡  $3\sqrt{18} - 5\sqrt{12} - 4\sqrt{98} + 3\sqrt{108} - \sqrt{36}$

(%i1) ratsimp(3\*sqrt(18)-5\*sqrt(12)-4\*sqrt(98)+3\*sqrt(108)-sqrt(36));

(%o1)  $8\sqrt{3} - 19\sqrt{2} - 6$

※「sqrt ( 數值 )」指令表示數值開根號。

※「ratsimp ([ 算式 ] × [ 算式 ])」指令表示化簡算式。

**例題 8**：化簡下列各式：

$$(1) (\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2})$$

```
(%i1) ratsimp((sqrt(5)+sqrt(2))*(sqrt(5)-sqrt(2)));
```

```
(%o1) 3
```

$$(2) \frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$$

```
(%i1) ratsimp(2/(sqrt(5)+sqrt(2))+2/(sqrt(5)-sqrt(2)));
```

```
(%o1)  $\frac{4\sqrt{5}}{3}$ 
```

$$(3) \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$$

```
(%i1) ratsimp(sqrt(5)/sqrt(6)-sqrt(6)/sqrt(5));
```

```
(%o1)  $-\frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{6}}$ 
```

※ 「sqrt ( 數值 )」指令表示數值開根號。

※ 「ratsimp ([ 算式 ] × [ 算式 ])」指令表示化簡算式。

## P.40

**隨堂練習**：化簡下列各式：

$$(1) (7 - 2\sqrt{3})(7 + 2\sqrt{3})$$

```
(%i1) ratsimp((7-2*sqrt(3))*(7+2*sqrt(3)));
```

```
(%o1) 37
```

$$(2) \frac{1}{\sqrt{5} + 2} + \frac{1}{\sqrt{5} - 2}$$

```
(%i1) ratsimp(1/(sqrt(5)+ 2)+1/(sqrt(5)- 2));
```

```
(%o1) 2√5
```

$$(3) \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$$

```
(%i1) ratsimp(sqrt(5)/sqrt(3)-sqrt(3)/sqrt(5));
```

```
(%o1)  $\frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{5}}$ 
```

※ 「sqrt ( 數值 )」指令表示數值開根號。

※ 「ratsimp ([ 算式 ] × [ 算式 ])」指令表示化簡算式。

## P.41

隨堂練習：試說明圓內接正六邊形的周長與直徑的比值等於3

**※本大題不建議使用 Maxima 解題※**

## P.42

例題 9：試解下列各不等式，並在數線上圖示其解

(1)  $4x-3 > 2x+5$

```
(%i1) load(fourier_elim);
```

```
(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier_elim/fourier_elim.lisp
```

```
(%i2) fourier_elim([4*x-3>2*x+5],[x]);
```

```
(%o2) [4<x]
```

(2)  $3x+5 \geq 6x-7$

```
(%i1) load(fourier_elim);
```

```
(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier_elim/fourier_elim.lisp
```



(%i2) `fourier_elim([3*x+5>=6*x-7],[x]);`

(%o2) `[x=4] or [x<4]`

※ 「`load (fourier_elim)`」指令可執行不等式計算，須先載入。

※ 「`fourier_elim([ 變數算式 ],[ 變數 ])`」求解不等式。

### P.43

**隨堂練習：**試解下列各不等式，並在數線上圖示其解

(1)  $7x-13 < 4x-3$

(%i1) `load(fourier_elim);`

(%o1) `C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier_elim/fourier_elim.lisp`

(%i2) `fourier_elim([7*x-13<4*x-3],[x]);`

(%o2) `[x< $\frac{10}{3}$ ]`

(2)  $2x+3 \leq 7x+18$

(%i1) `load(fourier_elim);`

(%o1) `C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier_elim/fourier_elim.lisp`

(%i2) `fourier_elim([2*x+3<=7*x+18],[x]);`

(%o2) `[x=-3] or [-3<x]`

\* 答案為  $-3 \leq x$

※ 「`load (fourier_elim)`」指令可執行不等式計算，須先載入。

※ 「`fourier_elim([ 變數算式 ],[ 變數 ])`」求解不等式。

**隨堂練習：**試解下列各等式的值：

(1)  $|5|$



(%i1) abs(5);

(%o1) 5

(2) | -5 |

(%i1) abs(-5);

(%o1) 5

(3) | 5-3 |

(%i1) abs(5-3);

(%o1) 2

(4) |  $\pi - 4$  |

(%i1) abs(float(%pi)-4);

(%o1) 0.85840734641021

\*  $\pi$  表示為 %pi

※ 「abs( 數值 )」指令表示絕對值。

※ 「float( 數值 )」指令表示將結果轉換為小數。

**例題 10**：試解下列各式

(1) | x | = 2

(%i1) load(fourier\_elim);

(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier\_elim/fourier\_elim.lisp

(%i2) fourier\_elim([abs(x)=2],[x]);

(%o2) [x=2] or [x=-2]

(2)  $|x| \leq 2$

(%i1) load(fourier\_elim);

(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier\_elim/fourier\_elim.lisp

(%i2) fourier\_elim([abs(x)<=2],[x]);

(%o2) [x=2] or [x=-2] or [-2<x,x<2]

\* 答案為  $-2 \leq x \leq 2$

(3)  $|x| \geq 2$

(%i1) load(fourier\_elim);

(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier\_elim/fourier\_elim.lisp

(%i2) fourier\_elim([abs(x)>= 2],[x]);

(%o2) [x=2] or [x=-2] or [x<-2] or [2<x]

\* 答案為  $x \leq -2$  或  $2 \leq x$

※ 「load (fourier\_elim)」指令可執行不等式計算，須先載入。

※ 「fourier\_elim([變數算式],[變數])」求解不等式。

※ 「abs(數值)」指令表示絕對值。

## P.44

隨堂練習：試解下列各式：

(1)  $|x| = 12$

(%i1) load(fourier\_elim);

(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier\_elim/fourier\_elim.lisp

(%i2) fourier\_elim([abs(x)=12],[x]);

(%o2) [x=12] or [x=-12]



\* 答案為  $x=12$  或  $x=-12$

(2)  $|x| \leq 12$

(%i1) load(fourier\_elim);

(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier\_elim/fourier\_elim.lisp

(%i2) fourier\_elim([abs(x)<=12],[x]);

(%o2) [x=12] or [x=-12] or [-12<x,x<12]

\* 答案為  $-12 \leq x \leq 12$

(3)  $|x| \geq 12$

(%i1) load(fourier\_elim);

(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier\_elim/fourier\_elim.lisp

(%i2) fourier\_elim([abs(x)>=12],[x]);

(%o2) [x=12] or [x=-12] or [x<-12] or [12<x]

\* 答案為  $x \leq -12$  或  $12 \leq x$

※ 「load (fourier\_elim)」指令可執行不等式計算，須先載入。

※ 「fourier\_elim([變數算式],[變數])」求解不等式。

※ 「abs(數值)」指令表示絕對值。

## P.45

**例題 11**：試解下列各式，並將解圖示在數線上

(1)  $|x-1| = 2$

(%i1) load(fourier\_elim);

(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier\_elim/fourier\_elim.lisp



```
(%i2) fourier_elim([abs(x-1)=2],[x]);
```

```
(%o2) [x=3] or [x=-1]
```

\* 答案為  $x=3$  ,  $x=-1$

(2)  $|3x-1| \leq 2$

```
(%i1) load(fourier_elim);
```

```
(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier_elim/fourier_elim.lisp
```

```
(%i2) fourier_elim([abs(3*x-1)<=2],[x]);
```

```
(%o2) [x=1] or [x=-1/3] or [-1/3<x,x<1]
```

\* 答案為  $-1/3 \leq x \leq 1$

(3)  $|3x+1| > 2$

```
(%i1) load(fourier_elim);
```

```
(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier_elim/fourier_elim.lisp
```

```
(%i2) fourier_elim([abs(3*x+1)>2],[x]);
```

```
(%o2) [x<-1] or [1/3<x]
```

\* 答案為  $x<-1$  或  $1/3<x$

※ 「load (fourier\_elim)」指令可執行不等式計算，須先載入。

※ 「fourier\_elim([變數算式],[變數])」求解不等式。

※ 「abs(數值)」指令表示絕對值。

## P.46

隨堂練習：試解下列各式：

(1)  $|x-3| = 1$

```
(%i1) load(fourier_elim);
```

```
(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier_elim/fourier_elim.lisp
```

```
(%i2) fourier_elim([abs(x-3)=1],[x]);
```

```
(%o2) [x=4] or [x=2]
```

\* 答案為  $x=4$  或  $x=2$

(2)  $|2x+3| < 1$

```
(%i1) load(fourier_elim);
```

```
(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier_elim/fourier_elim.lisp
```

```
(%i2) fourier_elim([abs(2*x+3)<1],[x]);
```

```
(%o2) [-2<x,x<-1]
```

\* 答案為  $-2 < x < -1$

(3)  $|2x-3| \geq 1$

```
(%i1) load(fourier_elim);
```

```
(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier_elim/fourier_elim.lisp
```

```
(%i2) fourier_elim([abs(2*x+3)>=1],[x]);
```

```
(%o2) [x=-1] or [x=-2] or [x<-2] or [-1<x]
```

\* 答案為  $-2 \leq x \leq -1$

※ 「load (fourier\_elim)」指令可執行不等式計算，須先載入。

※ 「fourier\_elim([變數算式],[變數])」求解不等式。

※ 「abs(數值)」指令表示絕對值。

**P.47 習題 1-2**

1. 觀念題：對的在題號前打○，錯的在題號前打×

\_\_\_ (1)  $\sqrt{2}=1.414$

\_\_\_ (2)  $1+\sqrt{2}$  為無理數

\_\_\_ (3)  $(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})$  為無理數

\_\_\_ (4) 有理數與無理數之和必為無理數

\_\_\_ (5) 無理數與無理數之和必為無理數

\_\_\_ (6) 有理數與無理數之乘積必為無理數

\_\_\_ (7) 無理數與無理數之乘積必為無理數

\_\_\_ (8) 若  $a$  為實數，則  $\sqrt{a^2}=a$

\_\_\_ (9) 在兩個相異的實數之間可以找到一個實數介於這兩數之間

\_\_\_ (10) 在兩個相異的實數之間可以找到無限多個實數介於這兩數之間

\_\_\_ (11) 設  $a>0$  且  $b>0$ ，則  $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b}$

**※本大題不建議使用 Maxima 解題※**

2. 兩個自然數的和與積仍是自然數，但它們的差與商並不一定是自然數，在整數、有理數、實數中若它們的和、差、積、商仍在該數系中，請在下面的表格中以○表示，若不一定在該數系中，請以×表示

	和	差	積	商
自然數	○	×	○	×
整數				
有理數				
實數				

**※本大題不建議使用 Maxima 解題※**

3.利用尺規作圖，在數線上標出 $\sqrt{3}$ 、 $1+\sqrt{3}$ 所代表的點

**※本大題不建議使用 Maxima 解題※**

4.試證： $\sqrt{5}$  是無理數

**※本大題不建議使用 Maxima 解題※**

5.利用十分逼近法求 $\sqrt{3}$ 的近似值至小數第二位

```
(%i1) float(sqrt(3));
```

```
(%o1) 1.732050807568877
```

※「float( 數值 )」指令表示將結果轉換為小數。

※「sqrt( 數值 )」指令表示數值開根號。

6.化簡下列各式

(1)  $5\sqrt{32}-2\sqrt{18}+3\sqrt{12}-6\sqrt{48}$

```
(%i1) ratsimp(5*sqrt(32)-2*sqrt(18)+3*sqrt(12)-6*sqrt(48));
```

```
(%o1) 7 23/2 - 2 35/2
```

\* 答案  $7 2^{\frac{3}{2}} - 2 3^{\frac{5}{2}}$  (為  $7 \times 2^{\frac{3}{2}} - 2 \times 3^{\frac{5}{2}}$ ) 可寫成  $14\sqrt{2} - 18\sqrt{3}$

(2)  $\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}$

**※本題不建議使用 Maxima 解題※**

(3)  $\frac{2}{3+\sqrt{2}} + \frac{1}{3-\sqrt{2}}$

```
(%i1) ratsimp((2/(3+sqrt(2)))+(1/(3-sqrt(2))));
```

```
(%o1) -\frac{\sqrt{2}-9}{7}
```

※ 「ratsimp ([ 算式 ] × [ 算式 ])」指令表示化簡算式。

※ 「sqrt ( 數值 )」指令表示數值開根號。

7. 試解下列各式，並將解圖示在數線上

(1)  $|x-2| = 4$

(%i1) load(fourier\_elim);

(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier\_elim/fourier\_elim.lisp

(%i2) fourier\_elim([abs(x-2)=4],[x]);

(%o2) [x=6] or [x=-2]

\* 答案為  $x=6$  或  $x=-2$

(2)  $|2x-1| < 4$

(%i1) load(fourier\_elim);

(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier\_elim/fourier\_elim.lisp

(%i2) fourier\_elim([abs(2\*x-1)=4],[x]);

(%o2)  $[x = \frac{5}{2}]$  or  $[x = -\frac{3}{2}]$

\* 答案為  $x = \frac{5}{2}$  或  $x = -\frac{3}{2}$

(3)  $|2x+1| \geq 4$

(%i1) load(fourier\_elim);

(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier\_elim/fourier\_elim.lisp

(%i2) fourier\_elim([abs(2\*x+1)>=4],[x]);

(%o2)  $[x = \frac{3}{2}]$  or  $[x = -\frac{5}{2}]$  or  $[x < -\frac{5}{2}]$  or  $[\frac{3}{2} < x]$

\* 答案為  $x \leq \frac{5}{2}$  或  $-\frac{3}{2} \leq x$



- ※ 「load (fourier\_elim)」指令可執行不等式計算，須先載入。
- ※ 「fourier\_elim([ 變數算式 ],[ 變數 ])」求解不等式。
- ※ 「abs( 數值 )」指令表示絕對值。

## 1-3 平面坐標系

## P.50

隨堂練習：在右圖中，有 A、B、C、D、E 五點，請寫出這五點的坐標：

※本大題不建議使用 Maxima 解題※

隨堂練習：

(1)指出下列各點在坐標平面上的哪一個象限或哪個坐標軸上？

(a) (3,1)

(b) (3,-1)

(c) (-3,-1)

(d) (-3,0)

(2)若(a,b)在第二象限，問(ab,a-b)在第幾象限？

※本大題不建議使用 Maxima 解題※

## P.52

例題 1：

(1)求 A(-2,-1)，B(4,-3)兩點之間的距離

```
(%i1) sqrt(((4-(-2))^2)+((-3-(-1))^2));
```

```
(%o1) 2√10
```

*兩點距離公式：A(x <sub>1</sub> ,y <sub>1</sub> ), B(x <sub>2</sub> ,y <sub>2</sub> ), $\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
--

(2)若 A(-2,y)，B(2,3)兩點之間的距離為 5，求 A 點坐標

```
(%i1) solve([sqrt(((2-(-2))^2)+((3-(y))^2))=5],[y]);
```

```
(%o1) [y=0,y=6]
```

\*A 點坐標可為(-2,0)或(-2,6)

※ 「sqrt ( 數值 )」指令表示數值開根號。

※ 「solve([ 變數算式 ],[ 變數 ])」指令表示求解。

隨堂練習：

(1)求 A(5,3)，B(3,-1)兩點之間的距離

```
(%i1) sqrt(((3-5)^2)+((-1-3)^2));
```

```
(%o1) 2√5
```

<p>*兩點距離公式：A(x<sub>1</sub>,y<sub>1</sub>), B(x<sub>2</sub>,y<sub>2</sub>), <math>\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}</math></p>
--

(2)在 x 軸上有一點 P 到 A(-2,3)，B(3,7)兩點的距離相等，求 P 點坐標

```
(%i1) solve([((-2-x)^2)+((3-0)^2)=((3-x)^2+(7-0)^2)],[x]);
```

```
(%o1) [x=9/2]
```

```
(%i2) float(9/2); ( 或下此指令 float(%); )
```

```
(%o2) 4.5
```

\*P 點坐標為(4.5,0)。(因為 P 在 x 軸上，故 y=0； $\overline{AP} = \sqrt{(x_a - x_p)^2 + (y_a - y_p)^2}$ ， $\overline{BP} = \sqrt{(x_b - x_p)^2 + (y_b - y_p)^2}$ ，因  $\overline{AP} = \overline{BP}$ ，所以  $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ )

※ 「sqrt ( 數值 )」指令表示數值開根號。

※ 「solve([ 變數算式 ],[ 變數 ])」指令表示求解。

※ 「float(數值)」指令表示將結果轉換為小數。

## P.53

例題 2：平行四邊形 ABCD，已知 A(-3,1)，B(1,-2)，C(5,5)，試求

(1)兩條對角線的交點坐標

```
(%i1) solve([(5-(-3))/2=x,(5-1)/2=y],[x,y]);
```

(%o1) [[x=4,y=2]]

\* 平行四邊形兩對角線互相平分，AC 對角線中點為兩條對角線交點，即為(4,2)

(2) 第四個頂點 D 的坐標

方法 1 : (已知對角線交點---(4,2))

(%i1) solve([x-4=4-1,y-2=2-(-2)], [x,y]);

(%o1) [[x=7,y=6]]

方法 2 : (未知對角線交點-由  $\overline{AB} = \overline{CD}$  計算 D 的坐標)

(%i1) solve([(1-(-3))^2=(5-x)^2,((-2)-1)^2=(5-y)^2], [x,y]);

(%o1) [[x=9,y=2],[x=1,y=2],[x=9,y=8],[x=1,y=8]]

\* 平行四邊形 ABCD 四邊會依 A、B、C、D 逆時針排列，故 D 會與 A 閉合成為一平行四邊形，因此只有[x=1,y=8]此一解會構成平行四邊形，D 坐標為(1,8)。

方法 3 : (未知對角線交點-由  $\overline{AD} = \overline{BC}$  計算 D 的坐標)

(%i1) solve([(x-(-3))^2=(5-1)^2,(y-1)^2=(5-(-2))^2], [x,y]);

(%o1) [[x=1,y=-6],[x=-7,y=-6],[x=1,y=8],[x=-7,y=8]]

\* 平行四邊形 ABCD 四邊會依 A、B、C、D 逆時針排列，故 D 會與 A 閉合成為一平行四邊形，因此只有[x=1,y=8]此一解會構成平行四邊形，D 坐標為(1,8)。

※ 「solve([ 變數算式 ], [ 變數 ])」指令表示求解。

**隨堂練習：**設△ABC 的三個頂點為 A(2,1)，B(3,3)，C(6,-1)

(1) 求  $\overline{AC}$  的中點

(%i1) solve([(6+2)/2=x,((-1)+(1))/2=y], [x,y]);

(%o1) [[x=4,y=0]]

(2)求  $\overline{AC}$  的中線長

(%i1) solve([sqrt((3-4)^2+(3-0)^2)=x],[x]);

(%o1) [x= $\sqrt{10}$ ]

\*  $\overline{AC}$  的中線長，即為  $\overline{AC}$  的中點到頂點 B 的距離

※「solve([ 變數算式 ],[ 變數 ])」指令表示求解。

## P.55

**例題 3**：如右圖所示，若  $L_1, L_2, L_3, L_4$  為過原點 O 的直線，是回答下列各問題：

(1)試求  $L_1, L_3, L_5, L_6$  的斜率

(%i1) solve([(4-0)/(2-0)=m1],[m1]);

(%o1) [m1=2]

(%i2) solve([( (-1)-0)/(2-0)=m3],[m3]);

(%o2) [m3= $-\frac{1}{2}$ ]

(%i3) solve([( (-1)-(-1))/(2-1/3)=m5],[m5]);

(%o3) [m5=0]

\*  $m_6$  為鉛直線(分母等於 0)，故斜率不存在

※「solve([ 變數算式 ],[ 變數 ])」指令表示求解。

(2)  $L_2$  的斜率為正或為負？並比較  $L_1, L_2$  斜率的大小

(3)  $L_4$  的斜率為正或為負？並比較  $L_3, L_4$  斜率的大小

※(2)、(3)不建議使用 Maxima 解題※

**P.56****隨堂練習：**

(1)若直線 L 的斜率為  $m$ ，根據前面的例題，請你從( $m > 0$ ， $m < 0$ ， $m = 0$  及  $m$  不存在)

四個選項中，選出正確答案填入下列的空格中

(a) 若直線 L 由左下方往右上方上升時，則\_\_\_\_\_

(b) 若直線 L 由左上方往右下方下降時，則\_\_\_\_\_

(c) 若直線 L 與 x 軸平行時，則\_\_\_\_\_

(d) 若直線 L 與 x 軸垂直時，則\_\_\_\_\_

**※本題不建議使用 Maxima 解題※**

**P.57**

**例題 4：**判斷以  $A(2,-1)$ ， $B(8,1)$ ， $C(4,3)$ ， $D(-2,1)$  為頂點的四邊形是否為平行四邊形

(%i1) solve([(1-(-1))/(8-2)=mab],[mab]);

(%o1) [mab= $\frac{1}{3}$ ]

(%i2) solve([(3-1)/(4-(-2))=mcd],[mcd]);

(%o2) [mcd= $\frac{1}{3}$ ]

(%i3) solve([( (-1)-1)/(2-(-2))=mad],[mad]);

(%o3) [mad= $-\frac{1}{2}$ ]

(%i4) solve([(1-3)/(8-4)=mbc],[mbc]);

(%o4) [mbc= $-\frac{1}{2}$ ]

\*  $\overline{AB} // \overline{CD}$  且  $\overline{AD} // \overline{BC}$ ，故 ABCD 此四邊行為平行四邊形

**※「solve([ 變數算式 ], [ 變數 ])」指令表示求解。**

**隨堂練習：**判斷以  $A(0,-6)$ ， $B(8,2)$ ， $C(3,7)$ ， $D(-1,3)$  為頂點的四邊形是否為梯形

(%i1) solve([(2-(-6))/(8-0)=mab],[mab]);

(%o1) [mab=1]

(%i2) solve([(3-(-1))/(7-3)=mcd],[mcd]);

(%o2) [mcd=1]

(%i3) solve([( (-1)-0)/(3-(-6))=mad],[mad]);

(%o3) [mad= $-\frac{1}{9}$ ]

(%i4) solve([(2-7)/(8-3)=mbc],[mbc]);

(%o4) [mbc=-1]

\*  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$  但  $\overline{AD}$  並無平行  $\overline{BC}$ ，故 ABCD 此四邊行為梯形

※ 「solve([ 變數算式 ], [ 變數 ])」指令表示求解。

**例題 5**：在坐標平面上 A(-2,1)，B(2,3)，C(6,5)三點

(1)試求直線 AB 的斜率與直線 AC 的斜率

(%i1) solve([(3-1)/(2-(-2))=mab],[mab]);

(%o1) [mab= $\frac{1}{2}$ ]

(%i2) solve([(5-1)/(6-(-2))=mac],[mac]);

(%o2) [mac= $\frac{1}{2}$ ]

※ 「solve([ 變數算式 ], [ 變數 ])」指令表示求解。

(2)請由(1)的結果判斷 A,B,C 三點是否共線？

**※本題不建議使用 Maxima 解題※**

## P.58

**隨堂練習**：已知坐標平面上三點 A(-1,2)，B(a,3)，C(2,8)在一直線上，求 a 之值

(%i1) solve([(8-2)/(2-(-1))=mac],[mac]);



(%o1) [mac=2]

(%i2) solve([(3-2)/(a-(-1))=2],[a]);

(%o2) [a=- $\frac{1}{2}$ ]

\* 三點共線，其斜率相等  $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC}$

\* ※ 「solve([ 變數算式 ],[ 變數 ])」指令表示求解。

## P.59

**例題 6**：設  $P(p,0)$ ， $Q(0,q)$  分別在  $x$  軸與  $y$  軸上( $p>0, Q>0$ )，且  $M$  為  $\overline{PQ}$  中點，

(1) 直線  $OM$  的斜率為何？

(%i1) solve([p/2=x,q/2=y],[x,y]);

(%o1) [[x= $\frac{p}{2}$ ,y= $\frac{q}{2}$ ]]

(%i2) solve([(q/2-0)/(p/2-0)=Mom],[Mom]);

(%o2) [Mom= $\frac{q}{p}$ ]

(2) 若  $\overline{OM} \perp \overline{PQ}$ ，則  $p, q$  的關係為何？

(%i1) solve([q/p\*Mpq=-1],[Mpq]);

(%o1) [Mpq = - $\frac{p}{q}$ ]

\* 若  $\overline{OM} \perp \overline{PQ}$ ，則  $Mpq \times Mom = -1$ ，即  $p^2 = q^2$  即  $p = q$  或  $-q$  (不合)，故當  $p = q$  時  $\overline{OM} \perp \overline{PQ}$

\* ※ 「solve([ 變數算式 ],[ 變數 ])」指令表示求解。

### 隨堂練習：

(1) 以  $A(1,-3)$ ， $B(7,-1)$ ， $C(2,-6)$  為頂點的三角形是否為直角三角形？

(%i1) solve([((-1)-(-3))/(7-1)=mab],[mab]);

(%o1) [mab= $\frac{1}{3}$ ]



(%i2) solve([( -1 - (-6) ) / (7 - 2) = mbc], [mbc]);

(%o2) [mbc=1]

(%i3) solve([( (-6) - (-3) ) / (2 - 1) = mac], [mac]);

(%o3) [mac=-3]

\* 若 ABC 為直角三角形，有任 2 邊斜率相乘將等於 -1，由上可知  $m_{ab} \times m_{ac} = -1$ ，故三角形 ABC 為直角三角形

(2) 設 A(2,2)，B(-2,5)，點 P 在 y 軸上，且  $\overline{AP} \perp \overline{BP}$ ，求點 P 的坐標

(%i1) solve([( (2-y) / (2-0) ) \* (5-y) / ((-2)-0) = -1], [y]);

(%o1) [y=6,y=1]

\* P 點坐標可為 (0,6)、(0,1) ( $m_{ap} \times m_{bp} = -1$  即代表  $\overline{AP} \perp \overline{BP}$ )

※ 「solve([ 變數算式 ], [ 變數 ])」指令表示求解。

## P.60

例題 7：求過點 A(-1,3) 且斜率為 -2 的直線方程式

※本題不建議使用 Maxima 解題※

隨堂練習：求過點 A(3,-5) 且斜率為  $\frac{4}{3}$  的直線方程式

※本題不建議使用 Maxima 解題※

## P.61

例題 8：求過點 (4,2) 且與 x 軸垂直的直線方程式

※本題不建議使用 Maxima 解題※

**隨堂練習：**求過點  $(-3,5)$  且與  $x$  軸垂直的直線方程式及與  $y$  軸垂直的直線方程式

**※本題不建議使用 Maxima 解題※**

**例題 9：**求過  $A(2,4)$ ， $B(5,2)$  兩點的直線方程式

```
(%i1) solve([4=2*a+b,2=5*a+b],[a,b]);
```

```
(%o1) [a=-2/3 ,b=16/3]
```

\* 直線方程式為  $y=ax+b$ ，將  $A$ ， $B$  兩座標解聯立方程式，求得  $a$ ， $b$ ，即可知通過兩點之直線方程式。本題為  $y = -\frac{2}{3}x + \frac{16}{3}$

\* ※ 「`solve([ 變數算式 ],[ 變數 ])`」指令表示求解。

## P.62

**隨堂練習：**

(1) 求過  $A(1,-4)$ ， $B(3,1)$  兩點的直線方程式

```
(%i1) solve([-4=a+b,1=3*a+b],[a,b]);
```

```
(%o1) [a=5/2 ,b=-13/2]
```

\* 直線方程式為  $y=ax+b$ ，將  $A$ ， $B$  兩座標解聯立方程式，求得  $a$ ， $b$ ，即可知通過兩點之直線方程式。本題為  $y = \frac{5}{2}x - \frac{13}{2}$

(2) 求過  $A(2,-1)$ ， $B(3,-1)$  兩點的直線方程式

```
(%i1) solve([-1=2*a+b,-1=3*a+b],[a,b]);
```

```
(%o1) [a=0 ,b=-1]
```

\* 直線方程式為  $y=ax+b$ ，將  $A$ ， $B$  兩座標解聯立方程式，求得  $a$ ， $b$ ，即可知通過兩點之直線方程式。本題為  $y = -1$

\* ※ 「`solve([ 變數算式 ],[ 變數 ])`」指令表示求解。

**例題 10**：坐標平面上有一直線  $L: 3x+5y=6$

- (1) 試求直線  $L$  的斜率
- (2) 試求與直線  $L$  平行且過  $A(2,-1)$  的直線方程式
- (3) 試求與直線  $L$  垂直且過  $A(2,-1)$  的直線方程式

**※本題不建議使用 Maxima 解題※**

### P.63

**隨堂練習**：坐標平面上有一直線  $L: 3x+ky=14$ ，且過  $(1,2)$

- (1) 試求直線  $L$  的斜率
- (2) 試求與直線  $L$  平行且過  $A(-3,2)$  的直線方程式
- (3) 試求與直線  $L$  垂直且過  $A(-3,2)$  的直線方程式

**※本題不建議使用 Maxima 解題※**

**隨堂練習**：

(1) 寫出下列直線的  $x$  截距與  $y$  截距

(a)  $2x-3y=6$

(%i1) solve([2\*x-3\*0=6],[x]);

(%o1) [x=3]

(%i2) solve([2\*0-3\*y=6],[y]);

(%o2) [y=-2]

\*  $x$  截距為 3 ( $y$  值代 0 求解)； $y$  截距為 -2 ( $x$  值代 0 求解)；

(b)  $3x-4y+12=0$

(%i1) solve([3\*x-4\*0+12=0],[x]);

(%o1) [x=-4]

(%i2) solve([3\*0-4\*y+12=0],[y]);

(%o2) [y=3]

\* x 截距為-4 (y 值代 0 求解) ; y 截距為 3 (x 值代 0 求解) ;

※ 「solve([ 變數算式 ],[ 變數 ])」指令表示求解。

(2)寫出右圖中直線 L 的 x 截距與 y 截距

※本題不建議使用 Maxima 解題※

## P.64

例題 11 :

(1)若直線 L 的斜率為 3 且 y 截距為 4，求直線 L 的方程式

(2)若直線 L 的 x 截距為 3 且 y 截距為 4，求直線 L 的方程式

※本題不建議使用 Maxima 解題※

隨堂練習：

(1)試求斜率為 $-\frac{4}{3}$ ，且 y 截距為-2 的直線方程式

(2)試求 x 截距為 4 且 y 截距為-5 的直線方程式

※本題不建議使用 Maxima 解題※

## P.65

例題 12 :

(1)試解方程組

$$\begin{cases} 2x+y=4 \\ x-2y=-3 \end{cases}$$

(%i1) solve([2\*x+y=4,x-2\*y=-3],[x,y]);

(%o1) [[x=1,y=2]]

※ 「solve([ 變數算式 ],[ 變數 ])」指令表示求解。

(2)試說明其幾何意義

\*  $x=1, y=2$  為  $2x+y=4$  與  $x-2y=-3$  的交點(一組解)

**※本題不建議使用 Maxima 解題※**

**隨堂練習：**試求直線  $L_1 : 2x+3y=3$  與直線  $L_2 : x-2y=5$  的交點坐標

(%i1) solve([2\*x+3\*y=3,x-2\*y=5],[x,y]);

(%o1) [[x=3,y=-1]]

\*  $x=3, y=-1$  為  $L_1 : 2x+3y=3$  與  $L_2 : x-2y=5$  的交點

※ 「solve([ 變數算式 ],[ 變數 ])」指令表示求解。

## P.66

**例題 13：**試解下列各方程組並說明其幾何意義

$$(1) \begin{cases} 2x+y=4 \\ 4x+2y=2 \end{cases}$$

(%i1) solve([2\*x+y=4,4\*x+2\*y=2],[x,y]);

(%o1) [ ]

\*(%o1) [ ]表示無解，兩方程式無交點(無解)

$$(2) \begin{cases} 2x+y=1 \\ 4x+2y=2 \end{cases}$$

(%i1) solve([2\*x+y=1,4\*x+2\*y=2],[x,y]);

solve: dependent equations eliminated: (2)

$$(%o1) \left[ \left[ x = -\frac{(\%r2-1)}{2}, y = \%r2 \right] \right]$$

\*%r2 表示可為任一數，兩方程式無限多解

※「solve([ 變數算式 ], [ 變數 ])」指令表示求解。

**隨堂練習：**試判斷下列二元一次方程組中，何者恰有一組解？何者無解？何者無限多解？

$$(1) \begin{cases} 2x-3y=2 \\ 4x+6y=2 \end{cases}$$

(%i1) solve([2\*x-3\*y=2,4\*x+6\*y=2],[x,y]);

$$(%o1) \left[ \left[ x = \frac{3}{4}, y = -\frac{1}{6} \right] \right]$$

\* $x = \frac{3}{4}, y = -\frac{1}{6}$  為  $2x-3y=2$  與  $4x+6y=2$  的交點(一組解)

$$(2) \begin{cases} 2x-3y=2 \\ 4x-6y=2 \end{cases}$$

(%i1) solve([2\*x-3\*y=2,4\*x-6\*y=2],[x,y]);

$$(%o1) []$$

\*(%o1) [] 表示無解，兩方程式無交點(無解)

$$(3) \begin{cases} 2x-3y=2 \\ 4x-6y=4 \end{cases}$$

(%i1) solve([2\*x-3\*y=2,4\*x-6\*y=4],[x,y]);

solve: dependent equations eliminated: (2)

$$(%o1) \left[ \left[ x = \frac{3\%r2+2}{2}, y = \%r2 \right] \right]$$

\*%r2 表示可為任一數，兩方程式無限多解

※「solve([ 變數算式 ],[ 變數 ])」指令表示求解。

### P.66

**例題 14**：設 $\triangle ABC$ 之三頂點坐標為  $A(6,3)$ ， $B(-3,0)$ ， $C(5,-4)$

(1)求過  $C$  且與  $\overline{AB}$  垂直之直線  $L_1$  方程式

(2)求過  $A$  且與  $\overline{BC}$  垂直之直線  $L_2$  方程式

(3)我們把  $L_1$  與  $L_2$  的交點叫做 $\triangle ABC$ 的垂心，試求此垂心的坐標

**※本題不建議使用 Maxima 解題※**

**隨堂練習**：承例題 14，

(1)求過  $B$  且與  $\overline{AC}$  垂直之直線方程式  $L_3$

(2)驗證  $L_1$ ， $L_2$ ， $L_3$  交於一點(三角形的三個高交於一點)

**※本題不建議使用 Maxima 解題※**

**P.69** **習題 1-3**

1. 觀念題：對的在題號前打○，錯的在題號前打×

\_\_\_ (1) 水平直線的斜率為 0

\_\_\_ (2) 鉛錘直線的斜率為不存在

\_\_\_ (3) 設直線  $L: 2x-3y+4=0$ ，則直線  $L$  通過一、三、四象限

\_\_\_ (4) 設  $a, b, c$  為整數，若  $a \mid (b+c)$  且  $a \mid b$ ，則  $a \mid c$

\_\_\_ (5) 在坐標平面上，二元一次方程式  $x=2$  的圖形為一點

\_\_\_ (6) 設  $b \neq 0$ ，若直線  $L: ax+by+c=0$ ，則與直線  $L$  平行的直線方程式為  $ax+by+k=0$   
( $k \neq c$ )

\_\_\_ (7) 設  $b \neq 0$ ，若直線  $L: ax+by+c=0$ ，則與直線  $L$  垂直的直線方程式為  $bx-ay+k=0$

**※本題不建議使用 Maxima 解題※**

2. 如右圖所示， $ABCD$  為一矩形，則  $a=$ \_\_\_， $b=$ \_\_\_， $c=$ \_\_\_， $d=$ \_\_\_

**※本題不建議使用 Maxima 解題※**

3. 設  $A(5,-2)$ ， $B(3,4)$ ， $C(7,a)$ ， $D(2,1)$

(1) 若  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ，則  $a=$ \_\_\_

(%i1) solve([(((−2)−4)/(5−3))=(a−1)/(7−2)], [a]);

(%o15) [a=−14]

\* 若  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ， $\overline{AB}$  斜率 =  $\overline{CD}$  斜率

(2) 若  $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ ，則  $a=$ \_\_\_

(%i1) solve([(((−2)−4)/(5−3))\*(a−1)/(7−2)=−1], [a]);

(%o1) [a= $\frac{8}{3}$ ]



\* 若  $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ ， $\overline{AB}$  斜率  $\times$   $\overline{CD}$  斜率  $= -1$

※ 「solve([ 變數算式 ], [ 變數 ])」指令表示求解。

4. 設  $ABCDE$  是坐標平面上一個正五邊形且  $\overline{CD} \parallel x$  軸，試將直線  $AB$  的斜率，直線  $BC$  的斜率，直線  $DE$  的斜率，直線  $EA$  的斜率由大到小排列

※本題不建議使用 Maxima 解題※

### P.70

5. 試求下列的直線方程式：

(1) 斜率為  $-\frac{3}{2}$  且過點  $(-2, 1)$

(2) 斜率為  $\frac{4}{3}$  且  $y$  截距為  $-2$

(3) 過點  $(2, -3)$  與  $(-4, 1)$

(4)  $x$  截距為  $3$ ， $y$  截距為  $-4$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

6.

(1) 求過點  $(3, -4)$  且與直線  $3x - 2y - 6 = 0$  平行之直線方程式

(2) 求過點  $(3, -4)$  且與直線  $3x - 2y - 6 = 0$  垂直之直線方程式

※本題不建議使用 Maxima 解題※

7. 求過直線  $3x - 2y - 4 = 0$  及  $2x - y - 3 = 0$  之交點且過  $(3, -2)$  的直線方程式

(%i1) solve([3\*x-2\*y-4=0,2\*x-y-3=0],[x,y]);

(%o1) [[x=2,y=1]]

(%i2) solve([a\*2+b=1, a\*3+b=-2],[a,b]);

(%o2) [[a=-3,b=7]]

\*兩直線交點為(2,1)，通過(2,1)與(3,-2)的直線方程式為  $3x+y+7=0$

※「solve([變數算式],[變數])」指令表示求解。

8.設 $\triangle ABC$ 之三頂點坐標為  $A(6,3)$ ， $B(-3,0)$ ， $C(5,-4)$

(1)求 $\overline{AB}$ 的垂直平分線方程式  $L_1$

(2)求 $\overline{BC}$ 的垂直平分線方程式  $L_2$

(3)我們把  $L_1$  與  $L_2$  的交點叫做 $\triangle ABC$ 的外心，求 $\triangle ABC$ 之外新坐標

(4)求 $\triangle ABC$ 之外接圓面積

※本題不建議使用 Maxima 解題※

9.設 $\triangle ABC$ 之三頂點坐標為  $A(6,3)$ ， $B(-3,0)$ ， $C(5,-4)$

(1)求 $\overline{BC}$ 的中線方程式  $L_1$

(2)求 $\overline{AC}$ 的中線方程式  $L_2$

(3)我們把  $L_1$  與  $L_2$  的交點叫做 $\triangle ABC$ 的重心，求 $\triangle ABC$ 之重心  $G$  坐標

(4)求過  $G$  且平行 $\overline{BC}$ 的直線方程式  $L_3$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

10.在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A=90^\circ$ ，若  $A(3,-2)$ ， $B(-1,4)$ ， $C(a,-1)$ 且  $a$  為實數，試回答下列問題

(1)求  $a$  之值

(%i1) solve([(((3-(-2))-4)/((-1)-(-2)))\*((-2)-(-1))/((3-a)-(-1))=-1],[a]);

(%o1) [a= $\frac{9}{2}$ ]

(2)求 $\triangle ABC$  斜邊 $\overline{BC}$ 的中點坐標 M

(%i1) solve([(9/2+(-1))/2=mx,(4-(-1))/2=my],[mx,my]);

(%o1) [[mx= $\frac{7}{4}$ ,my= $\frac{3}{2}$ ]]

※「solve([ 變數算式 ],[ 變數 ])」指令表示求解。

(3)求 $\overline{MA}$ 、 $\overline{MB}$ 、 $\overline{MC}$ ，並驗證直角三角形的斜邊中點到三頂點等距離

※本小題不建議使用 Maxima 解題※

11.設三直線  $L_1 : 2x-y=3$ 、 $L_2 : 3x-2y=4$ 、 $L_3 : x+ay=5$

(1)求  $L_1$  與  $L_2$  的交點坐標

(%i1) solve([2\*x-y=3,3\*x-2\*y=4],[x,y]);

(%o1) [[x=2,y=1]]

※「solve([ 變數算式 ],[ 變數 ])」指令表示求解。

(2)若三直線不能圍成三角形，求 a 之值

※本題不建議使用 Maxima 解題※

12.試由例題 14 所得之垂心、習題 8 之外心、習題 9 之重心驗證三點是否共線(三角形之重心、垂心與外心這三點會再同一線上，此直線稱為歐拉線)

※本題不建議使用 Maxima 解題※

## 1-4 複數與複數平面

### P.72

**例題 1**：把 10 分成兩數，使這兩數的乘積等於 40，求這兩數

### P.73

**隨堂練習**：試將下列各數，用虛數單位來表示

(1)  $\sqrt{-5}$

(%i1) sqrt(-5);

(%o1)  $\sqrt{5} \%i$

(2)  $\sqrt{-49}$

(%i1) sqrt(-49);

(%o1) 7 %i

(3)  $\sqrt{-\frac{2}{3}}$

(%i1) sqrt(-2/3);

(%o1)  $\frac{\sqrt{2} \%i}{\sqrt{3}}$

\* %i 代表  $\sqrt{-1}=i$

※「sqrt( 數值 )」指令表示數值開根號。

### P.74

**例題 2**：試指出下列各複數的實部與虛部

(1)  $-2+5i$

(%i1) imagpart(-2+5\*%i);

(%o1) 5

(%i2) realpart(-2+5\*%i);

(%o2) -2

\* 實部為-2，虛部為 5

(2)  $3-\sqrt{2}i$

(%i1) imagpart(3-sqrt(2)\*%i);

(%o1)  $-\sqrt{2}$

(%i2) realpart(3-sqrt(2)\*%i);

(%o2) 3

\* 實部為 3，虛部為  $-\sqrt{2}$

(3)  $-7i$

(%i1) imagpart(-7\*%i);

(%o1) -7

(%i2) realpart(-7\*%i);

(%o2) 0

\* 實部為 0，虛部為-7

(4)  $-3+i$

(%i1) imagpart(-3+%i);

(%o1) 1

```
(%i2) realpart(-3+%i);
```

```
(%o2) -3
```

\* 實部為-3，虛部為 1

```
(5) 2
```

```
(%i1) imagpart(2);
```

```
(%o1) 0
```

```
(%i2) realpart(2);
```

```
(%o2) 2
```

\* 實部為 0，虛部為 2

```
(6) 0
```

```
(%i1) imagpart(0);
```

```
(%o1) 0
```

```
(%i2) realpart(0);
```

```
(%o2) 0
```

\* 實部為 0，虛部為 0

\* %i 代表  $\sqrt{-1}=i$

※ 「imagpart( 數值 )」指令表示找出數值虛部係數

※ 「realpart( 數值 )」指令表示找出數值實部係數

**隨堂練習：**試指出下列各複數的實部與虛部

```
(1) 1+i
```

```
(%i1) imagpart(1+%i);
```

(%o1) 1

(%i2) realpart(1+%i);

(%o2) 1

\* 實部為-2，虛部為 5

(2)  $-2-3\sqrt{2}i$

(%i1) imagpart(-2-3\*sqrt(2)\*%i);

(%o1)  $-3\sqrt{2}$

(%i2) realpart(-2-3\*sqrt(2)\*%i);

(%o2) -2

\* 實部為-2，虛部為  $-3\sqrt{2}$

(3)  $9i-4$

(%i1) imagpart(9\*%i-4);

(%o1) 9

(%i2) realpart(9\*%i-4);

(%o2) -4

\* 實部為-4，虛部為 9

(4)  $i$

(%i1) imagpart(%i);

(%o1) 1

(%i2) realpart(%i);

(%o2) 0

\* 實部為 0，虛部為 1

(5) -7

(%i1) imagpart(-7);

(%o1) 0

(%i2) realpart(-7);

(%o2) 7

\* 實部為 7，虛部為 0

\* %i 代表  $\sqrt{-1}=i$

※ 「imagpart( 數值 )」指令表示找出數值虛部係數

※ 「realpart( 數值 )」指令表示找出數值實部係數

**例題 3**：設 a，b 都是實數，若  $2a-2+3i=4+(b+2)i$ ，求 a，b 之值

(%i1) solve([2\*a-2=4],[a]);

(%o1) [a=3]

(%i2) solve([3=(b+2)],[b]);

(%o2) [b=1]

\* 上式實部=實部，虛部=虛部，故可知  $2a-2=4$ 、 $(b+2)i=3i$

※ 「solve([ 變數算式 ],[ 變數 ])」指令表示求解。

## P.75

**例題 4**：在複數平面上，標出下列複數的位置

(1)  $3+2i$

(2)  $3-2i$



(3)-4-5i

(4)-2

(5)4i

**※本題不建議使用 Maxima 解題※**

**隨堂練習：**寫出下列各複數的共軛複數：

(1)-4-8i

(%i1) conjugate(-4-8\*%i);

(%o1) 8 %i-4

(2)-6+3i

(%i1) conjugate(-6+3\*%i);

(%o1) -3 %i-6

(3)4i

(%i1) conjugate(4\*%i);

(%o1) -4 %i

(4)-7i

(%i1) conjugate(-7\*%i);

(%o1) 7 %i

(5)-4

(%i1) conjugate(-4);

(%o1) -4

\* %i 代表  $\sqrt{-1}=i$

※ 「conjugate (數值)」 指令表示列出複數之共軛複數。

**例題 5**：若  $z_1=3+2i$ ， $z_2=4-5i$ ，試求下列各式

(1)  $z_1 + z_2$

(%i1) z1:3+2\*%i;

(%o1) 2 %i+3

(%i2) z2:4-5\*%i;

(%o2) 4-5 %i

(%i3) z1+z2;

(%o3) 7-3 %i

(2)  $z_1 - z_2$

(%i4) z1-z2;

(%o4) 7 %i-1

(3)  $z_1 \cdot z_2$

(%i5) ratsimp(z1\*z2);

(%o5) 22-7 %i

**(%i6) z1\*z2;**

**(%o6) (4-5 %i) (2 %i+3)**

\* 若無 ratsimp 指令，只會將  $z_1 \cdot z_2$  列出

\* %i 代表  $\sqrt{-1}=i$

※  $z=a+bi$ ；定義一定值：須以” :”定義； 定義後只需輸入 z 即可得  $a+bi$ 。

※ 「ratsimp ([ 算式 ] × [ 算式 ])」指令表示化簡算式。

隨堂練習：若  $z_1=2-3i$ ， $z_2=-2-i$ ，試求下列各式

(1)  $z_1 + z_2$

(%i1) z1:2-3\*i;

(%o1) 2-3 %i

(%i2) z2:-2-%i;

(%o2) -%i-2

(%i3) z1+z2;

(%o3) -4 %i

(2)  $z_1 - z_2$

(%i4) z1-z2;

(%o4) 4-2 %i

(3)  $z_1 \cdot z_2$

(%i5) ratsimp(z1\*z2);

(%o5) 4 %i-7

**(%i5) z1\*z2;**

**(%o5) (2-3 %i) (-%i-2)**

\* 若無 ratsimp 指令，只會將  $z_1 \cdot z_2$  列出

\* %i 代表  $\sqrt{-1}=i$

※  $z=a+bi$ ；定義一定值：須以” :”定義； 定義後只需輸入 z 即可得  $a+bi$ 。

※ 「ratsimp ([ 算式 ] × [ 算式 ])」指令表示化簡算式。

**P.78**

例題 6：化簡下列各式

$$(1) i^{2006}$$

$$(\%i1) \%i^{2006};$$

$$(\%o1) -1$$

$$(2) i+i^2+i^3+i^4+\cdots+i^{10}$$

方法 1

$$(\%i1) \text{sum}(\%i^n, n, 1, 10);$$

$$(\%o1) \%i-1$$

\* sum 表示連加，【 $\%i^n$ (計算式), n(變數), 1(起始), 10(結束);】；表示以 n 為變數，n 由 1 連加至 10，變數 n 代入  $\%i^n(=i^n)$  此算式中

方法 2

$$(\%i1) m:0; \text{for } n:1 \text{ thru } 10 \text{ do } (m:m+\%i^n);$$

$$(\%o1) 0$$

$$(\%o2) \text{done}$$

$$(\%i3) m;$$

$$(\%o3) \%i-1$$

\* m:0 表示由 0 開始，n:1 thru 10 (n 為變數且 n 由 1 到 10)，

\* \*  $\%i$  代表  $\sqrt{-1}=i$

說明：m:m+%i^n；當 n=1 時， $m_{(1)} = m_{(0)} + i^1 = 0 + \%i^1 = \%i$

當 n=2 時， $m_{(2)} = m_{(1)} + i^2 = \%i + \%i^2 = \%i-1$

當 n=3 時， $m_{(3)} = m_{(2)} + i^3 = \%i-1 + \%i^3 = -1$

$$\text{當 } n=4 \text{ 時, } m_{(4)} = m_{(3)} + i^4 = -1 + i^4 = 0$$

$$\text{當 } n=5 \text{ 時, } m_{(5)} = m_{(4)} + i^5 = 0 + i^5 = i$$

$$\text{當 } n=6 \text{ 時, } m_{(6)} = m_{(5)} + i^6 = i + i^6 = i-1$$

$$\text{當 } n=7 \text{ 時, } m_{(7)} = m_{(6)} + i^7 = i-1 + i^7 = -1$$

$$\text{當 } n=8 \text{ 時, } m_{(8)} = m_{(7)} + i^8 = -1 + i^8 = 0$$

$$\text{當 } n=9 \text{ 時, } m_{(9)} = m_{(8)} + i^9 = 0 + i^9 = i$$

$$\text{當 } n=10 \text{ 時, } m_{(10)} = m_{(9)} + i^{10} = i + i^{10} = i-1$$

補充 MAXIMA 迴圈範例：試求  $1+2+3+4+5+\cdots+100$ ，其總和為？

說明：

$$m_{(n)}:m_{(n-1)}+n; \text{ 當 } n=1 \text{ 時, } m_{(1)} = m_{(0)} + 1 = 0 + 1 = 1$$

$$\text{當 } n=2 \text{ 時, } m_{(2)} = m_{(1)} + 2 = 1 + 2 = 3$$

$$\text{當 } n=3 \text{ 時, } m_{(3)} = m_{(2)} + 3 = (1+2) + 3 = 6$$

$$\text{當 } n=4 \text{ 時, } m_{(4)} = m_{(3)} + 4 = (1+2+3) + 4 = 10$$

$$\text{當 } n=5 \text{ 時, } m_{(5)} = m_{(4)} + 5 = (1+2+3+4) + 5 = 15$$

同理可知...

$$\text{當 } n=99 \text{ 時, } m_{(99)} = m_{(98)} + 99 = (1+2+3+\cdots+98) + 99 = 4950$$

$$\text{當 } n=100 \text{ 時, } m_{(100)} = m_{(99)} + 100 = (1+2+3+\cdots+98+99) + 100 = 5050$$

於 MAXIMA 迴圈寫法為

`m:0; --- m 從 0 開始`

`for n:1 thru 100 --- n 從 1 到 100 (從 1 加到 100)`

`do (m:m+n); --- 算出  $m_{(n)}:m_{(n-1)}+n$`

`(%i1) m:0; for n:1 thru 100 do (m:m+n);`※

`(%o1) 0`



(%o2) done

(%i3) m;

(%o3) 5050

\*可知  $1+2+3+4+5+\cdots+100$ ，其總和為 5050

---

### P.79

**例題 7**：設  $z_1=-3+5i$ ， $z_2=2-3i$ ，試求：

(1)  $\overline{z_1} + \overline{z_2}$

(%i1) z1:-3+5\*i;

(%o1) 5 %i-3

(%i2) z2:2-3\*i;

(%o2) 2-3 %i

(%i3) conjugate(z1)+ conjugate(z2);

(%o3) -2 %i-1

(2)  $\overline{\overline{z_1} + \overline{z_2}}$

(%i4) conjugate(z1+z2);

(%o4) -2 %i-1

(3)  $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

(%i5) ratsimp (conjugate(z1)\* conjugate(z2));

(%o5) 9-19 %i

$$(4) \overline{z_1 \cdot z_2}$$

(%i6) ratsimp (conjugate(z1\*z2));

(%o6) 9-19 %i

\* %i 代表  $\sqrt{-1}=i$

※ 「conjugate (數值)」指令表示列出複數之共軛複數。

**隨堂練習：**設  $z_1=4-3i$ ， $z_2=5+2i$ ，試求：

$$(1) \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

(%i1) z1:4-3\*%i;

(%o1) 4-3 %i

(%i2) z2:5+2\*%i;

(%o2) 2 %i+5

(%i3) conjugate(z1)+ conjugate(z2);

(%o3) %i+9

$$(2) \overline{z_1 + z_2}$$

(%i4) conjugate(z1+z2);

(%o4) %i+9

$$(3) \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

(%i5) ratsimp (conjugate(z1)\* conjugate(z2));

(%o5) 7 %i+26

$$(4) \overline{z_1 \cdot z_2}$$

(%i6) ratsimp (conjugate(z1\*z2));

(%o6) 7 %i+26

\* %i 代表  $\sqrt{-1}=i$

※ 「conjugate (數值)」指令表示列出複數之共軛複數。

※ 「ratsimp ([ 算式 ] × [ 算式 ])」指令表示化簡算式。

## P.80

**例題 8**：將下列各式化簡成  $a+bi$  ( $a$ 、 $b$  均為實數) 的形式：

(1)  $\frac{5+4i}{2+3i}$

(2)  $\frac{3+2i}{4-3i}$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

**隨堂練習**：化簡下列各式

(1)  $\frac{7+i}{1+2i}$

(2)  $\frac{5+3i}{2-4i}$

※本題不建議使用 Maxima 解題※

**例題 9**：化簡下列各式

(1)  $\sqrt{-3} \times \sqrt{-5}$

(%i1) rootscontract(sqrt(-3)\*sqrt(-5));

(%o1)  $-\sqrt{15}$



(2)  $\sqrt{(-3)(-5)}$

```
(%i1) sqrt((-3)*(-5));
```

```
(%o1)  $\sqrt{15}$ 
```

(3)  $\sqrt{-3} \times \sqrt{5}$

```
(%i1) rootscontract(sqrt(-3)*sqrt(5));
```

```
(%o1)  $\sqrt{-15}$ 
```

```
(%i2) %o1;
```

```
(%o2)  $\sqrt{15} \%i$ 
```

(4)  $\sqrt{(-3) \times 5}$

```
(%i1) sqrt((-3)*(5));
```

```
(%o1)  $\sqrt{15} \%i$ 
```

(5)  $\frac{\sqrt{-5}}{\sqrt{-3}}$

(6)  $\sqrt{\frac{-5}{-3}}$

(7)  $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{-3}}$

(8)  $\sqrt{\frac{5}{-3}}$

**※ (5)~(8)不建議使用 Maxima 解題※**

\* %i 代表  $\sqrt{-1}=i$

※ 「rootscontract((sqrt 數值)\*(sqrt 數值))」指令執行乘開兩根號數值；

※ 「sqrt ( 數值 )」指令表示數值開根號。

## P.82

例題 10：設  $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

(1) 驗證  $\bar{\omega}$  與  $\omega^2$  是否相等

(%i1) w:(-1+sqrt(3)\*%i)/2;

(%o1)  $\frac{\sqrt{3}\%i-1}{2}$

(%i2) ratsimp(conjugate(w));

(%o2)  $-\frac{\sqrt{3}\%i+1}{2}$

(%i3) ratsimp(w^2);

(%o3)  $-\frac{\sqrt{3}\%i+1}{2}$

\*  $\bar{\omega}$  與  $\omega^2$  相等

(2) 驗證  $\omega$  與  $\bar{\omega}$  是否為方程式  $x^2+x+1=0$  的根

(%i4) solve([w^2+w+1=x],[x]);

(%o4) [x=0]

(%i5) solve([conjugate(w)^2+ conjugate(w)+1=x],[x]);

(%o5) [x=0]

\*  $\omega$  與  $\bar{\omega}$  代入方程式  $x^2+x+1$  皆 0，表示  $\omega$  與  $\bar{\omega}$  是方程式  $x^2+x+1=0$  的根

\* %i 代表  $\sqrt{-1}=i$

※  $z=a+bi$ ；定義一定值：須以” :”定義； 定義後只需輸入 z 即可得  $a+bi$ 。

※ 「conjugate (數值)」指令表示列出複數之共軛複數。

※ 「ratsimp([ 算式 ] × [ 算式 ])」指令表示化簡算式。

※ 「solve([ 變數算式 ], [ 變數 ])」指令表示求解。

隨堂練習：設  $\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ ，試求：

(1)  $\omega^3$ ， $\omega^4$ ， $\omega^5$  之值

(%i1) w:(-1+sqrt(3)\*%i)/2;

(%o1)  $\frac{\sqrt{3}\%i-1}{2}$

(%i2) ratsimp(w^3);

(%o2) 1

(%i3) ratsimp(w^4);

(%o3)  $\frac{\sqrt{3}\%i-1}{2}$

(%i4) ratsimp(w^5);

(%o4)  $-\frac{\sqrt{3}\%i+1}{2}$

(2)  $\omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{20}$  之值

方法 1

(%i5) ratsimp(sum((( -1+sqrt(3)\*%i)/2)^n, n, 1, 20));

(%o4) 1

\*sum 表示連加，【 $(-1 + \sqrt{3}i)/2$  (計算式), n(變數), 1(起始), 20(結束);】；表示

以 n 為變數，n 由 1 連加至 20，變數 n 代入  $(-1 + \sqrt{3}i)/2$  (= $\left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right)^n$ ) 此

算式中

方法 2

(%i1) m:0; for n:1 thru 20 do ratsimp(m:m+((-1+sqrt(3)\*%i)/2)^n);

(%o1) 0

(%o2) done $\left(\frac{\sqrt{3}\%i-1}{2}\right)^{20}$ 

(%i3) m;

(%o3)  $\left(\frac{\sqrt{3}\%i-1}{2}\right)^{20} + \left(\frac{\sqrt{3}\%i-1}{2}\right)^{19} + \left(\frac{\sqrt{3}\%i-1}{2}\right)^{18} + \left(\frac{\sqrt{3}\%i-1}{2}\right)^{17} + \left(\frac{\sqrt{3}\%i-1}{2}\right)^{17} +$   
 $\left(\frac{\sqrt{3}\%i-1}{2}\right)^{16} + \left(\frac{\sqrt{3}\%i-1}{2}\right)^{15} + \left(\frac{\sqrt{3}\%i-1}{2}\right)^{14} + \left(\frac{\sqrt{3}\%i-1}{2}\right)^{13} + \left(\frac{\sqrt{3}\%i-1}{2}\right)^{12} + \left(\frac{\sqrt{3}\%i-1}{2}\right)^{11} +$   
 $\left(\frac{\sqrt{3}\%i-1}{2}\right)^{10} + \left(\frac{\sqrt{3}\%i-1}{2}\right)^9 + \left(\frac{\sqrt{3}\%i-1}{2}\right)^8 + \left(\frac{\sqrt{3}\%i-1}{2}\right)^7 + \left(\frac{\sqrt{3}\%i-1}{2}\right)^6 + \left(\frac{\sqrt{3}\%i-1}{2}\right)^5 +$   
 $\left(\frac{\sqrt{3}\%i-1}{2}\right)^4 + \left(\frac{\sqrt{3}\%i-1}{2}\right)^3 + \left(\frac{\sqrt{3}\%i-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}\%i-1}{2}\right)$

(%i4) ratsimp(%o3);

(%o4) -1

\*m:0 表示由 0 開始，n:1 thru 10 (n 為變數且 n 由 1 到 20)，

\* %i 代表  $\sqrt{-1}=i$ 

※ $z=a+bi$ ；定義一定值：須以“:”定義；定義後只需輸入 z 即可得 $a+bi$ 。
--

※ 「ratsimp([算式] × [算式])」指令表示化簡算式。

※ 「sum(計算式,變數,起始,結束)」指令表示含變數之算式由起始連加至結束。

**P.84****例題 11**：試判斷下列各一元二次方程式根的性質，並求方程式的解

(1)  $2x^2-5x+1=0$

(%i1) solve([2\*x^2-5\*x+1=0],[x]);

(%o1)  $\left[x=-\frac{\sqrt{17}-5}{4}, x=\frac{\sqrt{17}+5}{4}\right]$ 

(2)  $2x^2+4x+2=0$

(%i1) solve([2\*x^2+4\*x+2=0],[x]);

(%o1) [x=-1]

(3)  $3x^2-5x+3=0$

(%i1) solve([3\*x^2-5\*x+3=0],[x]);

(%o1)  $[x=-\frac{\sqrt{11}i-5}{6}, x=\frac{\sqrt{11}i+5}{6}]$

※ 「solve([ 變數算式 ],[ 變數 ])」指令表示求解。

**隨堂練習：**解下列各方程式：

(1)  $2x^2-4x-1=0$

(%i1) solve([2\*x^2-4\*x-1=0],[x]);

(%o1)  $[x=-\frac{\sqrt{6}-2}{2}, x=\frac{\sqrt{6}+2}{2}]$

(2)  $x^2+x+1=0$  (求出的解與例題 10 的  $\omega$  比較)

(%i1) solve([2\*x^2+x+1=0],[x]);

(%o1)  $[x=-\frac{\sqrt{7}i+1}{4}, x=\frac{\sqrt{7}i-1}{4}]$

\* %i 代表  $\sqrt{-1}=i$

※ 「solve([ 變數算式 ],[ 變數 ])」指令表示求解。

## P.85

**例題 12：**設方程式  $3x^2-5x+k=0$ ，

(1)若此方程式有兩相異實根，求 k 的範圍

(2)若此方程式有兩相等實根，求 k 的值

(3)若此方程式有實根，求 k 的範圍

(4)若此方程式有兩共軛虛根，求 k 的範圍

**※本題不建議使用 Maxima 解題※**

**隨堂練習：**設方程式  $2x^2+3x+k=0$ ，其中  $k$  為實數

(1)若此方程式有實根，求  $k$  的範圍

(2)若此方程式有兩共軛虛根，求  $k$  的範圍

**※本題不建議使用 Maxima 解題※**

**P.86**

**例題 13：**設  $\alpha$  與  $\beta$  為方程式  $x^2+2x+4=0$  的兩根，

(1)求  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ ， $\alpha^2 + \beta^2$  之值

(%i1) solve([2\*x^2+2\*x+4=0],[x]);

(%o1)  $[x = -\frac{\sqrt{7}\%i+1}{2}, x = \frac{\sqrt{7}\%i-1}{2}]$

(%i2) X:-(sqrt(7)\*%i+1)/2;

(%o2)  $-\frac{\sqrt{7}\%i+1}{2}$

(%i3) Y:(sqrt(7)\*%i-1)/2;

(%o3)  $\frac{\sqrt{7}\%i-1}{2}$

(%i4) ratsimp(1/X+1/Y);

(%o4)  $-\frac{1}{2}$

(%i5) ratsimp((1/X)^2+(1/Y)^2);

(%o5)  $-\frac{3}{4}$

(2)求以  $\frac{1}{\alpha}$ ， $\frac{1}{\beta}$  為兩根的一元二次方程式

\* %i 代表  $\sqrt{-1}=i$

**※  $z=a+bi$ ；定義一定值：須以” :”定義； 定義後只需輸入  $z$  即可得  $a+bi$ 。**

**※ 「solve([ 變數算式 ],[ 變數 ])」指令表示求解。**

※ 「sqrt ( 數值 )」指令表示數值開根號。

※ 「ratsimp ([ 算式 ] × [ 算式 ])」指令表示化簡算式。

### P.87

隨堂練習：設  $\alpha$  與  $\beta$  為方程式  $x^2-2x+3=0$  的兩根，

(1) 求  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ ， $\alpha^2 + \beta^2$ ， $\alpha^3 + \beta^3$  之值(提示： $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$ )

(%i1) solve([x^2-2\*x+3=0],[x]);

(%o1) [x=1-√2 %i,x=√2 %i+1]

(%i2) X:1-(sqrt(2)\*%i);

(%o2) 1-√2 %i

(%i3) Y: (sqrt(2)\*%i)+1;

(%o3) √2 %i+1

(%i4) ratsimp(1/X+1/Y);

(%o4)  $\frac{2}{3}$

(%i5) ratsimp(X^2+Y^2);

(%o5) -2

(%i6) ratsimp(X^3+Y^3);

(%o6) -10

(2) 求以  $\alpha^2$ ， $\beta^2$  為兩根的一元二次方程式

(%i7) ratsimp(X^2);

(%o7)  $-2^{\frac{3}{2}}$  %i-1

(%i8) ratsimp(Y^2);

(%o8)  $2^{\frac{2}{3}}$  %i-1

```
(%i9) ratsimp((x-(-2^(3/2)*%i-1))*(x-(2^(3/2)*%i-1)));
```

```
(%o9) x^2+2x+9
```

\* %i 代表  $\sqrt{-1}=i$

※  $z=a+bi$  ; 定義一定值：須以” : ”定義； 定義後只需輸入 z 即可得  $a+bi$ 。

※ 「solve([ 變數算式 ],[ 變數 ])」指令表示求解。

※ 「sqrt( 數值 )」指令表示數值開根號。

※ 「ratsimp([ 算式 ] × [ 算式 ])」指令表示化簡算式。

## P.88

**例題 14**：設  $z_1=3+4i$ ， $z_2=2-i$ ，試求下列各式之值

(1)  $|z_1|$

```
(%i1) z1:3+4*%i;
```

```
(%o1) 4 %i+3
```

```
(%i2) z2:2-%i;
```

```
(%o2) 2-%i
```

```
(%i3) abs(z1);
```

```
(%o3) 5
```

(2)  $|\overline{z_1}|$

```
(%i4) abs(conjugate(z1));
```

```
(%o4) 5
```

(3)  $|z_1 \cdot z_2|$

```
(%i5) abs(z1*z2);
```



$$(\%o5) 5^{3/2}$$

$$(4) |z_1| \cdot |z_2|$$

$$(\%i6) \text{abs}(z1)* \text{abs}(z2);$$

$$(\%o6) 5^{3/2}$$

\* %i 代表  $\sqrt{-1}=i$

※  $z=a+bi$ ；定義一定值：須以”：”定義；定義後只需輸入  $z$  即可得  $a+bi$ 。

※ 「abs( 數值 )」指令表示絕對值。

※ 「conjugate(數值)」指令表示列出複數之共軛複數。

**隨堂練習：**設  $z_1=4-3i$ ， $z_2=1+2i$ ，試求下列各式之值

$$(1) |z_1|^2$$

$$(\%i1) z1:4-3*\%i;$$

$$(\%o1) 4-3 \%i$$

$$(\%i2) z2:1+2*\%i;$$

$$(\%o2) 2 \%i+1$$

$$(\%i3) (\text{abs}(z1))^2;$$

$$(\%o3) 25$$

$$(2) z_1 \cdot \overline{z_1}$$

$$(\%i4) \text{ratsimp}(z1*\text{conjugate}(z1));$$

$$(\%o4) 25$$

$$(3) |z_1 \cdot z_2|$$

$$(\%i5) \text{abs}(z1*z2);$$

(%o5)  $5^{\frac{3}{2}}$

(4)  $|z_1 - z_2|$

(%i6)  $\text{abs}(z_1 - z_2)$ ;

(%o6)  $\sqrt{34}$

\* %i 代表  $\sqrt{-1} = i$

※  $z = a + bi$ ; 定義一定值：須以” : ”定義； 定義後只需輸入  $z$  即可得  $a + bi$ 。

※ 「abs( 數值 )」指令表示絕對值。

※ 「conjugate(數值)」指令表示列出複數之共軛複數。

※ 「ratsimp ([ 算式 ] × [ 算式 ])」指令表示化簡算式。

**P.90** **習題 1-4**

1. 觀念題：對的在題號前打○，錯的在題號前打×

\_\_\_ (1)  $\sqrt{-8} \times \sqrt{-2} = 4$

\_\_\_ (2)  $\overline{-3} = 3$

\_\_\_ (3) 設  $x, y$  為複數，若  $x+yi=0$ ，則  $x=0$  且  $y=0$

\_\_\_ (4) 設  $x, y$  為複數，若  $x^2+y^2=0$ ，則  $x=0$  且  $y=0$

\_\_\_ (5) 若  $z$  為複數，則  $\overline{\overline{z}} = z$

**※本題不建議使用 Maxima 解題※**

2. 化簡下列各式：

(1)  $\sqrt{-5} \times \sqrt{-6}$

(%i1) rootscontract(sqrt(-5)\*sqrt(-6));

(%o1)  $-\sqrt{30}$

(2)  $\sqrt{(-5)(-6)}$

(%i1) sqrt(-5\*-6);

(%o1)  $\sqrt{30}$

(3)  $\sqrt{-5} \times \sqrt{6}$

(%i1) rootscontract(sqrt(-5)\*sqrt(6));

(%o1)  $\sqrt{-30}$

(%i2) %o1;

(%o2)  $\sqrt{30} \ %i$

(4)  $\sqrt{(-5)(6)}$

```
(%i6) sqrt(-5*6);
```

```
(%o6)  $\sqrt{30}$  %i
```

(5)  $\frac{\sqrt{-6}}{\sqrt{-5}}$

(6)  $\sqrt{\frac{-6}{-5}}$

(7)  $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{-5}}$

(8)  $\sqrt{\frac{6}{-5}}$

**※(5)(6)(7)(8)不建議使用 Maxima 解題※**

\* %i 代表  $\sqrt{-1}=i$

※「sqrt ( 數值 )」指令表示數值開根號。

※「rootscontract((sqrt 數值)\*(sqrt 數值))」指令執行乘開兩根號數值;

3. 設  $z=3-2i$ ,  $w=4+3i$ , 試將下列的值化成  $a+bi$  ( $a$ 、 $b$  均為實數) 的形式: (一般我們把  $a+bi$  的形式叫做複數的標準式)

(1)  $\overline{z-w}$

```
(%i1) z:3-2*%i;
```

```
(%o1) 3-2 %i
```

```
(%i2) w:4+3*%i;
```

```
(%o2) 3 %i+4
```

```
(%i3) conjugate(z-w);
```

```
(%o3) 5 %i-1
```

(2)  $\bar{z} - \bar{w}$

(%i4) conjugate(z)-conjugate(w);

(%o4) 5 %i-1

(3)  $z \cdot w$

(%i5) ratsimp(z\*w);

(%o5) %i+18

(4)  $\frac{z}{w}$

(%i6) ratsimp(z/w);

(%o6)  $-\frac{2%i-3}{3%i+4}$

\* %i 代表  $\sqrt{-1}=i$ **※  $z=a+bi$ ; 定義一定值：須以” :”定義； 定義後只需輸入  $z$  即可得  $a+bi$ 。****※ 「abs( 數值 )」指令表示絕對值。****※ 「conjugate(數值)」指令表示列出複數之共軛複數。****※ 「ratsimp ([ 算式 ] × [ 算式 ])」指令表示化簡算式。**4. 設  $P(z)$ ,  $Q(w)$  為複數平面上兩點，其中  $O$  為原點且  $z=1+3i$ ,  $w=6-2i$ , 試求：

(1)  $\overline{OP}$

(%i1) z:1+3\*%i;

(%o1) 3 %i+1

(%i2) w:6-2\*%i;

(%o2) 6-2 %i

(%i3) abs(z);

(%o3)  $\sqrt{10}$

(2)  $\overline{OQ}$

```
(%i4) abs(w);
```

```
(%o4) 2√10
```

(3)  $\overline{PQ}$

```
(%i5) abs(z-w);
```

```
(%o5) 5√2
```

(4) 以 O、P(z)、Q(w) 為頂點的三角形是否為直角三角形？

```
(%i6) solve([(3-0)/(1-0)=mop],[mop]);
```

```
(%o6) [mop=3]
```

```
(%i7) solve([(-2-0)/(6-0)=moq],[moq]);
```

```
(%o7) [moq=-1/3]
```

```
(%i8) solve([(3-(-2))/(1-6)=mpq],[mpq]);
```

```
(%o8) [mpq=-1]
```

\* 若 OPQ 為直角三角形，有任 2 邊斜率相乘將等於 -1，由上可知  $mop \times moq = -1$ ，故

三角形 OPQ 為直角三角形

\* %i 代表  $\sqrt{-1} = i$

※  $z = a + bi$ ；定義一定值：須以“:”定義；定義後只需輸入 z 即可得  $a + bi$ 。

※ 「abs( 數值 )」指令表示絕對值。

※ 「solve([ 變數算式 ], [ 變數 ])」指令表示求解。

5. 試求  $|1+2i| \times |3-4i| \times |2+4i|$  之值

```
(%i1) ratsimp(abs(1+2*i)*abs(3-4*i)*abs(2+4*i));
```

```
(%o1) 50
```

\* %i 代表  $\sqrt{-1}=i$

※ 「abs( 數值 )」指令表示絕對值。

※ 「ratsimp( [ 算式 ] × [ 算式 ] )」指令表示化簡算式。

6. 利用配分法解下列各方程式：

(1)  $x^2-6x+4=0$

(%i1) solve([x^2-6\*x+4=0],[x]);

(%o1) [x=3- $\sqrt{5}$ , x= $\sqrt{5}+3$ ]

(2)  $2x^2-4x+6=0$

(%i1) solve([2\*x^2-4\*x+6=0],[x]);

(%o1) [x=1- $\sqrt{2}$ %i, x= $\sqrt{2}$ %i+1]

\* %i 代表  $\sqrt{-1}=i$

※ 「solve( [ 變數算式 ], [ 變數 ] )」指令表示求解。

7. 設方程式  $2x^2-3x+k=0$ ，其中 k 為實數

(1) 若此方程式有兩相異實根，求 k 的範圍

(2) 若此方程式有兩相等實根，求 k 的範圍

(3) 若此方程式有實根，求 k 的範圍

(4) 若此方程式有兩共軛虛根，求 k 的範圍

※本題不建議使用 Maxima 解題※

## P.91

8. 甲乙兩人同解一個一元二次方程式，甲生看錯 x 項係數，解得兩根為 3 與 -4，以生



看錯常數項係數，解得兩根為 7 與-3，試求原方程式正確的兩根

```
(%i1) ratsimp((x-3)*(x+4));
```

```
(%o1) x2+x-12
```

```
(%i2) ratsimp((x-7)*(x+3));
```

```
(%o2) x2-4x-21
```

```
(%i3) factor(x2-4*x-12);
```

```
(%o3) (x-6)(x+2)
```

\* 原方程式正確的兩根為 6 與-2

※ 「factor( 數值 )」指令表示求因式分解。

※ 「ratsimp ( [ 算式 ] × [ 算式 ] )」指令表示化簡算式。

9. 化簡下列各式

$$(1) \left( \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right)^2$$

```
(%i1) ratsimp((((1+%i)/sqrt(2))^2);
```

```
(%o1) %i
```

$$(2) \left( \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right)^{10}$$

```
(%i1) ratsimp((((1+%i)/sqrt(2))^10);
```

```
(%o1) %i
```

\* %i 代表  $\sqrt{-1}=i$

※ 「sqrt ( 數值 )」指令表示數值開根號。

※ 「ratsimp ( [ 算式 ] × [ 算式 ] )」指令表示化簡算式。



10.在複數平面上， $|z|$  表示複數平面上  $z$  與原點的距離，所以  $|z|=1$  即為與原點的距離為 1 的所形成的圖形，如右圖

根據上述的說明，請畫出  $|z-i|=1$  的圖形，並求此圖形所圍成的區域面積

**※本題不建議使用 Maxima 解題※**

**P.92****綜合練習**

1. 欲判斷 677 是否為質數，則最多需要用多少個值數來檢驗，就可以判斷出 677 是否為質數？

```
(%i1) for i:1 thru 677 do (if primep(i)=true then print(i));
```

```
(%o1)
```

```
* i:1 thru 677 ( i 範圍為 1~677 ) ; if primep(i)=true ( 如果 i 判斷後是質數 ) ; print(i)
```

```
(列出 i)
```

2. 設  $a$  為整數，若  $(a, 12) = 1$ ，則下列哪些選項是正確的？

(1)  $(a, 18) = 1$

(2)  $(a, 60) = 1$

(3)  $(a, 12^2) = 1$

(4)  $(a^2, 12) = 1$

(5)  $(a^2, 12^2)$

**※本題不建議使用 Maxima 解題※**

3. 有一張長 1130 cm，寬 791 cm 的長方形紙片，現在將此長方形紙片剪去一個最大正方形後，會剩下一長方形紙片，再將剩下的長方形紙片剪去一個最大正方形，如此繼續下去，直到剩下的紙片是正方形為止，則最後剩下的正方形紙片的邊長為多少 cm？(提示：利用輾轉相除法概念)

```
(%i1) gcd(1130,791);
```

```
(%o1) 113
```

**※「gcd( 數值, 數值 )」指令表示求最大公因數。**

4.  $2^{30}$  除以 10 的餘數為多少？

```
(%i1) remainder(230,10);
```

```
(%o1) 4
```

※ 「remainder ( 被除數,除數 )」指令表示求餘數。

5. 設  $a = \sqrt{5 + \sqrt{31}}$ ，則 a 在哪兩個連續整數之間？

```
(%i1) float(sqrt(5+sqrt(31)));
```

```
(%o1) 3.250809801084958
```

\*a 介於 3~4 之間

※ 「float( 數值 )」指令表示將結果轉換為小數。

※ 「sqrt ( 數值 )」指令表示數值開根號。

6. 若 A(0,-1)，B(x,2)，C(1,3)，D(-2,y) 四點共線，求 x+y 之值

```
(%i1) solve([(3-(-1))/(1-0)=mac],[mac]);
```

```
(%o1) [mac=4]
```

```
(%i2) solve([(2-(-1))/(x-0)=4],[x]);
```

```
(%o2) [x= $\frac{3}{4}$ ]
```

```
(%i3) solve([(3-2)/(1-x)=4],[x]);
```

```
(%o3) [x= $\frac{3}{4}$ ]
```

```
(%i4) solve([(2-(-1))/(x-0)=(3-2)/(1-x)],[x]);
```

```
(%o4) [x= $\frac{3}{4}$ ]
```

```
(%i5) solve([(3-y)/(1-(-2))=4],[y]);
```

```
(%o5) [y=-9]
```

```
(%i6) solve([((-1)-y)/(0-(-2))=4],[y]);
```

(%o6) [y=-9]

(%i7) solve([(3-y)/(1-(-2))=(-1-y)/(0-(-2))],[y]);

(%o7) [y=-9]

(%i8) 3/4+(-9);

(%o8)  $-\frac{33}{4}$ 

(%i9) float(-33/4);

(%o9) -8.25

※ 「float( 數值 )」指令表示將結果轉換為小數。

※ 「solve([ 變數算式 ],[ 變數 ])」指令表示求解。

7. 設直線 L 的直線方程式為  $2x-3y=4$ ，則下列何者正確？(1) 直線 L 的 x 截距為 2 (表示  $y=0$ ，帶入方程式)方法 1

(%i1) solve([2\*x-3\*0=4],[x]);

(%o1) [x=2]

方法 2

(%i1) solve([2\*2-3\*0=m],[m]);

(%o1) [m=4]

\* 直線 L 的 x 截距為 2 --- 本題正確

(2) 直線 L 的 y 截距為  $\frac{4}{3}$  (表示  $x=0$ ，帶入方程式)方法 1

(%i1) solve([2\*0-3\*y=4],[y]);

(%o1) [y=- $\frac{4}{3}$ ]

方法 2

```
(%i1) solve([2*0-3*4/3=n],[n]);
```

```
(%o1) [n=-4]
```

\*直線 L 的 y 截距為  $\frac{4}{3}$  --- 本題為非

(3) 直線 L 的斜率為  $\frac{3}{2}$  (將(2,0)&(0,-4/3)帶入計算)

```
(%i1) solve([(0-(-4/3))/(2-0)=ML],[ML]);
```

```
(%o1) [ML= $\frac{2}{3}$ ]
```

\*直線 L 的斜率為  $\frac{2}{3}$  --- 本題為非

(4) 直線 L 過點 P(5,2) (將 x=5, y=2 帶入直線 L 方程式)

```
(%i1) solve([2*5-3*2=Z],[Z]);
```

```
(%o1) [Z=4]
```

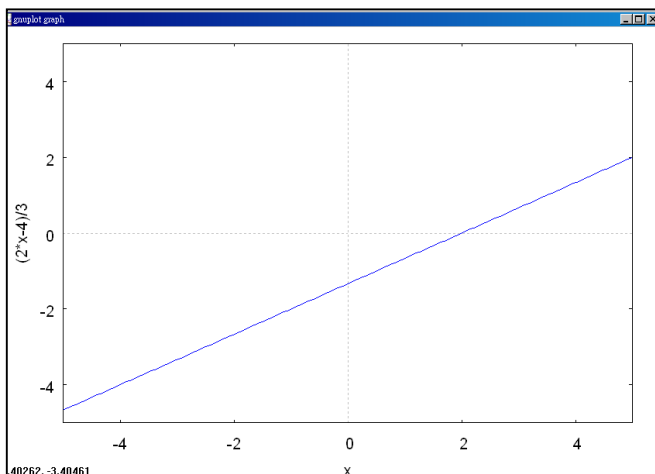
\*點 P(5,2) 帶入直線 L 方程式成立 --- 本題正確

※ 「solve([ 變數算式 ],[ 變數 ])」指令表示求解。

(5) 直線 L 通過第一、三、四象限 ( 將  $2x-3y=4$  轉換成  $y=(2x-4)/3$  )

```
(%i1) plot2d([(2*x-4)/3],[x,-5,5],[y,-5,5]);
```

```
(%o1)
```



\*由圖可知直線  $L$  通過第一、三、四象限

### P.93

8. 已知三直線  $L_1 : 2x+y=5$  ,  $L_2 : x-y=4$  ,  $L_3 : 2x-3y=5$

(1) 求  $L_1$  與  $L_2$  的交點坐標

(%i1) solve([2\*x+y=5,x-y=4],[x,y]);

(%o1) [[x=3,y=-1]]

\* $L_1$  與  $L_2$  的交點坐標為( 3 , -1 )

(2) 求過  $L_1$  與  $L_2$  的交點坐標且與  $L_3$  垂直的直線方程式

(%i2) solve([2/3\*m2=-1],[m2]);

(%o2) [m2=- $\frac{3}{2}$ ]

(%i3) solve([3\*(3)+2\*(-1)=c],[c]);

(%o3) [c=7]

\*過  $L_1$  與  $L_2$  的交點與垂直  $L_3$  的直線方程式為  $3x+2y=7$

(3) 求過  $L_1$  與  $L_2$  的交點坐標且與  $L_3$  平行的直線方程式

(%i4) solve([2/3=m3],[m3]);

(%o4) [m3= $\frac{2}{3}$ ]

(%i5) solve([2\*(3)-3\*(-1)=d],[d]);

(%o5) [d=9]

\*過  $L_1$  與  $L_2$  的交點與  $L_3$  平行的直線方程式為  $2x-3y=9$

※「solve([ 變數算式 ],[ 變數 ])」指令表示求解。

9. A(15,10) , B(9,18) , C(-11,3) , D(-5,-5) 為坐標平面上四點，則下列選項何者為真？

(1) 四邊形 ABCD 是一個平行四邊形

(%i1) solve([(10-18)/(15-9)=mab],[mab]);

(%o1) [mab=- $\frac{4}{3}$ ]

(%i2) solve([( (-5)-3)/((-5)-(-11)) =mcd],[mcd]);

(%o2) [mcd=- $\frac{4}{3}$ ]

(%i3) solve([(10-(-5))/(15-(-5))=mad],[mad]);

(%o3) [mad= $\frac{3}{4}$ ]

(%i4) solve([(18-3)/(9-(-11))=mbc],[mbc]);

(%o4) [mbc= $\frac{3}{4}$ ]

\*  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$  且  $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ，故 ABCD 此四邊行為平行四邊形

(2) 四邊形 ABCD 是一個長方形

(%i5) (%o1)\*(%o4);

(%o5) [mab\*mbc=-1]

(%i6) (%o1)\*(%o3);

(%o6) [mab\*mad=-1]

(%i7) (%o2)\*(%o4);

(%o7) [mbc\*mcd=-1]

(%i8) (%o2)\*(%o3);

(%o8) [mad\*mcd=-1]

\* MAB×MBC= -1; MAB×MAD= -1; MBC×MCD= -1; MAD×MCD= -1 (上述代表垂直)，

因此四邊形 ABCD 為長方形

(3) 四邊形 ABCD 的兩對角線互相垂直

(%i9) solve([( (10-3)/(15-(-11)) )=mac],[mac]);

$$(\%o9) [mac = \frac{7}{26}]$$

$$(\%i10) \text{ solve}([(9 - (-5)) / (18 - (-5)) = mbd], [mbd]);$$

$$(\%o10) [mbd = \frac{14}{23}]$$

$$(\%i11) (\%o9) * (\%o10)$$

$$(\%o11) [mac * mbd = \frac{49}{299}]$$

\* 四邊形 ABCD 的兩對角線  $mac \times mbd \neq -1$ ，因此兩對角線並無互相垂直。

(4) 四邊形 ABCD 的兩對角線互相平分

直線方程式為  $y = ax + b$ ，(將 A、C 與 B、D 四點帶入解聯立方程式)

$$(\%i12) \text{ solve}([10 = 15 * a + b, 3 = -11 * a + b], [a, b]);$$

$$(\%o12) [[a = \frac{7}{26}, b = \frac{155}{26}]]$$

$$(\%i13) \text{ solve}([18 = 9 * a + b, -5 = -5 * a + b], [a, b]);$$

$$(\%o13) [[a = \frac{23}{14}, b = \frac{45}{14}]]$$

$$(\%i14) \text{ solve}([y = x * 7/26 + 155/26, y = x * 23/14 + 45/14], [x, y]);$$

$$(\%o14) [[x = 2, y = \frac{13}{2}]]$$

$$(\%i15) \text{ solve}([\sqrt{((15-2)^2 + (10-13/2)^2)} = Lma], [Lma]);$$

$$(\%o15) \frac{5\sqrt{29}}{2}$$

$$(\%i16) \text{ solve}([\sqrt{((9-2)^2 + (18-13/2)^2)} = Lmc], [Lmc]);$$

$$(\%o16) \frac{5\sqrt{29}}{2}$$

$$(\%i17) \text{ solve}([\sqrt{((-11-2)^2 + (3-13/2)^2)} = Lmb], [Lmb]);$$

$$(\%o17) \frac{5\sqrt{29}}{2}$$

$$(\%i18) \text{ solve}([\sqrt{((-5-2)^2 + ((-5)-13/2)^2)} = Lmd], [Lmd]);$$

$$(\%o18) \frac{5\sqrt{29}}{2}$$



\* 四邊形 ABCD 的兩對角線互相平分，A、B、C、D 四點距離兩對角線交點皆為  $\frac{5\sqrt{29}}{2}$

A(15,10) , B(9,18) , C(-11,3) , D(-5,-5)

(5) 四邊形 ABCD 的面積為 250 平方單位

```
(%i19) solve([sqrt(((15-9)^2)+((10-18)^2))=Lab],[Lab]);
```

```
(%o19) [Lab=10]
```

```
(%i20) solve([sqrt((((-11)-(-5))^2)+((3-(-5))^2))=Lcd],[Lcd]);
```

```
(%o20) [Lcd=10]
```

```
(%i21) solve([sqrt(((15-(-5))^2)+((10-(-5))^2))=Lad],[Lad]);
```

```
(%o21) [Lad=25]
```

```
(%i22) solve([sqrt(((9-(-11))^2)+((18-3)^2))=Lbc],[Lbc]);
```

```
(%o22) [Lbc=25]
```

```
(%i23) 10*25;
```

```
(%o23) 250
```

\* 四邊形 ABCD 的面積為 250 平方單位

※ 「solve([ 變數算式 ], [ 變數 ])」指令表示求解。

10. 若  $\frac{3+4i}{a+bi} = 1-2i$  (a, b 均為實數)，試求  $|a+bi|$  之值

```
(%i1) expand(3+4*i=(a+b*i)*(1-2*i));
```

```
(%o1) 4%i+3=%ib+2b-2%ia+a
```

```
(%i2) solve([4*i=%i*b -2*i*a,3=2*b+a],[a,b]);
```

```
(%o2) [[a=-1,b=2]]
```

```
(%i3) abs(-1+2*i);
```

```
(%o3) sqrt(5)
```

\* %i 代表  $\sqrt{-1}=i$

※ 「expand([ 算式 ] × [ 算式 ])」指令表示展開算式。

※ 「abs( 數值 )」指令表示絕對值。

※ 「solve([ 變數算式 ], [ 變數 ])」指令表示求解。

11. 如果把複數表示成複數平面上的點，請問以  $7+7i$ ， $1-i$ ， $8$  為頂點作成的三角形為哪一種三角形？(直角三角形、等腰三角形、或等腰直角三角形)

三頂點在複數平面上表示為  $(7,7)$ 、 $(1,-1)$ 、 $(8,0)$

```
(%i1) solve([sqrt(((7-1)^2)+((7-(-1))^2))=Lab],[Lab]);
```

```
(%o1) [Lab=10]
```

```
(%i2) solve([sqrt(((7-8)^2)+((7-0)^2))=Lac],[Lac]);
```

```
(%o2) [Lac=5√2]
```

```
(%i3) solve([sqrt(((8-1)^2)+((0-(-1))^2))=Lbc],[Lbc]);
```

```
(%o3) [Lbc=5√2]
```

```
(%i4) solve([(7-(-1))/(7-1)=Mab],[Mab]);
```

```
(%o4) [Mab=4/3]
```

```
(%i5) solve([(7-8)/(7-0)=Mac],[Mac]);
```

```
(%o5) [Mac=-1/7]
```

```
(%i6) solve([(8-1)/(0-(-1))=Mbc],[Mbc]);
```

```
(%o6) [Mbc=7]
```

\*  $\overline{AB}=10$ 、 $\overline{AC}=5\sqrt{2}$ 、 $\overline{BC}=5\sqrt{2}$ ，是等腰三角形；

$Mab=\frac{4}{3}$ 、 $Mac=-\frac{1}{7}$ 、 $Mbc=7$ ， $Mac \times Mbc = -1$ ；為直角三角形

由上可知此三角形為等腰直角三角形

※ 「solve([ 變數算式 ], [ 變數 ])」指令表示求解。

12. 一位海盜欲將三件珠寶埋藏在一個島上的三個地方，海盜就以島上的一棵椰子樹為中心，由椰子樹向東走 12 步的 A 地，埋他的第一件珠寶；由椰子樹向東走 4 步，再往北走 a 步的 B 地，埋他的第二件珠寶；最後由椰子樹向東走 a 步，在往南走 8 步的 C 地，埋他的第三件珠寶，事隔多年後，海盜僅記得  $a > 0$  及埋寶的三個地方再同一直線上，求 a 之值

(設東方為+x、西方為-x、北方為+y、南方為-y，一步單位為 1，椰子樹為原點)

第一件寶物 A(12,0)、第二件寶物 B(4,a)、第三件寶物 C(a,-8)

```
(%i1) solve([(0-a)/(12-4)=(0-(-8))/(12-a),(0-a)/(12-4)=(a-(-8))/(4-a),(0-(-8))/(12-a)=
(a-(-8))/(4-a)], [a]);
```

```
(%o1) [[a=16],[a=-4]]
```

\*a 為正整數，故 a 為 16

※ 「solve([ 變數算式 ], [ 變數 ])」指令表示求解。

## 第二章 數列與級數

### 2-1 等差級數與等比級數

#### P.97

**例題 1**：請寫出數列 $\langle (-1)^{n+1} \rangle$ 的前五項

```
(%i1) load(funcs);
```

```
(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/simplification/funcs.mac
```

```
(%i2) for n:1 thru 5 do(print(geometric(1,(-1),n))*-1);
```

```
(%o2) 1
```

```
-1
```

```
1
```

```
-1
```

```
1
```

```
(%o3) done
```

\* 可知  $a_1=1$ 、 $a_2=-1$ 、 $a_3=1$ 、 $a_4=-1$ 、 $a_5=1$

※ 「load (funcs)」指令表示先讀取此 function(函數)。

※ 「geometric (a, r, n)」表示首項為  $a$ 、公比為  $r$ 、 $n$  項之等差數列； $a, a*r, a*r^2, \dots, a*r^{(n-1)}$ 。

**隨堂練習**：請分別寫出數列 $\langle \frac{1}{n} \rangle$ 及 $\langle 2n-5 \rangle$ 的前五項

(1)  $\langle \frac{1}{n} \rangle$

方法 1

```
(%i1) load(funcs);
```

```
(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/simplification/funcs.mac
```

```
(%i2) for n:1 thru 5 do(print(arithmetic (1, -(1/n), n)));
```

```
(%o2) 1
      1
      2
      1
      3
      1
      4
      1
      5
```

```
(%o3) done
```

### 方法 2

```
(%i1) load(funcs);
```

```
(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/simplification/funcs.mac
```

```
(%i2) for n:1 thru 5 do(print(harmonic(1,1,1,n)));
```

```
1
 1
 2
 1
 3
 1
 4
 1
 5
```

```
(%o2) done
```

\* 可知  $a_1=1$ 、 $a_2=\frac{1}{2}$ 、 $a_3=\frac{1}{3}$ 、 $a_4=\frac{1}{4}$ 、 $a_5=\frac{1}{5}$

```
(2) <2n-5>
```

```
(%i1) load(funcs);
```

```
(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/simplification/funcs.mac
```

```
(%i2) for n:1 thru 5 do(print(arithmetic(-3,2,n)));
```

-1

1

3

5

(%o2) done

\* 可知  $a_1=-3$ 、 $a_2=-1$ 、 $a_3=1$ 、 $a_4=3$ 、 $a_5=5$ 

※ 「load (functs)」指令表示先讀取此 function(函數)。

※ 「arithmetic (a, d, n)」表示首項為  $a$ 、公差為  $d$ 、 $n$  項之等差數列; $a, a + d, a + 2*d, \dots, a + (n - 1)*d$ .

※ harmonic (a, b, c, n)表示數列  $a/b, a/(b + c), a/(b + 2*c), \dots, a/(b + (n - 1)*c)$

**P.98**

**例題 2**：下列各數列分別隱含著某種規則，請你依觀察到的規則，寫出指定項的值

(1)請寫出下列數列 1,4,7,10,13,⋯第六項的值

(%i1) load(functs);

(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/simplification/functs.mac

(%i2) arithmetic (1,3,6);

(%o2) 16

(2)請寫出數列 1,1,2,3,5,8,13,21,34, ⋯第十項的值

(%i1) f[1]:1; f[2]:1; for n:2 thru 20 do f[n+1]:f[n]+f[n-1];

(%o1) 1

(%o2)1

(%o3) done

```
(%i4) f[10];
```

```
(%o4) 55
```

\*f[1]:1 定義  $f(1) = 1$ 、f[2]:1 定義  $f(2) = 1$ ；f[n+1]:f[n]+f[n-1] 表示  $f(3)=f(2)+f(1)$

(3)若某數列的前三項是 1,2,4,請你找出兩種規則，並寫出其第四項、第五項和第六項之值

### 規則一

(等比級數， $r=2$ )

```
(%i1) load(funcs);
```

```
(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/simplification/funcs.mac
```

```
(%i2) for n:4 thru 6 do(print(geometric(1,2,n)));
```

```
8
```

```
16
```

```
32
```

```
(%o2) done
```

### 規則二

(後項比前項大 1、2、3、4、…依此類推)

```
(%i1) f[1]:1; f[2]:2; for n:4 thru 6 do (print(f[n]:f[n-1]+(n-1)));
```

```
(%o1) 1
```

```
(%o2) 2
```

```
7
```

```
11
```

```
16
```

(%o3) done

※ 「load (functs)」指令表示先讀取此 function(函數)。

※ 「arithmetic (a, d, n)」表示首項為 a、公差為 d、n 項之等差數列； $a, a + d, a + 2*d, \dots, a + (n - 1)*d$ .

※ 「geometric (a, r, n)」表示首項為 a、公比為 r、n 項之等差數列； $a, a*r, a*r^2, \dots, a*r^{(n - 1)}$ .

**隨堂練習：**

(1)數列 1,4,8, 13,19,26,⋯隱含著某種規則，請推測第七項之值

```
(%i1) f[1]:1; f[2]:4; for n:2 thru 10 do (f[n]:f[n-1]+(n+1));
```

(%o1) 1

(%o2) 4

(%o3) done

```
(%i4) f[7];
```

(%o1) 34

(2)例題 2 之第(3)題，你還可以找出其他的規則嗎？

**※本題不建議使用 Maxima 解題※**

## P.99

**例題 3：**

(1)請將級數  $5+8+11+14+17+20+23+26+29+32$  用  $\Sigma$  表示出來

(2)請將級數  $10+5+\frac{5}{2}+\frac{5}{4}+\frac{5}{8}+\frac{5}{16}+\frac{5}{32}+\dots$  用  $\Sigma$  表示出來

**※本題不建議使用 Maxima 解題※**





**P.100****隨堂練習：**

(1)請將級數  $2+4+8+16+32+64$  用  $\Sigma$  表示出來

(2)請將級數  $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}+\cdots$  用  $\Sigma$  表示出來

**※本題不建議使用 Maxima 解題※**

**例題 4：**試求  $\sum_{k=1}^6 (5k+3)$  之值

```
(%i1) n:0; for k:1 thru 6 do (n:n+5*k+3);
```

```
(%o1) 0
```

```
(%o2) done
```

```
(%i3) n;
```

```
(%o3) 123
```

**隨堂練習：**試求  $\sum_{k=1}^5 (2k-3)$  之值

```
(%i1) n:0; for k:1 thru 5 do (n:n+2*k-3);
```

```
(%o1) 0
```

```
(%o2) done
```

```
(%i3) n;
```

```
(%o3) 15
```

**P.102****例題 5：**

(1)寫出等差數列  $5, 2, -1, -4, -7, \dots$  的第  $n$  項為何？

**※本小題不建議使用 Maxima 解題※**

(2)一等差數列的第三項是 2，第六項是-3，則其第 50 項為何？

(%i1) load(funcs);

(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/simplification/funcs.mac

(%i2) solve([arithmetic(a,d,3)=2,arithmetic(a,d,6)=-3],[a,d]);

(%o2)  $[[x=\frac{16}{3},y=-\frac{5}{3}]]$

(%i3) arithmetic(16/3,-5/3,50);

(%o3)  $-\frac{229}{3}$

(3)試求 64 和 108 的等差中項

(%i1) (64+108)/2

(%o2) 86

※ 「load (funcs)」指令表示先讀取此 function(函數)。

※ 「arithmetic (a, d, n)」表示首項為 a、公差為 d、n 項之等差數列； $a, a + d, a + 2*d, \dots, a + (n - 1)*d$ 。

※ 「solve([ 變數算式 ], [ 變數 ])」指令表示求解。

### 隨堂練習：

(1)試求等差數列 8, 12, 16, 20, …的公差及第 n 項

(%i1) load(funcs);

(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/simplification/funcs.mac

(%i2) solve([arithmetic(8,y,3)=16],[y]);

(%o2) [y=4]

(2)一等差數列的第二項為-8，第六項為 4，則第幾項為 10？

```
(%i1) load(funcs);
```

```
(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/simplification/funcs.mac
```

```
(%i2) solve([arithmetic(a,d,2)=-8,arithmetic(a,d,6)=4],[a,d]);
```

```
(%o2) [[x=-11,y=3]]
```

```
(%i3) solve([arithmetic(-11,3,n)=10],[n]);
```

```
(%o3) [n=8]
```

\* 先求解得首項為-11，公差為3，並求得第8項值為10

(3)若等差數列的  $a_1=3$ ， $a_{n+1}-a_n=5$ ，求第10項

```
(%i1) load(funcs);
```

```
(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/simplification/funcs.mac
```

```
(%i2) arithmetic(3,5,10);
```

```
(%o2) 48
```

(4)若  $a$  和  $c$  的等差中項 11，公差  $d=7$ ，試求  $a$  與  $c$  之值

```
(%i1) load(funcs);
```

```
(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/simplification/funcs.mac
```

```
(%i2) solve([arithmetic(a,7,2)=11],[a]);
```

```
(%o2) [a=4]
```

```
(%i2) solve([arithmetic(4,7,3)=c],[c]);
```

```
(%o2) [c=18]
```

※ 「load (funcs)」指令表示先讀取此 function(函數)。

※ 「arithmetic (a, d, n)」表示首項為  $a$ 、公差為  $d$ 、 $n$  項之等差數列； $a, a + d, a + 2*d, \dots,$

$a + (n - 1)*d.$



**例題 6：**由前面所列某拖吊公司對故障車輛的拖吊費用表，可知其收費標準是：20 公里內(含)收 2500 元，每超過 1 公里加收 100 元，不滿 1 公里以一公里計算。請問：阿華的車子故障後，被拖了 33.4 公里到達修車廠，需付公司多少錢？

**※本小題不建議使用 Maxima 解題※**

### P.103

**隨堂練習：**計程車計費方式(不計延滯計時收費)如下：行程在 1.5 公里以內(含)，收費 70 元，超出 1.5 公里後，每行駛 400 公尺車資再增收 5 元，不足 400 公尺時，以 400 公尺的車資計算。

阿源家距離台北火車站有 5.2 公里，請問阿源若搭計程車回家，需花多少錢？

**※本小題不建議使用 Maxima 解題※**

### P.104

**例題 7：**

(1) 設  $\langle a_n \rangle$  為一等差數列，其中  $a_2 = -8$ ， $a_6 = 4$  求  $\sum_{k=1}^{10} a_k$  之值

```
(%i1) load(functs);
```

```
(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/simplification/functs.mac
```

```
(%i2) solve([arithmetic(a,d,2)=-8,arithmetic(a,d,6)=4],[a,d]);
```

```
(%o2) [[x=-11,y=3]]
```

```
(%i3) n:0; for k:1 thru 10 do (n:n+3*(k-1)-11);
```

```
(%o3) 0
```

```
(%o4) done
```

```
(%i5) n;
```

```
(%o5) 25
```



\* 先求解得首項為-11，公差為3，本題等差數列可用  $3(k-1)-11$  來表示(-11、-8、-5、-2、1、...)；可得  $\sum_{k=1}^{10} a_k$  之值為 25

(2)求 200 至 300 之間，所有「7 的倍數」之總和

```
(%i1) load(funcs);
```

```
(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/simplification/funcs.mac
```

```
(%i2) solve([arithmetic(7,7,x)=200],[x]);
```

```
(%o2) [x= $\frac{200}{7}$ ]
```

```
(%i3) float(200/7);
```

```
(%o3) 28.57142857142857
```

```
(%i4) solve([arithmetic(7,7,29)=y],[y]);
```

```
(%o4) [y=203]
```

```
(%i5) solve([arithmetic(7,7,a)=300],[a]);
```

```
(%o5) [a= $\frac{300}{7}$ ]
```

```
(%i6) float(300/7);
```

```
(%o6) 42.85714285714285
```

```
(%i7) solve([arithmetic(7,7,42)=b],[b]);
```

```
(%o7) [b=294]
```

```
(%i8) n:0; for k:29 thru 42 do (n:n+7*k);
```

```
(%o8) 0
```

```
(%o9) done
```

```
(%i10) n;
```

```
(%o10) 3479
```

※ 「load (funcs)」指令表示先讀取此 function(函數)。



※ 「arithmetic (a, d, n)」表示首項為 a、公差為 d、n 項之等差數列： $a, a + d, a + 2*d, \dots, a + (n - 1)*d$ .

### 隨堂練習：

(1) 等差數列 3, 5, 7, 9, ...,  $2n+1$ , ... 要加到第幾項，其總和才會超過 700？

```
(%i1) sum(2*n+1, n, 1,25);
```

```
(%o1) 675
```

```
(%i1) sum(2*n+1, n, 1,26);
```

```
(%o1) 728
```

\* sum 表示連加，【 $2*n+1$ (計算式),  $n$ (變數), 1(起始), 25(結束);】；表示以  $n$  為變數， $n$  由 1 連加至 25，變數  $n$  代入  $2*n+1$  此算式中，上述可知加到第 26 項總和超過 700，(本題只需更改該結束-此值帶入 maxima 試誤可得)

(2) 求所有小於 1000 的正整數中，為 4 的倍數者之總和

```
(%i1) load(funcs);
```

```
(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/simplification/funcs.mac
```

```
(%i2) solve([arithmetic(4,4,x)=996],[x]);
```

```
(%o2) [x=249]
```

```
(%i3) n:0; for k:1 thru 249 do (n:n+4*k);
```

```
(%o3) 0
```

```
(%o4) done
```

```
(%i5) n;
```

```
(%o5) 124500
```

(3)在 5 和 29 之間插入 11 項，使成為一個共 13 項的等差數列，求此等差數列前 10 項之總和

```
(%i1) load(funcs);
```

```
(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/simplification/funcs.mac
```

```
(%i2) solve([arithmetic (a, d, 1)=5,arithmetic (a, d, 13)=29], [a,d]);
```

```
(%o2) [[a=5,d=2]]
```

```
(%i3) n:0; for k:1 thru 10 do (n:n+2*(k-1)+5);
```

```
(%o3) 0
```

```
(%o4) done
```

```
(%i5) n;
```

```
(%o5) 140
```

※ 「load (funcs)」指令表示先讀取此 function(函數)。

※ 「arithmetic (a, d, n)」表示首項為 a、公差為 d、n 項之等差數列； $a, a + d, a + 2*d, \dots, a + (n - 1)*d$ 。

※ 「sum(計算式,變數,起始,結束)」指令表示含變數之算式由起始連加至結束。

## P.105

例題 8：

(1)若等比級數 $\langle a_n \rangle$ 為 $\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, \dots$ ，則其第 n 項為何？

**※本小題不建議使用 Maxima 解題※**

(2)有一等比數列第四項為 12，第六項為 192，則其第 9 項為何？

```
(%i1) load(funcs);
```

```
(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/simplification/funcs.mac
```



(%i2) solve([arithmetic (a, d, 4)=12,arithmetic (a, d, 6)=192], [a,d]);

(%o2) [[a=-258,d=90]]

(%i3) arithmetic (-258, 90, 9);

(%o3) 462

(3)若 108, b, 27 是等比數列，求 b 值及其公比

(%i1) load(funcs);

(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/simplification/funcs.mac

(%i2) solve([geometric(a,r,1)=108, geometric(a,r,3)=27], [a,r]);

(%o2) [[a=108,r= $\frac{1}{2}$ ],[a=108,r= $-\frac{1}{2}$ ]]

(%i3) geometric (108, 1/2, 2);

(%o3) 54

(%i3) geometric (108, -1/2, 2);

(%o3) -54

(4)若 12 是 a 和 c 的等比中項，且公比  $r=-2$ ，求 a 與 c 值

**※本小題不建議使用 Maxima 解題※**

※ 「load (funcs)」指令表示先讀取此 function(函數)。

※ 「geometric (a, r, n)」表示首項為 a、公比為 r、n 項之等差數列； $a, a*r, a*r^2, \dots, a*r^{(n-1)}$ 。

※ 「arithmetic (a, d, n)」表示首項為 a、公差為 d、n 項之等差數列； $a, a + d, a + 2*d, \dots, a + (n - 1)*d$ 。

## P.106

隨堂練習：





(1) 寫出等比級數  $\langle 3 \cdot 2^{n-1} \rangle$  的前五項，並求其公比

(%i1) load(funcs);

(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/simplification/funcs.mac

(%i2) solve([geometric(a,r,1)=3, geometric(a,r,2)=6], [a,r]);

(%o2) [[a=3,r=2]]

(%i3) for n:1 thru 5 do(print(geometric(3,8,n)));

3

6

12

24

48

(%o3) done

\* 可知  $a_1=3$ 、 $a_2=6$ 、 $a_3=12$ 、 $a_4=24$ 、 $a_5=48$

(2) 若等比數列  $\langle a_n \rangle$  的首項為 2 且  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 3$ ，則第  $n$  項為何？

**※本小題不建議使用 Maxima 解題※**

(3) 若一等比數列的第 3 項為 9，第四項為  $\frac{27}{2}$ ，則第 7 項為何？

(%i1) load(funcs);

(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/simplification/funcs.mac

(%i2) solve([geometric(a,r,3)=9, geometric(a,r,4)=27/2], [a,r]);

(%o2) [[a=4,r= $\frac{3}{2}$ ]]

(%i3) geometric(4,3/2,7);

(%o3)  $\frac{729}{16}$

(4) 試求 2 和 8 的等比中項

```
(%i1) load(funcs);
```

```
(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/simplification/funcs.mac
```

```
(%i2) solve([geometric(2,r,1)=2, geometric(2,r,3)=8], [r]);
```

```
(%o2) [[r=-2],[r=2]]
```

```
(%i3) geometric(2,2,2);
```

```
(%o3) 4
```

```
(%i3) geometric(2,-2,2);
```

```
(%o3) -4
```

\* 若公比為 2 時，等差中項為 4；若公比為 -2 時，等差中項為 -4

※ 「load (funcs)」指令表示先讀取此 function(函數)。

※ 「geometric (a, r, n)」表示首項為 a、公比為 r、n 項之等差數列； $a, a*r, a*r^2, \dots, a*r^{(n-1)}$ 。

※ 「solve([ 變數算式 ], [ 變數 ])」指令表示求解。

## P.107

例題 9：

(1) 一等比數列  $\langle a_n \rangle$ ， $a_2 = -2$ ， $a_5 = 16$ ，且公比  $r$  為實數，求  $\sum_{n=1}^{10} a_n$  之值

```
(%i1) load(funcs);
```

```
(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/simplification/funcs.mac
```

```
(%i2) solve([geometric(a,r,2)=-2, geometric(a,r,5)=16], [a,r]);
```

```
(%o2) [[a=1,r=-2]]
```

```
(%i3) n:0; for k:1 thru 10 do (n:n+(-2)^(k-1));
```

```
(%o3) 0
```

(%o4) done

(%i5) n;

(%o5) -341

(2) 四個數成等比數列，前三項之和為 21，後三項之和為 42，求此四數之和

(%i1) load(funcs);

(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/simplification/funcs.mac

(%i2) solve([geometric(a,r,1)+ geometric(a,r,2)+ geometric(a,r,3)=21, geometric(a,r,2)+geometric(a,r,3)+ geometric(a,r,4)=42], [a,r]);

(%o2) [[a=3,r=2]]

(%i3) for n:1 thru 4 do(print(geometric(3,2,n)));

3

6

12

24

(%o3) done

---

### 方法 1

(%i4) sum(3+2^(k-1),k,2,5)+3;

(%o4) 45

---

### 方法 2

(%i5) n:0; for k:2 thru 5 do (n:n+3+(2)^(k-1));

(%o5) 42

(%i6) 42+3

(%o6) 45

\* 方法 1&2 首項為 3，兩算式皆為計算第 2 項至第 5 項之和，故最後在加上首項 3

### P.108

**隨堂練習：**已知有 9 個數成等比數列，其中第一、四、七項之和為 1514，第二、五、八項之和為 4542，求此九數之和

(%i1) load(functs);

(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/simplification/functs.mac

(%i2) solve([geometric(a,r,1)+ geometric(a,r,4)+ geometric(a,r,7)=1514, geometric(a,r,2)+geometric(a,r,5)+ geometric(a,r,8)=4542], [a,r]);

(%o2) [[a=2,r=3]

(%i3) for n:1 thru 9 do(print(geometric(2,3,n)));

2

6

18

54

162

486

1458

4374

13122

(%o3) done

方法 1

```
(%i4) sum(2*3^(k-1),k,2,9)+2;
```

```
(%o4) 19682
```

---

方法 2

```
(%i5) n:0; for k:1 thru 9 do (n:n+2*(3)^(k-1))+2;
```

```
(%o5) 19682
```

※ 「load (functs)」指令表示先讀取此 function(函數)。

※ 「sum(計算式,變數,起始,結束)」指令表示含變數之算式由起始連加至結束。

※ 「geometric (a, r, n)」表示首項為 a、公比為 r、n 項之等差數列； $a, a*r, a*r^2, \dots, a*r^{(n-1)}$ 。

**例題 10**：阿源向阿華借 5 萬元，兩人協商以單利計息，年利率 2%，每年計息一次，請問：

(1)一年後的本利和(本金+利息)共多少元？

```
(%i1) load(functs);
```

```
(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/simplification/functs.mac
```

```
(%i2) arithmetic (50000,50000*0.02,2);
```

```
(%o2) 51000.0
```

(2)二年後的本利和共多少元？

```
(%i1) load(functs);
```

```
(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/simplification/functs.mac
```

```
(%i2) arithmetic (50000,50000*0.02,3);
```

(%o2) 52000.0

(3)五年後，阿華可領回本利和共多少元？

(%i1) load(funcs);

(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/simplification/funcs.mac

(%i2) arithmetic (50000,50000\*0.02,6);

(%o2) 55000.0

(註：單利指每期利息均為(本金×利率)，本金保持不變)

※ 「load (funcs)」指令表示先讀取此 function(函數)。

※ 「arithmetic (a, d, n)」表示首項為 a、公差為 d、n 項之等差數列； $a, a + d, a + 2*d, \dots, a + (n - 1)*d$ 。

### P.109

**隨堂練習：**若例題 10 中，改半年單利計息一次，其餘條件不變，請問阿華可領回本利和多少元？

(1)一年後的本利和(本金+利息)共多少元？

(%i1) load(funcs);

(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/simplification/funcs.mac

(%i2) arithmetic (50000,50000\*0.01,3);

(%o2) 51000.0

(2)二年後的本利和共多少元？

(%i3) load(funcs);

(%o3) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/simplification/funcs.mac

(%i4) arithmetic (50000,50000\*0.01,5);

(%o4) 52000.0

(3)五年後，阿華可領回本利和共多少元？

(註：每半年計息一次，即一年計息兩次，而計息利率則為年利率之半)

(%i5) load(funcs);

(%o5) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/simplification/funcs.mac

(%i6) arithmetic (50000,50000\*0.01,11);

(%o6) 55000.0

※ 「load (funcs)」指令表示先讀取此 function(函數)。

※ 「arithmetic (a, d, n)」表示首項為 a、公差為 d、n 項之等差數列； $a, a + d, a + 2*d, \dots, a + (n - 1)*d$ 。

## P.110

**例題 11**：阿源將 5 萬元存到某銀行，每年複利計息一次，年利率是 2%，請問 5 年後，阿源可領回本利和共多少元？

(複利是指每期利息均列入下一期本金再利息，本金隨著其數而增加)

(%i1) load(funcs);

(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/simplification/funcs.mac

(%i2) geometric (50000,1.02,6);

(%o2) 55204.04016

\* 金錢單位無小數點，故直接採無條件進入，故本題答案為 55205

※ 「load (funcs)」指令表示先讀取此 function(函數)。



※ 「geometric (a, r, n)」表示首項為 a、公比為 r、n 項之等差數列； $a, a*r, a*r^2, \dots, a*r^{(n - 1)}$ .

**隨堂練習：**若例題 11 中改以每半年複利計息一次，其餘條件不變，請問阿源可領回本利和多少元？

(註：每半年計息一次，即一年計息兩次，而計息利率則為年利率之半)

(%i1) load(funcs);

(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/simplification/funcs.mac

(%i2) geometric (50000,1.01,11);

(%o2) 55231.10627056024

\*金錢單位無小數點，故直接採無條件進入，故本題答案為 60950

※ 「load (funcs)」指令表示先讀取此 function(函數)。

※ 「geometric (a, r, n)」表示首項為 a、公比為 r、n 項之等差數列； $a, a*r, a*r^2, \dots, a*r^{(n - 1)}$ .



**P.111** **習題 2-1**

1. 觀念題：對的在題號前打○，錯的在題號前打×

\_\_\_ (1) 數列 1, 2, 3, ... 的第六項是 6。

\_\_\_ (2) 等差數列 1, 2, 3, ... 的第六項是 6。

\_\_\_ (3) 首項為  $a_1$ ，公比為  $r$  的等比數列，其第  $n$  項  $a_n = a_1 r^n$

\_\_\_ (4) 首項為  $a_1$ ，公比  $r=1$  的等比數列，前  $n$  項之和  $S_n = n a_1$

\_\_\_ (5) 首項為  $a_1$ ，公比  $r \neq 1$  的等比數列，前  $n$  項之和為  $S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$

\_\_\_ (6) 由 100 到 200 的整數中(含 100 與 200)，5 的倍數共有 21 個

**※本題不建議使用 Maxima 解題※**

2.

(1) 設等差數列  $\langle a_n \rangle$  的首項是 7，公差是 -3，求其第  $n$  項

(2) 設等比數列  $\langle a_n \rangle$  的首項是 7，公比是 -3，求其第  $n$  項

**※本題不建議使用 Maxima 解題※**

3.

(1) 設等差數列  $\langle a_n \rangle$  的第三項是 7，第七項是 3，求其第  $n$  項及公差

```
(%i1) load(funcs);
```

```
(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/simplification/funcs.mac
```

```
(%i2) solve([arithmetic(a,d,3)=7,arithmetic(a,d,7)=3],[a,d]);
```

```
(%o2) [[a=9,d=-1]]
```

\* 本題公差為 -1

(2) 設公比為實數之等比數列  $\langle a_n \rangle$  的第三項是 24，第六項是 3，求其第  $n$  項及公比

(%i1) load(funcs);

(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/simplification/funcs.mac

(%i2) solve([geometric (a,r,3)=24, geometric (a,r,6)=3],[a,r]);

(%o2) [[a=96,r= $\frac{1}{2}$ ]

\* 本題公比為  $\frac{1}{2}$

※ 「load (funcs)」指令表示先讀取此 function(函數)。

※ 「solve([ 變數算式 ], [ 變數 ])」指令表示求解。

※ 「arithmetic (a, d, n)」表示首項為  $a$ 、公差為  $d$ 、 $n$  項之等差數列； $a, a + d, a + 2*d, \dots, a + (n - 1)*d$ .

※ 「geometric (a, r, n)」表示首項為  $a$ 、公比為  $r$ 、 $n$  項之等差數列； $a, a*r, a*r^2, \dots, a*r^{(n - 1)}$ .

4. 等差數列 4, 8, 12, 16, 20, ... 要加到第幾項，總和才會超過 550？

(%i1) sum(4\*n, n, 1,15);

(%o1) 480

(%i2) sum(4\*n, n, 1,16);

(%o2) 544

(%i3) sum(4\*n, n, 1,17);

(%o3) 612

\* sum 表示連加，【 $4*n+1$ (計算式),  $n$ (變數), 1(起始), 25(結束);】；表示以  $n$  為變數， $n$  由 1 連加至 17，變數  $n$  代入  $4*n$  此算式中，上述可知加到第 17 項總和超過 550，(本題只需更改結束變數-此值帶入 maxima 試誤可得)

※ 「sum(計算式,變數,起始, 結束)」指令表示含變數之算式由起始連加至結束。



5. 設  $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$  為數列  $\langle a_n \rangle$  前  $n$  項之總和，因此  $n \geq 2$  時， $a_n = S_n - S_{n-1}$ ，今已知一數列前  $n$  項和  $S_n = n^2 + 3n - 4$ ，則

(1)  $a_1 =$  \_\_\_\_\_ (2)  $a_n =$  \_\_\_\_\_ ( $n \geq 2$ )

**※本題不建議使用 Maxima 解題※**

6. 設有四個正數成等比數列，若前兩項之和為 8，後兩項之和為 27，求公比

7. 求在 100 至 300 之間所有 11 的倍數總和

```
(%i1) load(funcs);
```

```
(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/simplification/funcs.mac
```

```
(%i2) solve([arithmetic(11,11,x)=100],[x]);
```

```
(%o2) [x= $\frac{100}{11}$ ]
```

```
(%i3) float(100/11);
```

```
(%o3) 9.090909090909092
```

```
(%i4) solve([arithmetic(11,11,y)=300],[y]);
```

```
(%o4) [y= $\frac{300}{11}$ ]
```

```
(%i5) float(300/11);
```

```
(%o5) 27.27272727272727
```

```
(%i6) n:0; for k:10 thru 27 do (n:n+11*k);
```

```
(%o6) 0
```

```
(%o7) done
```

```
(%i8) n;
```

```
(%o8) 3663
```

**※「load (funcs)」指令表示先讀取此 function(函數)。**



※ 「solve([ 變數算式 ], [ 變數 ])」指令表示求解。

※ 「float( 數值 )」指令表示將結果轉換為小數。

※ 「arithmetic (a, d, n)」表示首項為 a、公差為 d、n 項之等差數列； $a, a + d, a + 2*d, \dots, a + (n - 1)*d$ .

※ 「geometric (a, r, n)」表示首項為 a、公比為 r、n 項之等差數列； $a, a*r, a*r^2, \dots, a*r^{(n - 1)}$ .

8. 試計算下列之值：

$$(1) \sum_{k=4}^{10} (2k+3)$$

```
(%i1) n:0; for k:4 thru 10 do (n:n+2*k+3);
```

```
(%o1) 0
```

```
(%o2) done
```

```
(%i3) n;
```

```
(%o3) 119
```

$$(2) \sum_{k=0}^5 \left(\frac{1}{2}\right)^{2k}$$

```
(%i1) n:0; for k:0 thru 5 do (n:n+(1/2)^(2*k));
```

```
(%o1) 0
```

```
(%o2) done
```

```
(%i3) n;
```

```
(%o3)  $\frac{1365}{1024}$ 
```

## P.112

9.某人將 10000 元存入銀行，年利率是 2%，請依下列指定利息方式，求三年後的本利和各為多少(參考下表)

(1)每半年單利計息一次

(%i1) load(funcs);

(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/simplification/funcs.mac

(%i2) arithmetic (10000,10000\*0.01,7);

(%o2) 10600.0

(2)每一年單利計息一次

(%i1) load(funcs);

(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/simplification/funcs.mac

(%i2) arithmetic (10000,10000\*0.02,4);

(%o2) 10600.0

(3)每半年複利計息一次

(%i1) load(funcs);

(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/simplification/funcs.mac

(%i2) geometric (10000,1.01,7);

(%o2) 10615.20150601

(4)每一年複利計息一次

(%i1) load(funcs);

(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/simplification/funcs.mac



(%i2) geometric (10000,1.02,4);

(%o2) 10612.08

※ 「load (functns)」指令表示先讀取此 function(函數)。

※ 「solve([ 變數算式 ],[ 變數 ])」指令表示求解。

※ 「arithmetic (a, d, n)」表示首項為 a、公差為 d、n 項之等差數列； $a, a + d, a + 2*d, \dots, a + (n - 1)*d$ .

※ 「geometric (a, r, n)」表示首項為 a、公比為 r、n 項之等差數列； $a, a*r, a*r^2, \dots, a*r^{(n - 1)}$ .

10.

(1)請算出  $\sum_{n=1}^{10} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$  之值

(%i1) k:0; for n:1 thru 10 do (k:k+(1/n)-(1/(n+1)));

(%o1) 0

(%o2) done

(%i3) k;

(%o3)  $\frac{10}{11}$

(2)試求  $\sum_{n=1}^{19} \frac{1}{n(n+1)}$  之值 (提示： $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ )

(%i1) k:0; for n:1 thru 19 do (k:k+(1/(n\*(n+1))));

(%o1) 0

(%o2) done

(%i3) k;

(%o3)  $\frac{19}{20}$

(3) 試求  $\sum_{n=1}^{20} \frac{1}{n(n+2)}$  之值 (提示:  $\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2})$ )

(%i1) k:0; for n:1 thru 20 do (k:k+1/2\*((1/n)-1/(n+2)));

(%o1) 0

(%o2) done

(%i3) k;

(%o3)  $\frac{325}{462}$

## 2-2 無窮等比級數與循環小數

## P.113

**例題 1**：討論下列數列當  $n$  很大時，是否會趨近於某一固定數

(1)  $\langle \frac{1}{n} \rangle$

(%i1) limit(1/n,n,infinity);

(%o1) 0

(2)  $\langle \frac{n}{n+1} \rangle$

(%i1) limit(n/(n+1),n,infinity);

(%o1) 1

(3)  $\langle 2^n \rangle$

(%i1) limit(2^n,n,infinity);

(%o1) und

\*und represents an undefined result

※ 「limit (變數算式, 變數, inf)」指令表示算式變數無窮大，算式趨近於數值。

## P.114

**例題 2**：討論下列數列的極限：

(1)  $\langle n^2 \rangle$

(%i1) limit(n ^2,n,infinity);

(%o1) infinity

\*infinity 表示無窮大



$$(2) \left\langle \frac{1}{n^2} \right\rangle$$

(%i1) limit(1/n^2,n,infinity);

(%o1) 0

$$(3) \langle (-1)^n \rangle$$

(%i1) limit((-1)^n,n,infinity);

(%o1) ind

\*ind represents a bounded, indefinite result

$$(4) \left\langle \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right\rangle$$

(%i1) limit((-1/3)^n,n,infinity);

(%o1) und

\*und represents an undefined result

$$(5) \left\langle \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^n \right\rangle$$

(%i1) limit((1/3)^n+(1/4)^n,n,infinity);

(%o1) und

\*und represents an undefined result

$$(6) \left\langle 5 \left(\frac{n}{n+1}\right) \right\rangle$$

(%i1) limit(5\*n/(n+1),n,infinity);

(%o1) 5

※ 「limit (變數算式, 變數, inf)」指令表示算式變數無窮大，算式趨近於數值。

**P.117**

**隨堂練習：**討論下列各數列的極限：

(1)  $\langle n^3 \rangle$

(%i1) limit( $n^3$ ,n,infinity);

(%o1) infinity

\*infinity 表示無窮大

(2)  $\langle (-2)^n \rangle$

(%i1) limit( $(-2)^n$ ,n,infinity);

(%o1) und

\*und represents an undefined result

(3)  $\langle 2\left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n \rangle$

(%i1) limit( $2*(1/3)^n+(1/2)^n$ ,n,infinity);

(%o1) und

\*und represents an undefined result

(4)  $\langle \left(-\frac{1}{2}\right)^n \rangle$

(%i1) limit( $(-1/2)^n$ ,n,infinity);

(%o1) und

\*und represents an undefined result

※ 「limit (變數算式, 變數, inf)」指令表示算式變數無窮大，算式趨近於數值。

**P.118**

**隨堂練習：**試判斷下列數列是否收斂，若收斂求其極限：

$$(1) \left\langle \left(\frac{3}{2}\right)^n \right\rangle$$

(%i1) limit((3/2)^n,n,infinity);

(%o1) und

\*und represents an undefined result

$$(2) \left\langle \left(-\frac{2}{3}\right)^n \right\rangle$$

(%i1) limit((-3/2)^n,n,infinity);

(%o1) und

\*und represents an undefined result

$$(3) \left\langle 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n \right\rangle$$

(%i1) limit(1+(1/3)^n,n,infinity);

(%o1) und

\*und represents an undefined result

※「limit (變數算式, 變數, inf)」指令表示算式變數無窮大，算式趨近於數值。

※本題不建議使用 Maxima 解題※

**P.123**

**例題 3：**試判斷下列各級數是否收斂，若收斂，求其和

$$(1) 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \cdots$$

(%i1) 1/(1-(2/3));

(%o1) 3

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n$$

(%i1)  $(-1/4) / (1 - (-1/4))$ ;

(%o1)  $-\frac{1}{5}$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} 3^{n-1}$$

\* 公比=3，為發散級數

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$$

\* 公比= -1，為發散級數

\* 無窮等比級數  $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 r^{n-1}$  在  $-1 < r < 1$  時收斂，其和為  $\frac{a_1}{1-r}$

## P.124

**隨堂練習：**試判斷下列各級數是否收斂，若收斂，求其和

$$(1) \sum_{k=1}^{\infty} 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}$$

(%i1)  $2 * (2/3)^2 / (1 - (2/3))$ ;

(%o1)  $\frac{8}{3}$

$$(2) \sum_{k=1}^{\infty} (-2)^k$$

\* 公比= -2，為發散級數

$$(3) \text{等比級數 } 8+4+2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots$$

(%i1)  $8 / (1 - (1/2))$ ;

(%o1) 16

\* 無窮等比級數  $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 r^{n-1}$  在  $-1 < r < 1$  時收斂，其和為  $\frac{a_1}{1-r}$

**例題 4:** 如右圖， $\triangle A_1 B_1 C_1$  是一個邊長為 1 的正三角形，取  $\triangle A_1 B_1 C_1$  的三邊中點  $A_2$ 、 $B_2$ 、 $C_2$ ，則  $\triangle A_2 B_2 C_2$  也是正三角形，再取  $\triangle A_2 B_2 C_2$  的三邊中點  $A_3$ 、 $B_3$ 、 $C_3$ ，則  $\triangle A_3 B_3 C_3$  也是正三角形，如此下去形成一連串的正三角形：

$\triangle A_1 B_1 C_1$ ， $\triangle A_2 B_2 C_2$ ， $\triangle A_3 B_3 C_3$ ， $\triangle A_4 B_4 C_4$ ， $\dots$ ，求所有正三角形的周長總和及面積的總和

周長總和

(%i1) 1+1+1;

(%o1) 3

(%o2) 3/(1-(1/2));

(%o2) 6

面積的總和

(%i1) sqrt(3)/4\*1^2;

(%o1)  $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 

(%o2) (sqrt(3)/4)/(1-(1/4));

(%o2)  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 

\* 無窮等比級數  $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 r^{n-1}$  在  $-1 < r < 1$  時收斂，其和為  $\frac{a_1}{1-r}$

※ 「sqrt ( 數值 )」指令表示數值開根號。

### P.125

**隨堂練習：**若將例題四的 $\triangle A_1B_1C_1$ 改為底邊長為8，兩腰各為5的等腰三角形；同樣以取中點的方法，則可以形成如右圖的一連串等腰三角形：

$\triangle A_1B_1C_1$ ， $\triangle A_2B_2C_2$ ， $\triangle A_3B_3C_3$ ， $\triangle A_4B_4C_4$ ， $\dots$ ，求這些三角形的周長總和及面積的總和

周長總和

(%i1) 8+5+5;

(%o1) 18

(%o2) 18/(1-(1/2));

(%o2) 36.0

面積的總和

(%i1) 8\*3/2;

(%o1) 12

(%i2) 12/(1-(1/4));

(%o2) 16

\* 無窮等比級數  $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 r^{n-1}$  在  $-1 < r < 1$  時收斂，其和為  $\frac{a_1}{1-r}$

### P.126

**例題 5：**將下列各循環小數化為有理數  $\frac{n}{m}$  ( $m$ 、 $n$  為整數，且  $m \neq 0$ ) 的形式

(1)  $0.\overline{35}$

(%i1) 35/100/(1-(1/100));

(%o1)  $\frac{35}{99}$

(2)  $0.\overline{35}$

(%i1) rat(5/100/(1-(1/10))+0.3);

rat: replaced 0.355555555555556 by 16/45 = 0.355555555555556

(%o1)  $\frac{16}{45}$

(3)  $0.\overline{154}$

(%i1) rat(54/1000/(1-(1/100))+0.1);

rat: replaced 0.1545454545454545 by 17/110 = 0.1545454545454545

(%o1)  $\frac{17}{110}$

\* 無窮等比級數  $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 r^{n-1}$  在  $-1 < r < 1$  時收斂，其和為  $\frac{a_1}{1-r}$

※ 「rat(數值)」指令將數值轉換成分數形式。

**隨堂練習：**將下列各循環小數化為分數

(1)  $0.\overline{3}$

(%i1) (3/10/(1-(1/10)));

(%o1)  $\frac{1}{3}$

(2)  $0.\overline{67}$

(%i1) 67/100/(1-(1/100));

(%o1)  $\frac{67}{99}$

(3)  $2.\overline{12}$

(%i1) rat(2/100/(1-(1/10))+2.1);

rat: replaced 2.1222222222222222 by  $191/90 = 2.1222222222222222$

(%o1)  $\frac{191}{90}$

\* 無窮等比級數  $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 r^{n-1}$  在  $-1 < r < 1$  時收斂，其和為  $\frac{a_1}{1-r}$

※ 「rat(數值)」指令將數值轉換成分數形式。



**P.127** **習題 2-2**

1. 觀念題：對的在題號前打○，錯的在題號前打×

\_\_\_ (1) 數列  $\langle \frac{1}{n} \rangle$  的極限為 0

\_\_\_ (2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  的極限為 0

\_\_\_ (3) 無窮等比數列  $\langle 1^n \rangle$  的極限為 1

\_\_\_ (4) 無窮等比級數  $\sum_{n=1}^{\infty} 1^n$  的和為 1

\_\_\_ (5) 若  $\langle a_n \rangle$  為收斂數列，則  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  也一定是收斂

\_\_\_ (6) 無窮等比數列  $\langle rn \rangle$  在  $-1 < r \leq 1$  時收斂

\_\_\_ (7) 無窮等比級數  $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$  在  $-1 < r \leq 1$  時收斂

**※本小題不建議使用 Maxima 解題※**

2. 試判斷下列各數列是否收斂，若收斂，求其極限值

(1)  $\langle \frac{1+(-1)^n}{2} \rangle$

(2)  $\langle \left(\frac{6}{5}\right)^n \rangle$

(3)  $\langle 1 - \frac{1}{2n} \rangle$

(%i1) limit(1-1/(2\*n),n,infinity);

(%o1) 1

(4)  $\langle \frac{(-1)^n}{n} \rangle$

(5)  $\langle \left(\frac{2}{5}\right)^{n+2} \rangle$

※ 「limit (變數算式, 變數, inf)」指令表示算式變數無窮大，算式趨近於數值。

3. 試判斷下列各級數是否收斂，求其和

$$(1) \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^n + \cdots$$

(%i1) (2/3)/(1-(2/3));

(%o1) 2

$$(2) \frac{2}{3} + \frac{8}{27} + \frac{32}{243} + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^{2n-1} + \cdots$$

(%i1) (2/3)/(1-(4/9));

(%o1)  $\frac{6}{5}$

$$(3) 3 + \frac{3}{8} + \frac{3}{8^2} + \cdots + \frac{3}{8^{n-1}} + \cdots$$

(%i1) (3)/(1-(1/8));

(%o1)  $\frac{24}{7}$

$$(4) \sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{2})^k$$

\* 公比 =  $\sqrt{2}$ ，為發散級數

$$(5) \sum_{k=1}^{\infty} 2 \cdot (-1)^k$$

\* 公比 = -1，為發散級數

$$(6) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

(%i1) n:0; for k:1 thru 100 do (n:n+ 1/(k\*(k+1)));

```
(%o1) 0
```

```
(%o2) done
```

```
(%i3) float(n);
```

```
(%o3) 0.99009900990099
```

```
(%i4) n:0; for k:1 thru 1000 do (n:n+ 1/(k*(k+1)));
```

```
(%o4) 0
```

```
(%o5) done
```

```
(%i6) float(n);
```

```
(%o6) 0.999000999001
```

```
(%i7) n:0; for k:1 thru 100000 do (n:n+ 1/(k*(k+1)));
```

```
(%o7) 0
```

```
(%o8) done
```

```
(%i9) float(n);
```

```
(%o9) 0.9999900001
```

\* 由答案可看出，n 值越大結果越接近 1

\* 無窮等比級數  $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 r^{n-1}$  在  $-1 < r < 1$  時收斂，其和為  $\frac{a_1}{1-r}$

※ 「float( 數值 )」指令表示將結果轉換為小數。

## P.128

4. 將下列各循環小數化為分數

(1)  $0.\bar{9}$

```
(%i1) (9/10)/(1-(1/10));
```

```
(%o1) 1
```

(2)  $0.\overline{027}$

(%i1) (27/1000)/(1-(1/100));

(%o1)  $\frac{3}{110}$

(3)  $3.\overline{531}$

(%i1) rat((531/1000)/(1-(1/1000))) +3;

rat: replaced 2.122222222222222 by 191/90 = 2.122222222222222

(%o1)  $\frac{392}{111}$

(4)  $1.\overline{72}$

(%i1) rat((2/100)/(1-(1/10))) +1.7;

rat: replaced 1.7 by 17/10 = 1.7

(%o1)  $\frac{31}{18}$

* 無窮等比級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 r^{n-1}$ 在 $-1 < r < 1$ 時收斂，其和為 $\frac{a_1}{1-r}$
---

※ 「rat(數值)」指令將數值轉換成分數形式。

5.

(1)  $\triangle A_1 B_1 C_1$  是一個底為 2，高為 1 的等腰三角形，過頂點  $A_1$  做線段  $\overline{B_2 C_2}$  平行  $\overline{B_1 C_1}$ ，由線段  $\overline{B_2 C_2}$  往上做兩個底為 1，高為  $\frac{1}{2}$  的等腰三角形  $\triangle A_2 B_2 A_1$ 、 $\triangle A_3 A_1 C_2$  再過新頂點  $A_2$  及  $A_3$  做線段  $\overline{B_3 C_3}$  往上再作四個底為  $\frac{1}{2}$ ，高為  $\frac{1}{4}$  的等腰三角形，如此繼續下去，

形成一序列三角形，試求這些三角形的面積和

(2) 依照(1)的方式，將三角形改為半徑為 1 的半圓形，得一序列半圓形，求這些半圓



形的面積和

(1)

三角形面積的總和

$$(\%i1) 2*1/2;$$

$$(\%o1) 1$$

$$(\%o2) 1/(1-(1/2));$$

$$(\%i2) 2$$

(2)

圓形面積的總和

$$(\%i1) 1^2*\%pi;$$

$$(\%o1) \frac{\pi}{2}$$

$$(\%o2) (\%pi/2)/(1-(1/2));$$

$$(\%i2) \pi$$

\*  $\pi$  表示為 %pi

\* 無窮等比級數  $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 r^{n-1}$  在  $-1 < r < 1$  時收斂，其和為  $\frac{a_1}{1-r}$

## 2-3 數學歸納法 ※本節不建議使用 Maxima 解題※

### P.129

**例題 1**：在觀察企鵝的例題中，我們猜測”當有  $n$  排時，企鵝粽數共有  $n^2$  隻”試論證此猜測的正確性

### P.133

**例題 2**：利用數學歸納法證明

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n \cdot (n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

### P.134

**隨堂練習**：利用數學歸納法證明

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

**例題 3**：設  $n$  為任意正整數，試證： $2^{n-1} + 3^{2n-1}$  恆為 5 的倍數

### P.135

**隨堂練習**：設  $n$  為任意正整數，試證： $10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5$  恆為 9 的倍數

**例題 4**：當自然數  $n \geq 5$  時，證明  $2^n > n^2$

### P.134

**隨堂練習**：自然數  $n > 2$ ，證明  $5^n > 3^n + 4^n$

### P.137 習題 2-3 ※本節不建議使用 Maxima 解題※

1. 利用數學歸納法證明對所有證整數  $n$ ，下列各式都成立

(1)  $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$$(2) 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

$$(3) \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

$$(4) 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \cdots + n \cdot (n+1) = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+7)$$

$$(5) 1 + (1+2) + (1+2+3) + \cdots + (1+2+\cdots+n) = \frac{1}{6} n(n+1)(n+2)$$

2. 利用數學歸納法證明對所有正整數  $n$ ，下列各敘述都成立

(1)  $8^{n+1} - 7n + 41$  為 49 的倍數

(2)  $n^2 + n$  恆為 2 的倍數。(即兩連續整數相乘是 2 的倍數)

(3)  $n(n+1)(n+2)$  恆為 6 的倍數。(即三連續整數相乘是 6 的倍數)

3. 利用數學歸納法證明對所有正整數  $n$ ，下列個不等式都成立

(1)  $2^n > n$

(2) 設  $p \geq -1$ ，證明  $(1+p)^n > 1+np$  (伯努力不等式)

**P.138****綜合練習**

1. 假設世界人口自 1980 年起，50 年內每年增加率固定，已知 1987 年世界人口達 50 億，1999 年第 60 億人口誕生於賽拉耶佛，根據這些資料推測 2023 年世界人口最接近哪一個數？75、80、86、92、100 億

```
(%i1) load(funcs);
```

```
(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/simplification/funcs.mac
```

```
(%i2) solve([geometric (a,r,8)=50, geometric (a,r,20)=60],[a,r]);
```

```
(%o2) [a=44.95530726256983,r=1.015309446254072]]
```

```
(%i3) geometric(44.95530726256983, 1.015309446254072,44);
```

```
(%o3) 86.39991649421842
```

\* 以 1980 年為首項，求出首項及公差，代入 2023 年(第 24 項)，求得答案約為 86.4 億人口

※ 「load ("funcs")」指令表示先讀取此 function(函數)。

※ 「solve([ 變數算式 ],[ 變數 ])」指令表示求解。

※  $\text{geometric}(a, r, n)$  表示首項為  $a$ 、公比為  $r$ 、 $n$  項之等差數列； $a, a*r, a*r^2, \dots, a*r^{(n-1)}$ 。

2. 某甲自 89 年 7 月起，每月 1 日均存入銀行 1000 元，言明以月利率 0.5% 按月複利計息，到 90 年 7 月 1 日提出，某乙則於 89 年 7 月起，每單月(一、三、五、...)1 日均存入銀行 2000 元，亦以月利率 0.5% 按月複利計息，到 90 年 7 月 1 日提出，一整年中兩人均存入本金 12000 元，提出時甲得本利和 A 元，乙得本利和 B 元，問下列何者為真？

(1)  $B > A$





A

(%i1) n:0; for k:1 thru 12 do (n:n+1000\*(1.005)^k);

(%o1) 0

(%o2) done

(%i3) n;

(%o3) 12397.2401847644

B

(%i1) n:0; for k:1 thru 6 do (n: n+2000\*(1.005^(2\*k)));

(%o1) 0

(%o2) done

(%i3) n;

(%o3) 12428.15599569898

\*B &gt; A (本題為真)

$$(2) A = 1000 \left[ \sum_{k=1}^{12} \left( \frac{1005}{1000} \right)^k \right]$$

$$(3) B = 2000 \left[ \sum_{k=1}^6 \left( \frac{1005}{1000} \right)^{2k} \right]$$

**※(2)(3)不建議使用 Maxima 解題※**

$$(4) A < 1200 \left( \frac{1005}{1000} \right)^{12}$$

$$(5) B < 1200 \left( \frac{1005}{1000} \right)^{12}$$

```
(%i1) n:0; for k:1 thru 6 do (n:n+(2000*(1.005^k)));
```

```
(%o1) 0
```

```
(%o2) done
```

```
(%i3) n;
```

```
(%o3) 12303.01503753749
```

3. 等差數列  $a_1=23$  ,  $a_2=18$  ,  $a_3=13$  ,  $\dots$  ,  $a_n=28-5n$  ,  $\dots$  , 則此數列

(1) 第幾項起為負數？

```
(%i1) load(funcs);
```

```
(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/simplification/funcs.mac
```

```
(%i2) solve([arithmetic(28,-5,an)]=0,[an]);
```

```
(%o2) [an= $\frac{33}{5}$ ]
```

```
(%i3) float(33/5);
```

```
(%o3) 6.6
```

\* 此等差數列在 6.6 項之後為 0 , 且項次為整數 , 故第 7 項起為負數

(2) 前幾項之和最大

```
(%i1) sum(28-5*n , n, 0,3);
```

```
(%o1) 82
```

```
(%i2) sum(28-5*n , n, 0,4);
```

```
(%o2) 90
```

```
(%i3) sum(28-5*n , n, 0,5);
```

(%o3) 93

(%i4) sum(28-5\*n , n, 0,6);

(%o4) 91

(%i5) sum(28-5\*n , n, 0,7);

(%o5) 84

\*此等差數列第 5 項之和最大，其和為 93

※「load ("functs")」指令表示先讀取此 function(函數)。

※「float( 數值 )」指令表示將結果轉換為小數。

※「solve([ 變數算式 ],[ 變數 ])」指令表示求解。

※「sum(計算式,變數,起始, 結束)」指令表示含變數之算式由起始連加至結束。

※「arithmetic (a, d, n)」表示首項為 a、公差為 d、n 項之等差數列; $a, a + d, a + 2*d, \dots, a + (n - 1)*d$ .

4.兩等比數列 $\langle a_n \rangle, \langle b_n \rangle$ 、公比  $r_a, r_b$  皆大於 0，且滿足  $a_1=1, a_3= b_3, a_3= 8b_6, r_a+r_b=6$ ，求此兩數列得一般項。

5.設  $C_1$  為單位圓， $T_1$  為  $C_1$  之內接正三角形， $C_2$  為  $T_1$  之內切圓， $T_2$  為  $C_2$  之內接正三角形，依此類推。另  $a_i$  表  $T_i$  的面積，是分別求下列各式之值

(1)  $a_1$                       (2)  $\sum_{i=1}^5 a_i$                       (3)  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$

6.

(1)  $0.9+0.099+0.00999+\dots+0.00\dots99\dots9$  (n 個 0 與 n 個 9)

**※本小題不建議使用 Maxima 解題※**

(2)  $0.9+0.099+0.00999+\dots+0.00\dots99\dots9+\dots$ (n 個 0 與 n 個 9)



(3)  $0.6+0.066+0.00666+\cdots+0.00\cdots66\cdots6+\cdots$ ( $n$  個 0 與  $n$  個 6)

7.  $n$  為任意正整數，試證： $2^{8n+1}-2^{4n}$  的個位數是 6

8.  $n$  為任意正整數，且  $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$  都是正數，試證

$$(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\cdots(1+a_n) \geq 1+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$$

### 第三章 多項式

#### 3-1 多項式的四則運算

##### P.144

**例題 1**：設  $f(x)=4x^3-x^2+5$ ， $g(x)=2x^2+3x-6$ ， $h(x)=-2x^2-3x+8$

(1)  $f(x)+g(x)$

(%i1)  $f(x):=4*x^3-x^2+5;$

(%o1)  $f(x) :=4x^3-x^2+5$

(%i2)  $g(x) :=2*x^2+3*x-6;$

(%o2)  $g(x) :=2x^2+3x-6$

(%i3)  $f(x)+g(x);$

(%o3)  $4x^3+x^2+3x-1$

(2)  $f(x)-g(x)$

(%i4)  $f(x)-g(x);$

(%o4)

(3)  $g(x)+h(x)$

(%i5)  $h(x):=-2*x^2-3*x+8;$

(%o5)  $h(x) := -2x^2-3x+8$

(%i6)  $g(x)+h(x);$

(%o6) 2

※  $f(x):=ax+b$ ; 定義函數：須以“:=”定義； 定義後只需輸入  $f(x)$  之  $x$  數值即可求得

結果。

**P.145**

**隨堂練習：** 設  $f(x)=x^2+5x-1$  ,  $g(x)=x^3-3x^2+7$  ,  $h(x)=-x^2-5x+3$  ,  $k(x)=x^3+4x-6$

(1)  $f(x)+g(x)$

(%i1)  $f(x):=x^2+5*x-1;$

(%o1)  $f(x):=x^2+5x-1$

(%i2)  $g(x):=x^3-3*x^2+7;$

(%o2)  $g(x):=x^3-3x^2+7$

(%i3)  $f(x)+g(x);$

(%o3)  $x^3-2x^2+5x+6$

(2)  $f(x)+h(x)$

(%i4)  $h(x):=-x^2-5*x+3;$

(%o4)  $h(x):=-x^2-5x+3$

(%i5)  $f(x)+h(x);$

(%o5) 2

(3)  $g(x)-k(x)$

(%i6)  $k(x):=x^3+4*x-6;$

(%o6)  $k(x):=x^3+4x-6$

(%i7)  $g(x)-k(x);$

(%o7)  $-3x^2-4x+13$

※  $f(x):=ax+b$ ; 定義函數：須以”:=”定義； 定義後只需輸入  $f(x)$ 之  $x$  數值即可求得

結果。

**P.146**

**例題 2**：求 $(x^3+2x^2-3)(x^2-4x+1)$  之乘積

```
(%i1) expand((x^3+2*x^2-3)*(x^2-4*x+1));
```

```
(%o1) x^5-2x^4-7x^3-x^2+12x-3
```

※ 「**expand** ([ 算式 ] × [ 算式 ])」指令表示展開算式。

**P.147**

**隨堂練習**：求下列多項式之乘積

(1)  $(-6x)(3x^2-\frac{1}{2}x+7)$

```
(%i1) expand((-6*x)*(3*x^2-1/2*x+7));
```

```
(%o1) -18x^3+3x^2-42x
```

(2)  $(x^2+2)(x-1)$

```
(%i2) expand((x^2+2)*(x-1));
```

```
(%o2) x^3-x^2+2x-2
```

(3)  $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

```
(%i3) expand((x^2+x+1)*(x^2-x+1));
```

```
(%o3) x^4+x^2+1
```

※ 「**expand** ([ 算式 ] × [ 算式 ])」指令表示展開算式。

**P.150**

**例題 3**：求 $(2x^3+5x^2-4x+7)$ 除以 $(2x^2-x+1)$  商與餘式

```
(%i1) quotient((2*x^3+5*x^2-4*x+7),(2*x^2-x+1));
```

(%o1)  $x+3$ (%i2) remainder(( $2*x^3+5*x^2-4*x+7$ ),( $2*x^2-x+1$ ));(%o2)  $4-2x$ \*商為  $x+3$ ，餘式為  $4-2x$ 

※ 「quotient ( 被除數,除數 )」指令表示求商。

※ 「remainder ( 被除數,除數 )」指令表示求餘數。

**例題 4**：求  $x^4-x^2+3$  除以  $2x+4$  的商與餘式(%i1) quotient(( $x^4-x^2+3$ ),( $2*x+4$ ));(%o1)  $\frac{x^3-2x^2+3x-6}{2}$ (%i2) remainder(( $x^4-x^2+3$ ),( $2*x+4$ ));

(%o2) 15

\*商為  $\frac{x^3-2x^2+3x-6}{2}$ ，餘式為 15

※ 「quotient ( 被除數,除數 )」指令表示求商。

※ 「remainder ( 被除數,除數 )」指令表示求餘數。

**P.151****隨堂練習**(1)求  $x^2-x+1$  除以  $x+2$  的商與餘式(%i1) quotient(( $x^2-x+1$ ),( $x+2$ ));(%o1)  $x-3$ (%i2) remainder(( $x^2-x+1$ ),( $x+2$ ));

(%o2) 7

\*商為  $x-3$ ，餘式為 7



※ 「quotient ( 被除數,除數 )」指令表示求商。

※ 「remainder ( 被除數,除數 )」指令表示求餘數。

(2)求  $6x^3-9x^2+x$  除以  $3x^2-4x+1$  的商與餘式

(%i1) quotient((6\*x^3-9\*x^2+x),(3\*x^2-4\*x+1));

(%o1)  $\frac{6x-1}{3}$

(%i2) remainder((6\*x^3-9\*x^2+x),(3\*x^2-4\*x+1));

(%o2)  $-\frac{7x-1}{3}$

\*商為  $\frac{6x-1}{3}$ ，餘式為  $-\frac{7x-1}{3}$

※ 「quotient ( 被除數,除數 )」指令表示求商。

※ 「remainder ( 被除數,除數 )」指令表示求餘數。

**例題 5：**設多項式  $f(x)$  除以  $x^2-x+1$  的商為  $x+1$ ，餘式為  $x-3$ ，求  $f(x)$  除以  $x+2$  的商與餘式

(%i1) expand((x^2-x+1)\*(x+1)+(x-3));

(%o1)  $x^3+x-2$

(%i2) quotient((x^3+x-2),(x+2));

(%o2)  $x^2-2x+5$

(%i3) remainder((x^3+x-2),(x+2));

(%o3) -12

\*原多項式  $f(x) = (\text{除式} \times \text{商}) + \text{餘數} = x^3+x-2$ ；商為  $x^2-2x+5$ ，餘式為 -12

※ 「expand ([ 算式 ] × [ 算式 ])」指令表示展開算式。

※ 「quotient ( 被除數,除數 )」指令表示求商。

※ 「remainder ( 被除數,除數 )」指令表示求餘數。

**P.152****隨堂練習**

多項式  $2x^3+ax^2-2x+b$  除以  $2x^2-6x+c$  的商是  $x+1$ ，餘式是  $-x-5$ ，求常數  $a, b, c$  之值

(%i1) expand((2\*x^2-6\*x+c)\*(x+1)+(-x-5));

(%o1)  $2x^3-4x^2+cx-7x+c-5$

\*  $ax^2=-4x^2$ 、 $cx-7x=-2x$ 、 $c-5=b$ ；可知  $a=-4$ 、 $b=0$ 、 $c=5$

※ 「expand ( [ 算式 ] × [ 算式 ] )」指令表示展開算式。

**P.153**

**例題 6：**求  $2x^3-7x^2+10x-3$  除以  $x-2$  的商與餘式

(%i1) quotient((2\*x^3- 7\*x^2+10\*x-3),( x-2));

(%o1)  $2x^2-3x+4$

(%i2) remainder((2\*x^3- 7\*x^2+10\*x-3),( x-2));

(%o2) 5

\* 商為  $2x^2-3x+4$ ，餘式為 5

※ 「quotient ( 被除數,除數 )」指令表示求商。

※ 「remainder ( 被除數,除數 )」指令表示求餘數。

**隨堂練習：**求  $2x^4-3x^3+6x^2-6x$  除以  $x-1$  的商與餘式

(%i1) quotient((2\*x^4-3\*x^3+6\*x^2-6\*x),( x-1));

(%o1)  $2x^3-x^2+5x-1$

(%i2) remainder((2\*x^4-3\*x^3+6\*x^2-6\*x),( x-1));

(%o2) -1

\*商為  $2x^3-x^2+5x-1$ ，餘式為  $-1$

※ 「quotient ( 被除數,除數 )」指令表示求商。

※ 「remainder ( 被除數,除數 )」指令表示求餘數。

### P.154

例題 7：

(1)求  $f(x)=2x^3-7x^2+13x+2$  除以  $x-\frac{1}{2}$  的商與餘式

(%i1) quotient((2\*x^3-7\*x^2+13\*x+2),(x-1/2));

(%o1)  $2x^2-6x+10$

(%i2) remainder((2\*x^3-7\*x^2+13\*x+2),(x-1/2));

(%o2) 7

\*商為  $2x^2-6x+10$ ，餘式為 7

(2) 試由(1)說明  $f(x)=2x^3-7x^2+13x+2$  除以  $2x-1$  的商與餘式

(%i1) quotient((2\*x^3-7\*x^2+13\*x+2),(2\*x-1));

(%o1)  $x^2-3x+5$

(%i2) remainder((2\*x^3-7\*x^2+13\*x+2),(2\*x-1));

(%o2) 7

\*商為  $x^2-3x+5$ ，餘式為 7

※ 「quotient ( 被除數,除數 )」指令表示求商。

※ 「remainder ( 被除數,除數 )」指令表示求餘數。

### P.155

隨堂練習：求  $3x^4+2x^3-6x^2+11x+4$  除以  $3x+2$  的商與餘式

(%i1) quotient((3\*x^4+2\*x^3-6\*x^2+11\*x+4),(3\*x+2));

(%o1)  $x^3-2x+5$

(%i2) remainder((3\*x^4+2\*x^3-6\*x^2+11\*x+4),(3\*x+2));

(%o2) -6

\*商為  $x^3-2x+5$ ，餘式為-6

※ 「quotient ( 被除數,除數 )」指令表示求商。

※ 「remainder ( 被除數,除數 )」指令表示求餘數。

**例題 8**：設  $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 40x - 31$

(1)將  $f(x)$ 表示成  $x-2$  的多項式(即  $f(x) = a(x-2)^3 + b(x-2)^2 + c(x-2) + d$ ，其中  $a, b, c, d$  為常數)

(%i1) quotient((2\*x^3-15\*x^2+40\*x-31),(x-2));

(%o1)  $2x^2-11x+18$

(%i2) remainder((2\*x^3-15\*x^2+40\*x-31),(x-2));

(%o2) 5

(%i3) quotient((2\*x^2-11\*x+18),(x-2));

(%o3)  $2x-7$

(%i4) remainder((2\*x^2-11\*x+18),(x-2));

(%o4) 4

(%i5) quotient((2\*x-7),(x-2));

(%o5) 2

(%i6) remainder((2\*x-7),(x-2));

(%o6) -3

\* 可知  $a=2$ 、 $b=-3$ 、 $c=4$ 、 $d=5$

(2) 利用(1)的結果，求  $f(1.98)$  的近似值 (四捨五入至小數第三位)

```
(%i7) 2*(1.98-2)^3-3*(1.98-2)^2+4*(1.98-2)+5;
```

```
(%o7) 4.918784
```

※ 「**quotient** ( 被除數,除數 )」指令表示求商。

※ 「**remainder** ( 被除數,除數 )」指令表示求餘數。

### 隨堂練習

將  $f(x) = x^4 + 8x^3 + 16x^2 - 9x - 31$  表示成  $x+3$  的多項式，並求  $f(-2.99)$  的近似值 (四捨五入至小數第三位)

```
(%i1) quotient((x^4+8*x^3+16*x^2-9*x-31),(x+3));
```

```
(%o1) x^3+5x^2+x-12
```

```
(%i2) remainder((x^4+8*x^3+16*x^2-9*x-31),(x+3));
```

```
(%o2) 5
```

```
(%i3) quotient((x^3+5*x^2+x-12),(x+3));
```

```
(%o3) x^2+2x-5
```

```
(%i4) remainder((x^3+5*x^2+x-12),(x+3));
```

```
(%o4) 3
```

```
(%i5) quotient((x^2+2*x-5),(x+3));
```

```
(%o5) x-1
```

```
(%i6) remainder((x^2+2*x-5),(x+3));
```

```
(%o6) -2
```

```
(%i7) quotient((x-1),(x+3));
```

(%o7) 1

(%i8) remainder((x-1), (x+3));

(%o8) -4

\* 可知  $f(x) = x^4 + 8x^3 + 16x^2 - 9x - 31 = (x+3)^4 - 4(x+3)^3 - 2(x+3)^2 + 3(x+3) + 5$

(2) 利用(1)的結果，求  $f(-2.99)$  的近似值 (四捨五入至小數第三位)

(%i7) (-2.99+3)^4 -4\*(-2.99+3)^3 -2\*(-2.99+3)^2 +3\*(-2.99+3)+5;

(%o7) 5.029796009999999

※ 「quotient ( 被除數,除數 )」指令表示求商。

※ 「remainder ( 被除數,除數 )」指令表示求餘數。

**P.156** **習題 3-1**

1. 觀念題：對的在題號前打○，錯的在題號前打×

設  $f(x)$ 、 $g(x)$  為多項式，且  $\deg f(x)=3$ ， $\deg g(x)=3$ ，試判斷下列敘述是否正確

\_\_\_ (1)  $\deg (f(x)+g(x))=3$

\_\_\_ (2)  $\deg (f(x)-g(x))=2$

\_\_\_ (3)  $\deg (2f(x)-g(x))=3$

\_\_\_ (4)  $\deg (f(x) \times g(x))=6$

\_\_\_ (5)  $f(x) \div g(x)$  的商的次數為 0

\_\_\_ (6)  $f(x)$  除以  $3x-2$  的商與  $f(x)$  除以  $x-\frac{2}{3}$  的商相同

\_\_\_ (7)  $f(x)$  除以  $3x-2$  的商與  $f(x)$  除以  $x-\frac{2}{3}$  的餘式相同

**※本題不建議使用 Maxima 解題※**

2. 設  $f(x)=2x^4-5x^3+10x-19$ ， $g(x)=x^2-3x+4$ ，試求：

(1)  $f(x)+g(x)$

(%i1)  $f(x):=2*x^4-5*x^3+10*x-19;$

(%o1)  $f(x):=2x^4-5x^3+10x-19$

(%i2)  $g(x):=x^2-3*x+4;$

(%o2)  $g(x):=x^2-3x+4$

(%i3)  $f(x)+g(x);$

(%o3)  $2x^4-5x^3+x^2+7x-15$

(2)  $3f(x)-2g(x)$

(%i4)  $\text{expand}(3*f(x)-2*g(x));$

(%o4)  $6x^4-15x^3-2x^2+36x-65$

(3)  $f(x) \times g(x)$

(%i5) `expand(f(x)*g(x));`

(%o5)  $2x^6 - 11x^5 + 23x^4 - 10x^3 - 49x^2 + 97x - 76$

(4)  $f(x) \div g(x)$  的商與餘數

(%i6) `quotient(f(x)/g(x));`

(%o6)  $2x^2 + x - 5$

(%i7) `remainder(f(x)/g(x));`

(%o7)  $1 - 9x$

※  $f(x) := ax + b$ ; 定義函數：須以“:=”定義；定義後只需輸入  $f(x)$  之  $x$  數值即可求得結

果。

※ 「`expand` ([算式] × [算式])」指令表示展開算式。

※ 「`ratsimp` ([算式] × [算式])」指令表示化簡算式。

※ 「`quotient` (被除數, 除數)」指令表示求商。

※ 「`remainder` (被除數, 除數)」指令表示求餘數。

3. 求下列多項式的乘積

(1)  $(x-a)(x^2+ax+a^2)$

(%i1) `ratsimp((x-a)*(x^2+a*x+a^2));`

(%o1)  $x^3 - a^3$

(2)  $(x+a)(x^2-ax+a^2)$

(%i1) `ratsimp((x+a)*(x^2-a*x+a^2));`



$$(\%o1) x^3+a^3$$

$$(3) (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$$

$$(\%i1) \text{ratsimp}((x-1)*(x^4+x^3+x^2+x+1));$$

$$(\%o1) x^5-1$$

$$(4) (x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$$

$$(\%i1) \text{ratsimp}((x+1)*(x^4-x^3+x^2-x+1));$$

$$(\%o1) x^5+1$$

※ 「ratsimp([算式] × [算式])」指令表示化簡算式。

4. 若兩多項式  $f(x) = 2x^2 + x + 9$ ,  $g(x) = a(x-1)(x+2) + b(x+2)(x-3) + c(x-1)(x-3)$ , 且  $f(x) = g(x)$ , 試求實數  $a, b, c$  的值

$$(\%i1) \text{ratsimp}((x+1)*(x^4-x^3+x^2-x+1));$$

$$(\%o1) cx^2+bx^2+ax^2-4cx-bx+ax+3c-6b-2a$$

$$(\%i2) \text{solve}([a+b+c=2, a-b-4*c=1, 3*c-6*b-2*a=9], [a, b, c]);$$

$$(\%o2) [[a=3, b=-2, c=1]]$$

$$* g(x) = 3(x-1)(x+2) - 2(x+2)(x-3) + (x-1)(x-3)$$

※ 「ratsimp([算式] × [算式])」指令表示化簡算式。

※ 「solve([變數算式], [變數])」指令表示求解。

5. 設  $p(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4$ ,  $q(x) = 10 - 9x + 8x^2 - 7x^3 + 6x^4$ , 試求  $p(x) \cdot q(x)$  中

(1)  $x^4$  的係數

$$(\%i1) p(x) := 1 + 2*x + 3*x^2 + 4*x^3 + 5*x^4;$$

$$(\%o1) p(x) := 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4$$

```
(%i2) q(x) := 10-9*x+8*x^2-7*x^3+6*x^4;
```

```
(%o2) q(x):= 10-9x+ 8x^2+(-7)x^3 +6x^4
```

```
(%i3) expand(p(x)*q(x));
```

```
(%o3) 30x^8-11x^7+30x^6-22x^5+30x^4+22x^3+20x^2+11x+10
```

(2)所有係數和

```
(%i4) 30-11+30-22+30+22+20+11+10;
```

```
(%o4) 120
```

※  $f(x):=ax+b$ ; 定義函數：須以”:=”定義； 定義後只需輸入  $f(x)$  之  $x$  數值即可求得結

果。

※ 「`expand([算式] × [算式])`」指令表示展開算式。

6.若  $x^4+ax^2+bx+6$  能被  $x^2+x+2$  整除，試求常數  $a, b$  之值及商

```
(%i1) solve([x^2+x+2=0],[x]);
```

```
(%o1) [x=- $\frac{\sqrt{7}\%i+1}{2}$ , x= $\frac{\sqrt{7}\%i-1}{2}$ ]
```

```
(%i2) f(x):=x^4+a*x^2+b*x+6;
```

```
(%o2) f(x):=x^4+ax^2+bx+6
```

```
(%i3) solve([f(-(sqrt(7)*%i+1)/2)=0,f((sqrt(7)*%i-1)/2)=0],[a,b]);
```

```
(%o3) [[a=4,b=1]]
```

```
(%i4) quotient(x^4+4*x^2+1*x+6, x^2+x+2);
```

```
(%o4) x^2-x+3
```

\*  $\pi$  表示為 %pi

※  $f(x):=ax+b$ ; 定義函數：須以”:=”定義； 定義後只需輸入  $f(x)$  之  $x$  數值即可求得

結果。

※ 「sqrt ( 數值 )」指令表示數值開根號。

※ 「solve([ 變數算式 ],[ 變數 ])」指令表示求解。

※ 「quotient ( 被除數,除數 )」指令表示求商。

7. 設多項式  $f(x)$  除以  $x^3-1$  的餘式為  $x^2+3$ ，試求  $f(x)$  除以  $x^2+x+1$  的餘式

**※本題不建議使用 Maxima 解題※**

8. 已知多項式  $f(x)$  除以  $2x^2+x-4$  的商為  $x+5$ ，餘式為  $-2x+1$ ，試求：

(1)  $f(x)$  除以  $x^2+\frac{1}{2}x-2$  的商與餘式

(%i1) expand((2\*x^2+x-4)\*(x+5)+(-2\*x+1));

(%o1)  $2x^3+11x^2-x-19$

(%i2) quotient((2\*x^3+11\*x^2-x-19),(x^2+1/2\*x-2));

(%o2)  $2x+10$

(%i3) remainder((2\*x^3+11\*x^2-x-19),(x^2+1/2\*x-2));

(%o3)  $1-2x$

(2)  $f(x)$  除以  $x+5$  的商與餘式

(%i4) quotient((2\*x^3+11\*x^2-x-19),(x+5));

(%o4)  $2x^2+x-6$

(%i5) remainder((2\*x^3+11\*x^2-x-19),(x+5));

(%o5)  $11$

※ 「expand ([ 算式 ] × [ 算式 ])」指令表示展開算式。

※ 「quotient ( 被除數,除數 )」指令表示求商。

※ 「remainder ( 被除數,除數 )」指令表示求餘數。

9. 設  $f(x) = 3x^3 - 24x^2 + 22x + 5$  ,

(1)  $f(x)$  表示成  $x-1$  的多項式

(%i1) quotient((3\*x^3-24\*x^2+22\*x+5),(x-1));

(%o1)  $3x^2 - 21x + 1$

(%i2) remainder((3\*x^3-24\*x^2+22\*x+5),(x-1));

(%o2) 6

(%i3) quotient((3\*x^2-21\*x+1),(x-1));

(%o3)  $3x - 18$

(%i4) remainder((3\*x^2-21\*x+1),(x-1));

(%o4) -17

(%i5) quotient((3\*x-18),(x-1));

(%o5) 3

(%i6) remainder((3\*x-18),(x-1));

(%o6) -15

$$*f(x) = 3x^3 - 24x^2 + 22x + 5 = 3(x-1)^3 - 15(x-1)^2 - 17(x-1) + 6$$

(2)  $f(1.002)$  的近似值(四捨五入至小數第二位)

(%i7)  $3*(1.002-1)^3 - 15*(1.002-1)^2 - 17*(1.002-1) + 6;$

(%o7) 5.965940024

※ 「quotient ( 被除數, 除數 )」指令表示求商。

※ 「remainder ( 被除數, 除數 )」指令表示求餘數。

10. 小明買了二份禮物，裝在二個一樣大的禮盒裏，想將這二個禮盒重疊包裝再一起，請快遞公司送給大明，若禮盒的三邊長為  $x$  公分， $(x+1)$  公分， $(x+2)$  公分 ( $x > 0$ )，



將兩個禮物重疊包裝再一起，有三種不同的方式，試問：

(1) 小明應選擇何種包裝方式，才能最節省包裝紙(即表面積最小)

(%i1) `expand(2*(x+2)*x+2*(x+2)*(x+1)+x*(x+1));`

(%o1)  $5x^2+11x+4$

(%i2) `expand(2*x*(x+1) + (x+2)*(x+1)+ 2*x*(x+2));`

(%o2)  $5x^2+9x+2$

(%i3) `expand((x+2)*x+2*(x+2)*(x+1)+ 2*x*(x+1));`

(%o3)  $5x^2+10x+4$

(2)若快遞公司是以包裝後物品的長、寬、高三邊合計之大小為計費標準，則小明應選用何種包裝方式，才能最節省運費？

(%i1) `expand(x+(x+1)+2*(x+2));`

(%o1)  $4x+5$

(%i2) `expand(2*x+(x+1)+(x+2));`

(%o2)  $4x+3$

(%i3) `expand(x+2*(x+1)+(x+2));`

(%o3)  $4x+4$

※ 「`expand([算式] × [算式])`」指令表示展開算式。

## 3-2 餘式定理、因式定理

## P.159

**例題 1：**試求多項式  $x^{50}-x^{25}+1$  除以  $x+1$  的餘式

```
(%i1) remainder ((x^50-x^25+1),( x+1));
```

```
(%o1) 3
```

※ 「remainder ( 被除數,除數 )」指令表示求餘數。

**隨堂練習：**

(1) 試求多項式  $(x-1)^{10}$  除以  $x-2$  的餘式

```
(%i1) remainder ((x-1)^10,( x-2));
```

```
(%o1) 1
```

(2) 試求多項式  $(x+1)^{10}$  除以  $2x+1$  的餘式

```
(%i1) remainder ((x+1)^10,( 2*x+1));
```

```
(%o1)  $\frac{1}{1024}$ 
```

※ 「remainder ( 被除數,除數 )」指令表示求餘數。

**例題 2：**設多項式  $2x^3+mx^2+nx+5$  被  $x+2$  除的餘式為  $-15$ ，被  $x-3$  除的餘式為  $20$ ，試求  $m$ 、 $n$  的值

```
(%i1)solve([remainder (2*x^3+m*x^2 + n*x+5,( x+2))=-15, remainder (2*x^3+m*x^2 + n*x+5,( x-3))=20],[m,n]);
```

```
(%o1) [[m=-3,n=-4]]
```

※ 「solve([ 變數算式 ],[ 變數 ])」指令表示求解。

※ 「remainder ( 被除數,除數 )」指令表示求餘數。

**隨堂練習：**設多項式  $x^3+kx^2-x+5$ ，若  $f(x)$  被  $x-2$  除的餘式與  $f(x)$  被  $x+1$  除的餘式相等，求常數  $k$  及餘式

```
(%i1)solve([(remainder (x^3+k*x^2 -x+5,( x-2))= remainder (x^3+k*x^2
-x+5,( x+1)))]],[k]);
```

```
(%o1) [k=-2]
```

```
(%i2) remainder (x^3-2*x^2 -x+5,( x-2));
```

```
(%o2)3
```

※ 「solve([ 變數算式 ],[ 變數 ])」指令表示求解。

※ 「remainder ( 被除數,除數 )」指令表示求餘數。

### P.160

**例題 3：**設  $f(x)=2x^5-15x^4+9x^3-11x^2-22x+8$ ，試求  $f(7)$  之值

方法一：

```
(%i1) 2*7^5-15*7^4 +9*7^3-11*7^2 -22*7+8
```

```
(%o1)1
```

方法二：

```
(%i1) remainder (2*x^5-15*x^4 +9*x^3 -11*x^2-22*x+8,( x-7));
```

```
(%o1)1
```

※ 「remainder ( 被除數,除數 )」指令表示求餘數。

**隨堂練習：**

(1)設  $f(x)=26x^4-63x^3+37x^2-58x+42$ ，試求  $f(2)$  之值

方法一：

(%i1)  $26*2^4 - 63*2^3 + 37*2^2 - 58*2 + 42$

(%o1) -14

方法二：

(%i2) remainder (26\*x^4-63\*x^3+37\*x^2-58\*x+42,( x-2));

(%o2) -14

(2)  $11^5 - 5 \cdot 11^4 - 61 \cdot 11^3 - 56 \cdot 11^2 + 12 \cdot 11 + 7$  (提示  $f(x) = x^5 - 5x^4 - 61x^3 - 56x^2 + 12x + 7$  ,

求  $f(11)$ )

方法一：

(%i1)  $11^5 - 5*11^4 - 61*11^3 - 56*11^2 + 12*11 + 7$ ;

(%o1) 18

方法二：

(%i2) remainder (x^5-5\*x^4 -61\*x^3-56\*x^2 +12\*x+7,( x-11));

(%o2) 18

※ 「remainder ( 被除數,除數 )」指令表示求餘數。

**例題 4：**設  $f(x)$  為一多項式， $\deg f(x) \geq 2$ ，若  $f(x)$  除以  $x+2$  的餘式為 8， $f(x)$  除以  $x-3$  的餘式為 -7，試求  $f(x)$  除以  $(x+2)(x-3)$  的餘式

(%i1) solve([-2\*a+b=8,3\*a+b=-7],[a,b]);

(%o1) [[a=-3,b=2]]

\* $f(x)$  除以  $(x+2)(x-3)$  的餘式為  $-3x+2$

※ 「solve([ 變數算式 ],[ 變數 ])」指令表示求解。



**P.161**

**隨堂練習：**設  $f(x)$  為一多項式， $\deg f(x) \geq 3$ ，若  $f(x)$  除以  $x+1$ ， $x-2$ ， $x+3$  的餘式分別為 2，17，22，試求  $f(x)$  除以  $(x+1)(x-2)(x+3)$  的餘式

```
(%i1) solve([a*(-1)^2+b*(-1)+c=2, a*(2)^2+b*(2)+c=17, a*(-3)^2+b*(-3)+c=22],[a,b,c]);
```

```
(%o1) [[a=3,b=2,c=1]]
```

\* $f(x)$  除以  $(x+1)(x-2)(x+3)$  的餘式  $3x^2+2x+1$

※ 「`solve([ 變數算式 ], [ 變數 ])`」指令表示求解。

**P.162**

**例題 5：**設  $f(x)=2x^3-4x^2+ax-3$  有一次因式  $x-3$ ，求  $a$  之值

```
(%i1) solve([2*(3)^3-4*(3)^2+3*a-3=0],[a]);
```

```
(%o1) [a=-5]
```

※ 「`solve([ 變數算式 ], [ 變數 ])`」指令表示求解。

**隨堂練習：**下列哪些是  $f(x)=2x^3+5x^2-x-6$  的因式？

(1) $x+1$

方法一：

```
(%i1) 2*(-1)^3+5*(-1)^2 -(-1)-6;
```

```
(%o1) -2
```

方法二：

```
(%i2) remainder (2*x^3+5*x^2 -x-6,( x+1));
```

```
(%o2) -2
```

$$(2)x-1$$

方法一：

$$2*(1)^3+5*(1)^2 -(1)-6;$$

$$0$$

方法二：

$$\text{remainder}(2*(1)^3+5*(1)^2 -(1)-6,(x-1));$$

$$0$$

$$(2)x+2$$

方法一：

$$2*(-2)^3+5*(-2)^2 -(-2)-6;$$

$$0$$

方法二：

$$\text{remainder}(2*x^3+5*x^2 -x-6,(x+2));$$

$$0$$

$$(4)x-2$$

方法一：

$$2*(2)^3+5*(2)^2 -(2)-6;$$

$$28$$

方法二：

(%i2) remainder (2\*x^3+5\*x^2 -x-6,( x-2));

(%o2) 28

(5)2x+3

方法一：

(%i1) 2\*(-3/2)^3+5\*(-3/2)^2 -(-3/2)-6;

(%o1) 0

方法二：

(%i2) remainder (2\*x^3+5\*x^2 -x-6,( 2\*x+3));

(%o2) 0

\*餘數為 0 代表為多項式之因數，故本(2)(3)(5)小題皆為  $f(x)=2x^3+5x^2-x-6$  的因式

※「remainder ( 被除數,除數 )」指令表示求餘數。

**例題 6：**試說明

(1)若多項式  $f(x)$  的各項係數總和為 0，則  $f(x)$  有因式  $x-1$

(2)若多項式  $f(x)$  的偶次項係數總和等於奇次項係數總和，則  $f(x)$  有因式  $x+1$

**※本題不建議使用 Maxima 解題※**

## P.163

**隨堂練習：**設  $n$  為一整數，試說明  $f(x)=(x+2)^n-1$  為  $x+2$  的倍式

**※本題不建議使用 Maxima 解題※**

**例題 7：**設  $f(x)$  是一個多項式， $c_1$ 、 $c_2$  為兩相異常數，且  $f(c_1) = f(c_2) = 0$ ，則  $(x - c_1)(x - c_2)$  是  $f(x)$  的因式

※本題不建議使用 Maxima 解題※

### P.164

**例題 8：**設  $f(x)$  為三次多項式，且  $f(1) = f(-1) = 0$ ， $f(2) = 9$ ， $f(-2) = -15$ ，試求  $f(x)$

```
(%i1) solve([(2-1)*(2+1)*(a*2+b)=9, (-2-1)*(-2+1)*(a*-2+b)=-15],[a,b]);
```

```
(%o1) [[a=2,b=-1]]
```

**隨堂練習：**設  $f(x)$  為三次多項式，且  $f(0) = f(-1) = f(2) = 0$ ， $f(3) = 24$ ，試求  $f(x)$

```
(%i1) solve([a*3*(3+1)*(3-2)=24],[a]);
```

```
(%o1) [a=2]
```

```
(%i2) expand (2*x*(x+1)*(x-2));
```

```
(%o2) 2x3-2x2-4x
```

```
*f(x) = 2x3-2x2-4x
```

※「`solve([ 變數算式 ], [ 變數 ])`」指令表示求解。

※「`expand([ 算式 ] × [ 算式 ])`」指令表示展開算式。

### P.165

**例題 9：**求多項式  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 4$  的整係數一次因式

```
(%i1) factor(x^3-3*x^2+4*x-4);
```

```
(%o1) (x-2) (x2-x+2)
```

```
*整係數一次因式為(x-2)
```

※「`factor( 數值 )`」指令表示求因式分解。

**P.166**

**隨堂練習：**求多項式  $f(x)=2x^3-x^2-8x+4$  的整係數一次因式

(%i1) factor(2\*x^3-x^2-8\*x+4);

(%o1) (x-2)(x+2)(2x-1)

\* 整係數一次因式為  $(x-2)$ 、 $(x+2)$ 、 $(2x-1)$

※ 「factor( 數值 )」指令表示求因式分解。

**P.167** **習題 3-2**

1. 觀念題：對的在題號前打○，錯的在題號前打×

\_\_\_ (1) 若多項式  $f(x) = (3x^2 - 2x + 1)q(x) + x^2 - 1$ ，表  $f(x)$  除以  $(3x^2 - 2x + 1)$ ，其商為  $q(x)$ ，餘式為  $x^2 - 1$

\_\_\_ (2) 多項式  $f(x)$ ，若  $f(1) = 0$ ， $f(2) = 0$ ，表  $(x-1)(x-2)$  為  $f(x)$  的因式

\_\_\_ (3) 若  $f(x) = 6x^2 + x - 35$ ，因為  $2 \mid 6$  且  $7 \mid 35$ ，所以  $(2x-7) \mid f(x)$

\_\_\_ (4)  $a, b$  為整數，多項式  $f(x) = 3x^3 + ax^2 + bx + 2$  可能會有因式  $2x+1$

**※本題不建議使用 Maxima 解題※**

2. 是求下列各題的餘式：

(1)  $x^{100} - 10x + 9$  除以  $x-1$

方法一：

```
(%i1) (1)^100-10*(1)+9;
```

```
(%o1) 0
```

方法二：

```
(%i2) remainder (x^100-10*x+9,(x-1));
```

```
(%o2) 0
```

(2)  $(3x+1)^{100}$  除以  $3x+2$

方法一：

```
(%i1) (3*-2/3+1)^100;
```

```
(%o1) 1
```

方法二：

(%i2) remainder ((3\*x+1)^100,( 3\*x+2));

(%o2) 1

(3)  $2x^5 - 7x^4 - 11x^3 + 12x^2 + 5x + 3$  除以  $2x + 3$

方法一：

(%i1)  $2*(-3/2)^5 - 7*(-3/2)^4 - 11*(-3/2)^3 + 12*(-3/2)^2 + 5*(-3/2) + 3;$

(%o1) 9

方法二：

(%i2) remainder (2\*x^5-7\*x^4-11\*x^3+12\*x^2+5\*x+3,( 2\*x+3));

(%o2) 9

※ 「remainder ( 被除數,除數 )」指令表示求餘數。

3.

(1) 若  $f(x) = 123x^4 - 234x^3 - 345x^2 + 120x + 100$ ，試求  $f(3)$  之值

(%i1)  $123*(3)^4 - 234*(3)^3 - 345*(3)^2 + 120*(3) + 100;$

(%o1) 1000

(2) 試求  $12^6 - 11 \cdot 12^5 - 13 \cdot 12^4 - 11 \cdot 12^3 + 15 \cdot 12^2 - 34 \cdot 12 - 25$  之值(提示：令  $x^6 - 11 \cdot x^5 - 13 \cdot x^4 + 11 \cdot x^3 + 15 \cdot x^2 - 34 \cdot x - 25$ ，求  $f(12)$ )

方法一：

(%i1)  $12^6 - 11*12^5 - 13*12^4 + 11*12^3 + 15*12^2 - 34*12 - 25;$

(%o1) -1

方法二：

```
(%i2) remainder (x^6-11*x^5-13*x^4+11*x^3 + 15*x^2-34*x - 25,( x-12));
```

```
(%o2) -1
```

※ 「remainder ( 被除數,除數 )」指令表示求餘數。

4. 設多項式  $f(x)$  被  $x+2$  除之餘式為 4，其商  $q(x)$  被  $x-3$  除之餘式為 5，則  $f(x)$  被  $(x+2)(x-3)$  除之餘式為何？

**※本題不建議使用 Maxima 解題※**

5. 已知多項式  $x^{50}+2ax^{25}+b$  除以  $x-1$  的餘式為 3，除以  $x+1$  的餘式為 7，

(1) 試求實數  $a$ 、 $b$  之值

```
(%i1) solve([(1)^50+2*a*(1)^25+b=3, (-1)^50+2*a*(-1)^25+b=7],[a,b]);
```

```
(%o1) [[a=-1,b=4]]
```

(2) 試求多項式  $x^{50}+2ax^{25}+b$  除以  $(x-1)(x+1)$  之餘式

```
(%i2) remainder (x^50+2*(-1)*x^25+4, (x-1)*(x+1));
```

```
(%o2) 5-2x
```

※ 「solve( [ 變數算式 ], [ 變數 ] )」指令表示求解。

※ 「remainder ( 被除數,除數 )」指令表示求餘數。

6. 設多項式  $x^4+ax^3+bx^2+3x-3$  有因式  $x^2-1$ ，試求整數  $a$ 、 $b$  之值

```
(%i1) solve([(1)^4+a*(1)^3+b*(1)^2+3*(1)-3=0,(-1)^4+a*(-1)^3+b*(-1)^2+3*(-1)-3=0],[a,b]);
```

```
(%o1) [[a=-3,b=2]]
```



※ 「solve([ 變數算式 ], [ 變數 ])」指令表示求解。

7. 已知  $\deg f(x) = 4$  且  $f(1) = f(2) = f(3) = 0$ ,  $f(4) = 30$ ,  $f(5) = 144$ , 試求多項式  $f(x)$

```
(%i1) solve([(4-1)*(4-2)*(4-3)*(4*a+b)=30, (5-1)*(5-2)*(5-3)*(5*a+b)=144],[a,b]);
```

```
(%o1) [[a=1,b=1]]
```

```
(%i2) expand ((x-1)*(x-2)*(x-3)*(x*1+1));
```

```
(%o2) x^4-5x^3+5x^2+5x-6
```

```
*f(x) = x^4-5x^3+5x^2+5x-6
```

※ 「solve([ 變數算式 ], [ 變數 ])」指令表示求解。

※ 「expand([ 算式 ] × [ 算式 ])」指令表示展開算式。

### P.168

8. 下列多項式何者有因式  $x-1$ ? 何者有因式  $x+1$ ?

(1)  $x^4 - 3x^3 + 3x - 1$

方法一 :  $(x-1)$

```
(%i1) (1)^4 -3*(1)^3 +3*(1)-1;
```

```
(%o1) 0
```

方法二 :  $(x-1)$

```
(%i2) remainder (x^4 -3*x^3 +3*x-1,(x-1));
```

```
(%o2) 0
```

方法一 :  $(x+1)$

```
(%i1) (-1)^4 -3*(-1)^3 +3*(-1)-1;
```

```
(%o1) 0
```

方法二：(x+1)

(%i2) remainder (x<sup>4</sup> -3\*x<sup>3</sup> +3\*x-1,( x+1));

(%o2) 0

\*本題有(x+1)、(x-1)之因式

(2)  $2x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x - 2$

方法一：(x-1)

(%i1) 2\*(1)<sup>4</sup>+ (1)<sup>3</sup> -2\*(1)<sup>2</sup>-3\*(1)-2;

(%o1) -4

方法二：(x-1)

(%i2) remainder (2\*x<sup>4</sup> +x<sup>3</sup> -2\*x<sup>2</sup>-3\*x-2,( x-1));

(%o2) -4

方法一：(x+1)

(%i1) 2\*(-1)<sup>4</sup>+ (-1)<sup>3</sup> -2\*(-1)<sup>2</sup>-3\*(-1)-2;

(%o1) 0

方法二：(x+1)

(%i2) remainder (2\*x<sup>4</sup> +x<sup>3</sup> -2\*x<sup>2</sup>-3\*x-2,( x+1));

(%o2) 0

\*本題有(x+1)之因式

(3)  $x^4 - 2x^3 - 3x^2 - x + 5$

方法一：(x-1)

(%i1) (1)<sup>4</sup>-2\*(1)<sup>3</sup> -3\*(1)<sup>2</sup>- (1)+5;

(%o1) 0

方法二：(x-1)

(%i2) remainder (x^4 -2\*x^3 -3\*x^2-x+5,( x-1));

(%o2) 0

方法一：(x+1)

(%i1) (-1)^4-2\* (-1)^3 -3\*(-1)^2- (-1)+5;

(%o1) 6

方法二：(x+1)

(%i2) remainder (x^4 -2\*x^3 -3\*x^2-x+5,( x+1));

(%o2) 0

\*本題有 (x-1)之因式(4)  $2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 3x - 9$ 方法一：(x-1)

(%i1) 2\*(1)^4+2\*(1)^3 +2\*(1)^2+3\*(1)-9;

(%o1) 0

方法二：(x-1)

(%i2) remainder (2\*x^4+2\*x^3 +2\*x^2+3\*x-9,( x-1));

(%o2) 0

方法一：(x+1)

(%i1) 2\*(-1)^4+2\*(-1)^3 +2\*(-1)^2+3\*(-1)-9;

(%o1) -10

方法二：(x+1)

(%i2) remainder (2\*x^4+2\*x^3 +2\*x^2+3\*x-9,( x+1));

(%o2) -10

\*本題有(x-1)之因式

(5)  $x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 2x + 4$

方法一：(x-1)

(%i1) (1)^4+2\* (1)^3 -5\*(1)^2-2\*(1)+4;

(%o1) 0

方法二：(x-1)

(%i2) remainder (x^4+2\*x^3 -5\*x^2-2\*x+4,( x-1));

(%o2) 0

方法一：(x+1)

(%i1) (-1)^4+2\* (-1)^3 -5\*(-1)^2-2\*(-1)+4;

(%o1) 0

方法二：(x+1)

(%i2) remainder (x^4+2\*x^3 -5\*x^2-2\*x+4,( x+1));

(%o2) 0

\*本題有(x+1)、(x-1)之因式

(6)  $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

方法一：(x-1)

(%i1) (1)^4+ (1)^3 +(1)^2+(1)+1;

(%o1)5

方法二：(x-1)

(%i2) remainder (x^4+ x^3 +x^2+x+1,( x-1));

(%o2) 5

方法一：(x+1)

(%i1) (-1)^4+ (-1)^3 +(-1)^2+(-1)+1;

(%o1)1

方法二：(x+1)

(%i2) remainder (x^4+ x^3 +x^2+x+1,( x+1));

(%o2) 1

\*本題無(x+1)與(x-1)之因式

※「remainder (被除數,除數)」指令表示求餘數。

9.若整係數多項式  $f(x) = x^3 + kx^2 - 2kx + 3$  有整係數一次因式，試求整數  $k$  的值※本題不建議使用 Maxima 解題※

10.將下列各式分解成整係數因式的乘積：

(1)  $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$

(%i1) factor(x^4+x^3-7\*x^2-x+6);

(%o1) (x-2)\*(x-1)\*(x+1)\*(x+3)

(2)  $2x^4 + 7x^3 + 4x^2 + 2x - 3$

(%i1) factor(2\*x^4+7\*x^3+4\*x^2+2\*x-3);

(%o1) (x+3)\*(2\*x-1)\*(x^2+x+1)

※ 「factor( 數值 )」指令表示求因式分解。

## 3-3 最高公因式與最低公倍式

## P.169

**例題 1**：設  $f(x) = x^2 - 4$ ， $g(x) = x^2 + 5x + 6$ ， $h(x) = x^2 - 9$ ，分別求  $f(x)$  與  $g(x)$ ， $g(x)$  與  $h(x)$ ， $f(x)$  與  $h(x)$  的最高公因式

(%i1)  $f(x) := x^2 - 4;$

(%o1)  $f(x) := x^2 - 4$

(%i2)  $g(x) := x^2 + 5*x + 6;$

(%o2)  $g(x) := x^2 + 5x + 6$

(%i3)  $h(x) := x^2 - 9;$

(%o3)  $h(x) := x^2 - 9$

(%i4)  $\text{gcd}(f(x), g(x));$

(%o4)  $x + 2$

(%i5)  $\text{gcd}(f(x), h(x));$

(%o5)  $1$

(%i6)  $\text{gcd}(g(x), h(x));$

(%o6)  $x + 3$

\* $f(x)$ ,  $g(x)$  最大公因式為  $x + 2$ ， $g(x)$ ,  $h(x)$  最大公因式為  $x + 3$ ， $f(x)$ ,  $h(x)$  最大公因式為  $1$  (表示互質)

※  $f(x) := ax + b$ ; 定義函數：須以“:=”定義；定義後只需輸入  $f(x)$  之  $x$  數值即可求得

結果。

※ 「 $\text{gcd}(\text{數值}, \text{數值})$ 」指令表示求最大公因數。

**隨堂練習**：求下列各小題中  $f(x)$  與  $g(x)$  的最高公因式

(1)  $f(x) = x(x+1)^2(x+2)^3(2x^2-3x+4)$ ， $g(x) = x^2(x-1)^3(x+1)(2x^2-3x+4)$

```
(%i1) f(x):= x*(x+1)^2*(x+2)^3*(2*x^2-3*x+4);
```

```
(%o1) f(x):= x(x+1)^2(x+2)^3(2x^2-3x+4)
```

```
(%i2) g(x):= x^2*(x-1)^3*(x+1)*(2*x^2-3*x+4);
```

```
(%o2) g(x):= x^2(x+1)^3(x+2)(2x^2-3x+4)
```

```
(%i3) factor(gcd(f(x), g(x)));
```

```
(%o3) x(x+1)(2*x^2-3*x+4)
```

(2)  $f(x) = x^2 - 3x + 2$  ,  $g(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

```
(%i1) f(x):= x^2-3*x+2;
```

```
(%o1) f(x):= x^2-3x+2
```

```
(%i2) g(x):= x^3-6*x^2+11*x-6;
```

```
(%o2) g(x):= x^3-6x^2+11x-6
```

```
(%i3) factor(gcd(f(x), g(x)));
```

```
(%o3) (x-2)(x-1)
```

※  $f(x):=ax+b$ ; 定義函數：須以”:=”定義； 定義後只需輸入  $f(x)$  之  $x$  數值即可求得

結果。

※ 「factor( 數值 )」指令表示求因式分解。

## P.170

例題 2：設  $k$  為常數，若  $x^2+kx+6$  與  $x^3+kx+6$  的最高公因式為一次式，求  $k$  值

※本題不建議使用 Maxima 解題※

隨堂練習：設  $k$  為常數，若  $x^2+(k+1)x+1$  與  $x^2+(k-1)x-3$  有一次公因式，求  $k$  值

※本題不建議使用 Maxima 解題※



**P.172**

**例題 3**：若  $f(x) = x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 10x + 15$ ，與  $g(x) = x^3 + x^2 - 3x + 9$ ，求  $f(x)$  與  $g(x)$  最高公因式

```
(%i1) f(x):= x^4-2*x^3+8*x^2-10*x+15;
```

```
(%o1) f(x):= x^4-2x^3+8x^2 -10x +15
```

```
(%i2) g(x):= x^3+x^2 -3*x+9;
```

```
(%o2) g(x):= x^3 +x^2-3x+9
```

```
(%i3) factor(gcd(f(x), g(x)));
```

```
(%o3) x^2-2x+3
```

※  $f(x):=ax+b$ ；定義函數：須以”:=”定義；定義後只需輸入  $f(x)$  之  $x$  數值即可求得

結果。

※ 「factor( 數值 )」指令表示求因式分解。

**P.173**

**隨堂練習**：若  $f(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 15$ ，與  $g(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 3$ ，求  $f(x)$  與  $g(x)$  最高公因式

```
(%i1) f(x):= x^3+3*x^2+5*x+15;
```

```
(%o1) f(x):= x^3+3x^2 +5x +15
```

```
(%i2) g(x):= x^3+4*x^2+4*x+3;
```

```
(%o2) g(x):= x^3+4x^2+4x+3
```

```
(%i3) factor(gcd(f(x), g(x)));
```

```
(%o3) x+3
```

※  $f(x):=ax+b$ ；定義函數：須以”:=”定義；定義後只需輸入  $f(x)$  之  $x$  數值即可求得

結果。

※ 「factor( 數值 )」指令表示求因式分解。

**例題 4：**求  $f(x)$  與  $g(x)$  最低公倍式

$$(1) f(x) = 3x^2 - 6x + 8, \quad g(x) = 4x^2 - 2x + 12$$

$$(\%i1) f(x) := 3*x^2 - 6*x + 8;$$

$$(\%o1) f(x) := 3x^2 - 6x + 8$$

$$(\%i2) g(x) := 4*x^2 - 2*x + 12;$$

$$(\%o2) g(x) := 4x^2 - 2x + 12$$

$$(\%i3) \text{lcm}(f(x), g(x));$$

$$(\%o3) 2(2x^2 - x + 6)(3x^3 - 6x + 8)$$

$$(2) f(x) = x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x + 2, \quad g(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x - 3$$

$$(\%i1) f(x) := x^4 + x^3 + 3*x^2 + 2*x + 2;$$

$$(\%o1) f(x) := x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x + 2$$

$$(\%i2) g(x) := x^4 + 2*x^3 - x^2 - 2*x - 3;$$

$$(\%o2) g(x) := x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x - 3$$

$$(\%i3) \text{lcm}(f(x), g(x));$$

$$(\%o3) (x^2 + 2)(x^2 + x - 3)(x^2 + x + 1)$$

※  $f(x) := ax + b$ ; 定義函數：須以 “:=” 定義； 定義後只需輸入  $f(x)$  之  $x$  數值即可求得

結果。

※ 「lcm( 數值, 數值 )」指令表示求最小公倍數。

**P.174**

**隨堂練習：**求  $f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 8x - 12$  與  $g(x) = x^3 + x^2 - 3x + 9$  最低公倍式

(%i1)  $f(x) := x^4 - 2x^3 - x^2 + 8x - 12;$

(%o1)  $f(x) := x^4 - 2x^3 - x^2 + 8x - 12$

(%i2)  $g(x) := x^3 + x^2 - 3x + 9;$

(%o2)  $g(x) := x^3 + x^2 - 3x + 9$

(%i3)  $\text{lcm}(f(x), g(x));$

(%o3)  $(x-2)(x+2)(x+3)(x^2-2x+3)$

※  $f(x) := ax + b$ ; 定義函數：須以“:=”定義；定義後只需輸入  $f(x)$  之  $x$  數值即可求得

結果。

※ 「 $\text{lcm}(\text{數值}, \text{數值})$ 」指令表示求最小公倍數。

**例題 5：**設  $a, b$  為實數，若  $x+2$  為  $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + a$  與  $g(x) = x^3 + 2x^2 + bx + 2$  的公因式，求  $f(x)$  與  $g(x)$  的最低公倍式

(%i1)  $\text{solve}([(x^3 - 2x^2 - 5x + a) = 0, (x^3 + 2x^2 + bx + 2) = 0], [a, b]);$

(%o1)  $[[a=6, b=1]]$

(%i2)  $f(x) := x^3 - 2x^2 - 5x + 6;$

(%o2)  $f(x) := x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

(%i3)  $g(x) := x^3 + 2x^2 + x + 2;$

(%o3)  $g(x) := x^3 + 2x^2 + x + 2$

(%i4)  $\text{lcm}(f(x), g(x));$

(%o4)  $(x-3)(x-1)(x+2)(x^2+1)$

※  $f(x) := ax + b$ ; 定義函數：須以“:=”定義；定義後只需輸入  $f(x)$  之  $x$  數值即可求得

結果。

※ 「solve([ 變數算式 ],[ 變數 ])」指令表示求解。

※ 「lcm( 數值,數值 )」指令表示求最小公倍數。

### P.175

隨堂練習：若  $f(x) = x^3 - 7x + 6$  與  $g(x) = x^3 - k^2x^2 + (12k - 35)x + 30$  的最高公因式為  $x - 2$ ，求實數  $k$  之值及  $f(x)$  與  $g(x)$  的最低公倍式

```
(%i1) solve([(2)^3-7*(2)+6=0, (2)^3-k^2*(2)^2+(12*k-35)*(2)+30=0],[k]);
```

```
(%o1) [[k=4],[k=2]]
```

```
(%i2) f(x):= x^3-7*x+6;
```

```
(%o2) f(x):= x^3-7x+6
```

```
(%i3) g1(x):= x^3- 16*x^2 +13*x+30;
```

```
(%o3) g1(x):= x^3 - 16x^2 +13x+30
```

```
(%i4) g2(x):= x^3- 4*x^2 -11*x+30;
```

```
(%o4) g2(x):= x^3- 4x^2 +(-11)x+30
```

```
(%i5) lcm(f(x), g1(x));
```

```
(%o5) (x-15)(x-2)(x-1)(x+1)(x+3)
```

```
(%i6) lcm(f(x), g2(x));
```

```
(%o6) (x-5)(x-2)(x-1)(x+3)
```

\* $k$  可為 2、4，故設  $g1(x) = x^3 - 16x^2 + 13x + 30$ ； $g2(x) = x^3 - 4x^2 - 11x + 30$ ，求得  $[f(x), g1(x)] =$

$(x-15)(x-2)(x-1)(x+1)(x+3)$ ； $[f(x), g2(x)] = (x-5)(x-2)(x-1)(x+3)$

※  $f(x) := ax + b$ ；定義函數：須以“:=”定義；定義後只需輸入  $f(x)$  之  $x$  數值即可求得

結果。

※ 「solve([ 變數算式 ],[ 變數 ])」指令表示求解。

※ 「lcm( 數值,數值 )」指令表示求最小公倍數。

**P.176** **習題 3-3**

1. 觀念題：對的在題號前打○，錯的在題號前打×

設  $d(x)$ ， $m(x)$  分別為非零多項式  $f(x)$  與  $g(x)$  的最高公因式與最低公倍式

\_\_\_ (1)  $\deg(f(x)+g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x)$

\_\_\_ (2)  $d(x) \mid m(x)$

\_\_\_ (3) 存在常數  $k$ ，使得  $d(x) \cdot m(x) = k \cdot f(x) \cdot g(x)$

\_\_\_ (4)  $\deg d(x) + \deg m(x) = \deg f(x) + \deg g(x)$

**※本題不建議使用 Maxima 解題※**

2. 試求下列各小題中  $f(x)$  與  $g(x)$  的最高公因式與最低公倍式

(1)  $f(x) = (x+1)(x+2)$ ， $g(x) = (x+2)(x+3)$

(%i1)  $f(x) := (x+1)*(x+2);$

(%o1)  $f(x) := x^4 - 2x^3 - x^2 + 8x - 12$

(%i2)  $g(x) := (x+2)*(x+3);$

(%o2)  $g(x) := (x+2)(x+3)$

(%i3)  $\gcd(f(x), g(x));$

(%o3)  $x+2$

(%i4)  $\text{lcm}(f(x), g(x));$

(%o4)  $(x+1)(x+2)(x+3)$

\* $f(x)$  與  $g(x)$  的最高公因式為  $x+2$ ； $f(x)$  與  $g(x)$  的最低公倍式為  $(x+1)(x+2)(x+3)$

(2)  $f(x) = (x-2)^2(x+3)(3x-5)$ ， $g(x) = (x+1)(x-2)(x+3)^3$

(%i1)  $f(x) := (x-2)^2*(x+3)*(3*x-5);$

(%o1)  $f(x) := (x-2)^2(x+3)(3x-5)$

$$(\%i2) \ g(x) := (x+1)*(x-2)*(x+3)^3;$$

$$(\%o2) \ g(x) := (x+1)(x-2)(x+3)^3$$

$$(\%i3) \ \text{factor}(\text{gcd}(f(x), g(x)));$$

$$(\%o3) \ (x-2)(x+3)$$

$$(\%i4) \ \text{lcm}(f(x), g(x));$$

$$(\%o4) \ (x-2)^2(x+1)(x+3)^3(3x-5)$$

\*f(x)與g(x)的最高公因式為 $(x-2)(x+3)$ ；

f(x)與g(x)的最低公倍式為 $(x-2)^2(x+1)(x+3)^3(3x-5)$

$$(3) \ f(x) = x^2 + x + 1, \ g(x) = x^2 - x + 1$$

$$(\%i1) \ f(x) := x^2 + x + 1;$$

$$(\%o1) \ f(x) := x^2 + x + 1$$

$$(\%i2) \ g(x) := x^2 - x + 1;$$

$$(\%o2) \ g(x) := x^2 - x + 1$$

$$(\%i3) \ \text{gcd}(f(x), g(x));$$

$$(\%o3) \ 1$$

$$(\%i4) \ \text{lcm}(f(x), g(x));$$

$$(\%o4) \ (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$$

\*f(x)與g(x)的最高公因式為1(互質)；f(x)與g(x)的最低公倍式為 $(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$

$$(4) \ f(x) = x^3 - 1, \ g(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$$

$$(\%i1) \ f(x) := x^3 - 1;$$

$$(\%o1) \ f(x) := x^3 - 1$$

$$(\%i2) \ g(x) := x^3 - 2x^2 + 2x - 1;$$

$$(\%o2) \ g(x) := x^3 - 2x^2 + 2x - 1$$

$$(\%i3) \ \text{gcd}(f(x), g(x));$$

$$(\%o3) \ x - 1$$

$$(\%i4) \ \text{lcm}(f(x), g(x));$$

$$(\%o4) \ (x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$$

\*f(x)與g(x)的最高公因式為x-1；f(x)與g(x)的最低公倍式為(x-1)(x<sup>2</sup>-x+1)(x<sup>2</sup>+x+1)

$$(5) \ f(x) = x^3 + x - 2, \ g(x) = x^3 - x^2 - 4$$

$$(\%i1) \ f(x) := x^3 + x - 2;$$

$$(\%o1) \ f(x) := x^3 + x - 2$$

$$(\%i2) \ g(x) := x^3 - x^2 - 4;$$

$$(\%o2) \ g(x) := x^3 - x^2 - 4$$

$$(\%i3) \ \text{gcd}(f(x), g(x));$$

$$(\%o3) \ x^2 + x + 2$$

$$(\%i4) \ \text{lcm}(f(x), g(x));$$

$$(\%o4) \ (x-2)(x-1)(x^2+x+2)$$

\*f(x)與g(x)的最高公因式為x<sup>2</sup>+x+2；f(x)與g(x)的最低公倍式為(x-2)(x-1)(x<sup>2</sup>+x+2)

※  $f(x) := ax + b$ ；定義函數：須以“:=”定義；定義後只需輸入f(x)之x數值即可求得

結果。

※ 「factor( 數值 )」指令表示求因式分解。

※ 「gcd( 數值,數值 )」指令表示求最大公因數。

※ 「lcm( 數值,數值 )」指令表示求最小公倍數。

3. 設  $a$  為整數，且  $f(x) = x^2 - x - 2$  與  $g(x) = x^3 + ax^2 - 3$  不互質

(1) 試求  $a$  之值

(%i1)  $f(x) := x^2 - x - 2$

(%o1)  $f(x) := x^2 - x - 2$

(%i2)  $g(x) := x^3 + a * x^2 - 3$ ;

(%o2)  $g(x) := x^3 + ax^2 - 3$

(%i3)  $\text{factor}(x^2 - x - 2)$ ;

(%o3)  $(x - 2)(x + 1)$

(%i4)  $\text{solve}([g(2) = 0], [a])$ ;

(%o4)  $[a = -\frac{5}{4}]$

(%i5)  $\text{solve}([g(-1) = 0], [a])$ ;

(%o5)  $[a = 4]$

(%i6)  $g(x) := x^3 + 4 * x^2 - 3$ ;

(%o6)  $g(x) := x^3 + 4x^2 - 3$ ;

\*  $f(x)$  與  $g(x)$  的有共同因式，將  $x = 2$  與  $x = -1$  帶入  $g(x)$ ，可得  $a = -\frac{5}{4}$ 、 $4$  (題目中提及

$a$  為整數)，故  $a = 4$

(2) 試求  $f(x)$  與  $g(x)$  的最高公因式與最低公倍式

(%i7)  $\text{gcd}(f(x), g(x))$ ;

(%o7)  $x + 1$

(%i8)  $\text{lcm}(f(x), g(x))$ ;

(%o8)  $(x - 2)(x + 1)(x^2 + 3x - 3)$

※  $f(x) := ax + b$ ; 定義函數：須以“:=”定義；定義後只需輸入  $f(x)$  之  $x$  數值即可求得



**結果。**

※ 「factor( 數值 )」指令表示求因式分解。

※ 「solve([ 變數算式 ], [ 變數 ])」指令表示求解。

※ 「gcd( 數值,數值 )」指令表示求最大公因數。

※ 「lcm( 數值,數值 )」指令表示求最小公倍數。

4. 設  $f(x) = x^3 + kx^2 + 6x + 5$  與  $g(x) = x^2 + kx + 5$  的最高公因式為一次式，

(1) 試求實數  $k$  之值

(%i1) expand((x+1)\*(x+5));

(%o1)  $x^2 + 6x + 5$

(%i2) expand((x-1)\*(x-5));

(%o2)  $x^2 - 6x + 5$

(%i3) factor( $x^3 + 6*x^2 + 6*x + 5$ );

(%o3)  $(x+5)(x^2 + x + 1)$

(%i4) factor( $x^3 - 6*x^2 + 6*x + 5$ );

(%o4)  $x^3 - 6x^2 + 6x + 5$

\* 本題最高公因式為一次式，由  $g(x)$  可知常數項為 5 表示， $g(x) = (x+1)(x+5)$  或

$(x-1)(x-5)$ ，帶入後可知  $k$  為 6

(2) 試求  $f(x)$  與  $g(x)$  的最高公因式與最低公倍式

(%i5)  $f(x) := x^3 + 6*x^2 + 6*x + 5$

(%o5)  $f(x) := x^3 + 6x^2 + 6x + 5$

(%i6)  $g(x) := x^2 + 6*x + 5$

(%o6)  $g(x) := x^2 + 6x + 5$

```
(%i7) gcd(f(x), g(x));
```

```
(%o7) x+5
```

```
(%i8) lcm(f(x), g(x));
```

```
(%o8) (x+1)(x+5)(x^2+x+1)
```

※  $f(x):=ax+b$ ; 定義函數：須以“:=”定義； 定義後只需輸入  $f(x)$  之  $x$  數值即可求得

結果。

※ 「`solve([ 變數算式 ], [ 變數 ])`」指令表示求解。

※ 「`factor( 數值 )`」指令表示求因式分解。

※ 「`expand([ 算式 ] × [ 算式 ])`」指令表示展開算式。

※ 「`gcd( 數值, 數值 )`」指令表示求最大公因數。

※ 「`lcm( 數值, 數值 )`」指令表示求最小公倍數。

5. 設有兩個領導係數皆為1的二次多項式，最高公因式為  $x+1$ ，最低公倍式  $x^3-3x^2-x+3$ ，求此兩多項式

```
(%i1) factor(x^3-3*x^2-x+3);
```

```
(%o1) (x-3)(x-1)(x+1)
```

```
(%i2) expand((x-3)*(x+1));
```

```
(%o2) x^2-2x-3
```

```
(%i3) expand((x-1)*(x+1));
```

```
(%o3) x^2-1
```

※ 「`factor( 數值 )`」指令表示求因式分解。

※ 「`expand([ 算式 ] × [ 算式 ])`」指令表示展開算式。

## 3-4 多項函數

## P.178

**例題 1：**平年間，若  $x$  表月份， $y$  表  $x$  月的天數，試問  $y$  是否  $x$  的函數？ $x$  是否  $y$  的函數？

**※本題不建議使用 Maxima 解題※**

**例題 2：**根據音速的實驗，我們知道音速的溫度的函數，若攝氏溫度  $x$  度時的音速為每秒  $y$  公尺，則其關係式為  $y = f(x) = 0.63x + 330.55$ ，試問當氣溫是攝氏 15 度時，音速為何？

```
(%i1) f(x):=0.63*x+330.55;
```

```
(%o1) f(x):=0.63x+330.55
```

```
(%i2) f(15);
```

```
(%o2) 340.0
```

**※  $f(x):=ax+b$ ; 定義函數：須以“:=”定義； 定義後只需輸入  $f(x)$  之  $x$  數值即可求得**

**結果。**

## P.179

**隨堂練習：**自由落體，若不計空氣阻力，則物體落下的距離( $s$  公尺)只與物體落下的時間( $t$  秒)有關，事實上此關係式為  $s = \frac{1}{2}gt^2$ ，其中  $g$  為重力加速度(9.8 公尺/秒<sup>2</sup>)，試

問：

(1)物體落下的距離  $s$  是否是落下時間  $t$  的函數？

**※本小題不建議使用 Maxima 解題※**

(2)若小明站在離地高 382 公尺的上方處(約位於 101 大樓的 89 層室內景觀台上)，讓



一球自由落下，問幾秒後落地？已知  $\sqrt{3820} \approx 61.81$

```
(%i1) float(solve([1/2*9.8*t^2=382],[t]));
```

```
rat: replaced 4.9 by 49/10 = 4.9
```

```
(%o1) [t=-8.829449794492824,t=8.829449794492824]
```

\*該球約 8.83 秒後落地

※「float( 數值 )」指令表示將結果轉換為小數。

### P.180

**例題 3：**某賣場舉辦年終特價活動，已知賣場老闆是以線性函數關係調整賣場內所有 50(含)以上產品的價格，若查得原價 125 的牛奶，其新售價為 95 元；且原價 300 的咖啡，其新售價為 200 元，試問：

(1)此賣場調整價格所依據的線性函數為何？

```
(%i1) solve([125*a+b=95,300*a+b=200],[a,b])
```

```
(%o1) [[a=3/5,b=20]]
```

\*線性函數： $y = ax + b$ ， $x$  代表原價， $y$  代表調整後價格，其線性函數為  $y = \frac{3}{5}x + 20$

(2)原價 180 元的飲料，調整後的新售價為何？

```
(%i2) 180*3/5+20;
```

```
(%o2) 128
```

※「solve([ 變數算式 ],[ 變數 ])」指令表示求解。

**隨堂練習：**某公司員工的年終獎金，是依底薪的線性函數為發放標準，已知底薪 3 萬元的員工，其年終獎金為 5 萬元；底薪 8 萬元的經理，其年終獎金為 15 萬元，試問底薪 5 萬元的課長，其年終獎金為何？

```
(%i1) solve([30000*a+b=50000,80000*a+b=150000],[a,b])
```

```
(%o1) [[a=2,b=-10000]]
```

```
(%i2) 50000*2-10000;
```

```
(%o2) 90000
```

※ 「solve([ 變數算式 ],[ 變數 ])」指令表示求解。

#### 例題 4：

- (1) 試畫出函數  $y = |x|$  的圖形，並求此函數的最小值
- (2) 試畫出函數  $y = |x| + 2$  的圖形，並觀察與函數  $y = |x|$  圖形的關係

#### P.181

**隨堂練習：**試畫出函數  $y = |x - 2|$  的圖形，並觀察與函數  $y = |x|$  圖形的關係

#### P.182

**例題 5：**試描繪二次函數  $f(x) = x^2$  的圖形

**隨堂練習：**試描繪二次函數  $f(x) = -x^2$  的圖形

**例題 6：**下列有六個二次函數：

(a)  $y = x^2$       (b)  $y = 3x^2$       (c)  $y = \frac{1}{3}x^2$       (d)  $y = -x^2$       (e)  $y = -3x^2$       (f)  $y = -\frac{1}{3}x^2$

- (1) 試將(a) (c) (e)函數描繪在同一座標平面上
- (2) 試將(b) (d) (f)函數描繪在同一座標平面上

**P.184**

**隨堂練習：**試寫出座標平面上點 $(a, b)$ 對於 $x$ 軸與 $y$ 軸的對稱點

**例題 7：**試在同一坐標平面上，描繪二次函數 $y = 2x^2$ 與 $y = 2(x-3)^2$ 的圖形，並說明兩圖形的關係

**隨堂練習：**試在同一坐標平面上，描繪二次函數 $y = x^2$ 與 $y = 2(x+3)^2$ 的圖形，並說明兩圖形的關係

**P.185**

**例題 8：**試在同一座標平面上，描繪二次函數 $y = 2x^2$ 與 $y = 2x^2-5$ 的圖形，並說明兩圖形的關係

**P.186**

**隨堂練習：**試在同一坐標平面上，描繪二次函數 $y = x^2$ 與 $y = x^2+4$ 的圖形，並說明兩圖形的關係

**例題 9：**試在同一座標平面上，描繪二次函數 $y = 2x^2$ 與 $y = 2(x+3)^2-5$ 的圖形，並說明兩圖形的關係

**P.187**

**隨堂練習：**在同一坐標平面上，描繪二次函數的圖形，並說明兩圖形的關係

(1)  $y = x^2$  與  $y = (x+3)^2+4$

(2)  $y = x^2$  與  $y = (x+3)^2-4$

$$(3) y = (x+3)^2+4 \text{ 與 } y = (x+3)^2-4$$

### P.188

**例題 10：**試描繪  $y = 3x^2+3x-1$  的圖形，並求此圖形的頂點座標，對稱軸方程式，與函數值的最小值及發生最小值時的  $x$  值

### P.189

**隨堂練習：**試描繪  $y = -3x^2+3x+1$  的圖形，並求此圖形的頂點座標，對稱軸方程式，與函數值的最大值及發生最大值時的  $x$  值

**例題 11：**二次函數  $y = -2x^2-4x+3$ ，試分別就下列變數  $x$  的範圍，討論函數的最大值與最小值

$$(1) -2 \leq x \leq 1 \quad (2) 0 \leq x \leq 2$$

### P.190

**隨堂練習：**二次函數  $y = 2x^2-4x+3$ ，試分別就下列變數  $x$  的範圍，討論函數的最大值與最小值

$$(1) -1 \leq x \leq 3 \quad (2) 2 \leq x \leq 4$$

**例題 12：**某超商售即食便當，每個定價 50 元，每天可賣出 80 個，今欲舉辦周寧慶促銷活動，根據以往經驗，便當每降價 1 元，每天可多售出 20 個，若便當每個成本 30 元，試問此超商應將促銷價訂為多少元，才會有最大利潤？又此最大利潤為何？

**隨堂練習：**設二整數的和為 25，求此兩整數之積的最大值

### P.191

**例題 13：**設  $y = f(x)$  為二次函數

- (1) 若其圖形通過  $(0, 1)$ 、 $(1, 0)$ 、 $(-1, 6)$  三點，試求  $f(x)$
- (2) 若其圖形通過原點，且頂點為  $(1, 3)$ ，試求  $f(x)$

**隨堂練習：**設  $y = f(x)$  為二次函數，若其圖形以  $x+2=0$  為對稱軸，且通過  $(-3, -2)$ 、 $(1, 6)$  兩點，試求  $f(x)$

### P.192

**例題 14：**

- (1) 試描繪三次函數  $y = x^3$
- (2) 承(1)，利用圖形的平移，求作  $y = (x-2)^2 - 1$  的圖形

### P.193

**隨堂練習：**

- (1) 試描繪三次函數  $y = -x^3$
- (2) 承(1)，利用圖形的平移，求作  $y = -(x-4)^2 + 3$  的圖形



**P.196** **習題 3-4**

1. 觀念題：對的在題號前打○，錯的在題號前打×

\_\_\_ (1)  $y = x^2$  的圖形對稱於  $x$  軸

\_\_\_ (2)  $y = (x+1)^2+2$  的圖形可由  $y = x^2$  的圖形向右平移 1 單位，在向上平移 2 單位而得

\_\_\_ (3)  $y = (2x+1)^2-3$  圖形的對稱軸為  $2x+1 = 0$

\_\_\_ (4) 設  $a \neq 0, b, c, d, e$  為任意實數，則二次函數  $y = ax^2+bx+c$  的圖形與  $y = ax^2+dx+e$  的圖形，可藉由水平與鉛直方向的平移而完全疊合

2. 虎克定律：「彈簧上掛上重物時，在彈性限度內，彈簧伸長的長度與所掛物體的重量成比例」，現有一彈簧以 20 公克的重物掛於其下時，彈簧的長度為 28 公分；改以 50 公克的重物掛於其下時，彈簧的長度為 40 公分，則：

(1) 若所掛重物重量為  $x$  公克時，其彈簧的長度為  $y$  公分，請寫出  $x$  與  $y$  的關係式( $y$  以  $x$  表示)

(2) 若彈簧掛上另一重物後，其長度為 36 公分，試問此重物重多少克？

3.

(1) 試畫出函數  $y = -|x|$  的圖形，並求此函數的最大值

(2) 試畫出函數  $y = -|x-1|$  的圖形，此圖形是否可由(1)的圖形平移而得？

4. 試描繪下列二次函數的圖形，併指出開口方向，頂點與對稱軸

(1)  $y = 2x^2-1$

(2)  $y = -2x^2+4x$

(3)  $y = -2x^2+4x+3$

5. 二次函數  $y = -2x^2 + 4x - 5$ ，試分別就下列變數  $x$  的範圍，討論函數的最大值與最小值

(1)  $x$  為實數

(2)  $-1 \leq x \leq 2$

(3)  $2 \leq x \leq 4$

6. 試問沿著座標軸方向平移，如何才能將二次函數  $y = -2x^2 + 4x - 1$  的圖形移到  $y = -2x^2 - 12x - 14$  的圖形上

### P.197

7. 設  $y = f(x)$  為二次函數

(1) 若其圖形通過  $(0, -3)$ 、 $(-1, 0)$ 、 $(1, -8)$  三點，試求  $f(x)$

(2) 若其圖形通過  $(0, 11)$ ，且頂點為  $(2, 3)$ ，試求  $f(x)$

(3) 若其圖形以  $x = -1$  為對稱軸，且通過  $(0, -1)$ 、 $(1, 2)$  二點，試求  $f(x)$

8. ABCD 為邊長 6 單位的正方形，今想將其裁剪為小正方形，裁剪的方式為在四邊上各取一點 P、Q、R、S 使得  $\overline{AP} = \overline{BQ} = \overline{CR} = \overline{DS}$ ，試問如何裁剪，才能使正方形 PQRS 有最小面積，又此最小的面積為何？

9. 直角三角形 ABC 中， $\overline{AB} = 4$ 、 $\overline{AC} = 3$ 、 $\overline{BC} = 5$ ，若其內接矩形 PQRS 有最大面積時， $\overline{AP} = x$ ，試求  $x$  的值及內接矩形 PQRS 的最大面積

## 3-5 多項方程式

## P.198

**例題 1：**試證-1 是方程式  $f(x) = x^3 - 2x - 1 = 0$  的根，並求其他的根

```
(%i1) (-1)^3-2*(-1)-1;
```

```
(%o1) 0
```

```
(%i2) factor (x^3-2*x -1);
```

```
(%o2) (x+1)(x^2-x-1)
```

```
(%i3) solve([x^2-x-1=0],[x])
```

```
(%o3) [x=- $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ,x= $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ]
```

※ 「factor( 數值 )」指令表示求因式分解。

※ 「solve([ 變數算式 ],[ 變數 ])」指令表示求解。

## P.199

**隨堂練習：**試證-3 與 2 是方程式  $f(x) = x^4 - x^3 - 6x^2 + 14x - 12 = 0$  的根，並求其他的根

```
(%i1) f(x) := x^4- x^3 - 6*x^2+14*x -12;
```

```
(%o1) f(x):=x^4-x^3+(-6)x^2+14x-12
```

```
(%i2) f(-3);
```

```
(%o2) 0
```

```
(%i3) f(2);
```

```
(%o3) 0
```

```
(%i4) factor (x^4- x^3 - 6*x^2+14*x -12);
```

```
(%o4) (x-2)(x+3)(x^2-2x+2)
```

```
(%i5) solve([x^2-2*x+2=0],[x])
```

```
(%o5) [x=1-%i,x=%i+1]
```

$$* \%i = \sqrt{-1}$$

※  $f(x):=ax+b$ ; 定義函數：須以“:=”定義； 定義後只需輸入  $f(x)$  之  $x$  數值即可求得

結果。

※ 「factor( 數值 )」指令表示求因式分解。

※ 「solve([ 變數算式 ], [ 變數 ])」指令表示求解。

**例題 2**：設 1 為方程式  $x^3 + px^2 + 7x + q = 0$  的二重根，試求  $p$ 、 $q$  的值及另一根

```
(%i1) remainder((x^3+p*x^2+7*x+q),(x^2-2*x+1));
```

```
(%o1) (2*p+10)*x+q-p-2
```

```
(%i2) solve([2*p+10=0, q-p-2=0],[p,q]);
```

```
(%o2) [[p=-5,q=-3]]
```

```
(%i3) factor(x^3-5*x^2+7*x-3);
```

```
(%o3) (x-3) (x-1)^2
```

\*1 為重根，故方程式除以  $(x-1)(x-1)$  餘數為 0，可求得  $p=-5, q=-3$ ；另一根為 3

※ 「factor( 數值 )」指令表示求因式分解。

※ 「solve([ 變數算式 ], [ 變數 ])」指令表示求解。

※ 「remainder ( 被除數, 除數 )」指令表示求餘數。

## P.200

**隨堂練習**：設 2 為方程式  $x^3 + px^2 + qx + 4 = 0$  的二重根，試求  $p$ 、 $q$  的值及另一根

```
(%i1) remainder((x^3+p*x^2+q*x+4),(x^2-4*x+4));
```

```
(%o1) (q+4p+12)x-4p-12
```

```
(%i2) solve([q+4*p+12=0, -4p-12=0],[p,q]);
```

```
(%o2) [[p=-3,q=0]]
```

(%i3) factor(x^3-3\*x^2+ 4);

(%o3) (x-2)^2(x+1)

\*2 為重根，故方程式除以(x-2)(x-2)餘數為 0，可求得 p=-3,q=0；另一根為-1

※ 「factor( 數值 )」指令表示求因式分解。

※ 「solve([ 變數算式 ],[ 變數 ])」指令表示求解。

※ 「remainder ( 被除數,除數 )」指令表示求餘數。

**例題 3：**試求方程式  $x^4 - 5x^2 - 10x - 6 = 0$  的有理根

(%i1) factor(x^4-5\*x^2-10\*x -6);

(%o1) (x-3)(x+1)(x^2+2x+2)

(%i2) solve([x^2+2\*x+2=0],[x]);

(%o2) [x=-%i-1,x=%i-1]

\*%i =  $\sqrt{-1}$

※ 「factor( 數值 )」指令表示求因式分解。

※ 「solve([ 變數算式 ],[ 變數 ])」指令表示求解。

## P.201

**隨堂練習：**試求方程式  $2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 5x - 6 = 0$  的有理根

(%i1) factor(2\*x^4 +3\*x^3-3\*x^2-5\*x -6);

(%o1) (x+2)(2x-3)(x^2+x+1)

(%i2) solve([x^2+x+1=0],[x]);

(%o2) [x=- $\frac{\sqrt{3}\%i+1}{2}$ ,x= $\frac{\sqrt{3}\%i-1}{2}$ ]

\*%i =  $\sqrt{-1}$

\*方程式  $2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 5x - 6 = 0$  的有理根為  $x = -2$ 、 $x = -\frac{3}{2}$

※ 「factor( 數值 )」指令表示求因式分解。

※ 「solve([ 變數算式 ],[ 變數 ])」指令表示求解。

**例題 4：**試解方程式  $x^3-x+6=0$

(%i1) factor(x^3-x+6);

(%o1) (x+2)(x^2-2x+3)

(%i2) solve([x^2-2\*x+3=0],[x]);

(%o2) [x=1-√2%i,x=√2%i+1]

※ 「factor( 數值 )」指令表示求因式分解。

※ 「solve([ 變數算式 ],[ 變數 ])」指令表示求解。

**隨堂練習：**試解方程式  $x^3-3x^2+3x-28=0$

(%i1) factor(x^3-3\*x^2+3\*x-28);

(%o1) (x-4)(x^2+x+7)

(%i2) solve([x^2+x+7=0],[x]);

(%o2) [x=- $\frac{3^{3/2} \%i + 1}{2}$ ,x= $\frac{3^{3/2} \%i - 1}{2}$ ]

※ 「factor( 數值 )」指令表示求因式分解。

※ 「solve([ 變數算式 ],[ 變數 ])」指令表示求解。

## P.202

**例題 5：**設  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 2x - 1$ ，試求  $f(1+i)$  及  $f(\overline{1+i})$

(%i1) f(x) := x^3 - 6\*x^2 + 2\*x - 1;

(%o1) f(x):=x^3-6x^2+2x-1

(%i2) expand(f(1+%i));

(%o2) -8%i-1

(%i3) expand(conjugate (f(1+%i)));

(%o3) 8%i-1

\* %i =  $\sqrt{-1}$

※ 「expand ([ 算式 ] × [ 算式 ])」指令表示展開算式。

**例題 6:** 設  $f(x) = x^3 - 2x^2 + ax + b$  為一實係數多項式，且已知  $f(2-i) = -1-i$ ，試求  $f(2+i)$  之值

(%i1) f(x) := x^3 - 2\*x^2+a\*x +b;

(%o1) f(x):= x<sup>3</sup> - 2x<sup>2</sup> + ax + b

(%i2) expand(f (2-%i));

(%o2) b-%ia+2a-3%i-4

(%i3) solve([b+2\*a-4=-1,-a-3=-1],[a,b]);

(%o3) [[a=-2,b=7]]

(%i4) f(x) := x^3 - 2\*x^2-2\*x +7;

(%o4) f(x):= x<sup>3</sup> - 2x<sup>2</sup> +(-2)x + 7

(%i5) expand(f (2+%i));

(%o5) %i-1

\* %i =  $\sqrt{-1}$

※ f(x):=ax+b; 定義函數：須以”:=”定義； 定義後只需輸入 f(x)之 x 數值即可求得

結果。

※ 「expand ([ 算式 ] × [ 算式 ])」指令表示展開算式。

※ 「solve([ 變數算式 ],[ 變數 ])」指令表示求解。

**P.203**

**隨堂練習：**設為一實係數多項式，且已知  $f(3+2i) = 4-3i$ ，試求  $f(3-2i)$  之值

(%i1) conjugate(4-3\*%i);

(%o1) 3%i+4

$$* f(3+2i) = \overline{f(3-2i)} = \overline{4-3i} = 4-3i$$

$$* \%i = \sqrt{-1}$$

※ 「conjugate(數值)」指令表示列出複數之共軛複數

**P.204**

**例題 7：**已知  $3+\sqrt{2}i$  是  $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x + 33 = 0$  的一根，試求其他的根

(%i1) factor(x^4-4\*x^3+2\*x^2+4\*x+33);

(%o1) (x^2-6x+11)(x^2+2x+3)

(%i2) solve([x^2-6\*x+11=0],[x]);

(%o2) [x=3-sqrt(2)\*%i,x=sqrt(2)\*%i+3]

(%i3) solve([x^2+2\*x+3=0],[x]);

(%o3) [x=-sqrt(2)\*%i-1,x=sqrt(2)\*%i-1]

$$* \%i = \sqrt{-1}$$

※ 「factor(數值)」指令表示求因式分解。

※ 「solve([變數算式],[變數])」指令表示求解。

**隨堂練習：**已知  $1+\sqrt{3}i$  是  $x^4 - 5x^3 + 14x^2 - 20x + 16 = 0$  的一根，試求其他的根

(%i1) factor(x^4-5\*x^3+14\*x^2-20\*x+16);

(%o1) (x^2-3x+4)(x^2-2x+4)

(%i2) solve([x^2-3\*x+4=0],[x]);



$$(\%o2) [x = -\frac{(\sqrt{7}\%i - 3)}{2}, x = \frac{(\sqrt{7}\%i + 3)}{2}]$$

(%i3) solve([x^2-2\*x+4=0],[x]);

$$(\%o3) [x = 1 - \sqrt{3}\%i, x = \sqrt{3}\%i + 1]$$

$$*\%i = \sqrt{-1}$$

※ 「factor( 數值 )」指令表示求因式分解。

※ 「solve([ 變數算式 ], [ 變數 ])」指令表示求解。

**例題 8：**試求含  $2+i$  及  $1-3i$  兩個根的最低次實係數多項方程式

(%i1) expand((x-(2+%i))\*(x-(2-%i))\*(x-(1-3\*%i))\*(x-(1+3\*%i)));

$$(\%o1) x^4 - 6x^3 + 23x^2 - 50x + 50$$

$$*\%i = \sqrt{-1}$$

※ 「expand([ 算式 ] × [ 算式 ])」指令表示展開算式。

## P.205

**隨堂練習：**試求含  $1-i$  及  $3+i$  兩個根的最低次實係數多項方程式

(%i1) expand((x-(1+%i))\*(x-(1-%i))\*(x-(3+%i))\*(x-(3-%i)));

$$(\%o1) x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 20$$

$$*\%i = \sqrt{-1}$$

※ 「expand([ 算式 ] × [ 算式 ])」指令表示展開算式。

## P.208

**例題 9：**試勘定三次方程式  $12x^3 - 8x^2 - 21x + 14 = 0$  的實根介於哪些連續整數之間

方法一：

(%i1) factor(12\*x^3 - 8\*x^2 - 21\*x + 14);

$$(\%o1) (3x-2)(4x^2-7)$$

$$(\%i2) \text{solve}([3*x-2=0],[x]);$$

$$(\%o2) [x=\frac{2}{3}]$$

$$(\%i3) \text{solve}([4*x^2-7],[x]);$$

$$(\%o3) [x=-\frac{\sqrt{7}}{2}, x=\frac{\sqrt{7}}{2}]$$

$$(\%i4) \text{float}(2/3);$$

$$(\%o4) 0.666666666666667$$

$$(\%i5) \text{float}(-\text{sqrt}(7)/2);$$

$$(\%o5) -1.322875655532295$$

$$(\%i6) \text{float}(\text{sqrt}(7)/2);$$

$$(\%o6) 1.322875655532295$$

\* 實根介於 0~1 ; -1~-2 ; 1~2 之間

方法二：

$$(\%i1) f(x):= 12*x^3 -8*x^2 -21*x +14;$$

$$(\%o1) f(x):= 12x^3 -8x^2 +(-21)*x +14;$$

$$(\%i2) f(-2)$$

$$(\%o2) -72$$

$$(\%i3) f(-1)$$

$$(\%o3) 15$$

$$(\%i4) f(0)$$

$$(\%o4) 14$$

$$(\%i5) f(1)$$

$$(\%o5) -3$$

(%i6) f(2)

(%o6) 36

(%i7) f(3)

(%o7) 203

\* 實根介於 0~1 ; -1~-2 ; 1~2 之間

※  $f(x):=ax+b$ ; 定義函數：須以“:=”定義； 定義後只需輸入  $f(x)$  之  $x$  數值即可求得

結果。

※ 「sqrt( 數值 )」指令表示數值開根號。

※ 「factor( 數值 )」指令表示求因式分解。

※ 「float( 數值 )」指令表示將結果轉換為小數。

※ 「solve([ 變數算式 ], [ 變數 ])」指令表示求解。

隨堂練習：試勘定三次方程式  $x^3 - 3x^2 - 4x + 10 = 0$  的實根介於哪些連續整數之間

(%i1) f(x):=x^3 -3\*x^2 -4\*x +10;

(%o1) f(x):=x^3-3x^2+(-4)x+10

(%i2) f(-2)

(%o2) -2

(%i3) f(-1)

(%o3) 10

(%i4) f(0)

(%o4) 10

(%i5) f(1)

(%o5) 4

(%i6) f(2)

(%o6)-2

(%i7) f(3)

(%o7)-2

(%i8) f(4)

(%o8)10

\*實根介於-1~-2；1~2；3~4 之間

<p>※ <math>f(x):=ax+b</math>; 定義函數：須以”:=”定義； 定義後只需輸入 <math>f(x)</math> 之 <math>x</math> 數值即可求得</p>
--

<p>結果。</p>
------------

**例題 10：**已知三次方程式  $x^3-2=0$  在 1 與 2 之間有一無理根，試求此無理根的近似值並使誤差小於  $\frac{1}{10}$

(%i1) solve([x^3-2=0],[x]);

(%o1)  $[x = \frac{2^{1/3}\sqrt{3}i - 2^{1/3}}{2}, x = -\frac{2^{1/3}\sqrt{3}i + 2^{1/3}}{2}, x = 2^{1/3}]$ 

(%i2) float(2^(1/3));

(%o2) 1.259921049894873

※ 「float( 數值 )」指令表示將結果轉換為小數。

※ 「solve([ 變數算式 ], [ 變數 ])」指令表示求解。

**P.210**

**隨堂練習：**已知三次方程式  $x^3+x-1=0$  在 0 與 1 之間有一無理根，試求此無理根的近似值並使誤差小於  $\frac{1}{10}$  (答案不唯一)

(%i1) solve([x^3+x-1=0],[x]);

(%o1)  $[x = (\sqrt{31}/(2*3^{(3/2)}+1/2))^{(1/3)} * (-\sqrt{3}i/2-1/2) - ((\sqrt{3}i/2-1/2)/(3*(\sqrt{31}/(2*3^{(3/2)}+1/2))^{(1/3)})), x = (\sqrt{31}/(2*3^{(3/2)}+1/2))^{(1/3)} * ((\sqrt{3}i/2-1/2) -$ 

```
(sqrt(3)*%i)/2-1/2)/(3*(sqrt(31)/(2*3^(3/2))+1/2)^(1/3)),x=(sqrt(31)/(2*3^(3/2))+1/2)^(1/3)-1/(3*(sqrt(31)/(2*3^(3/2))+1/2)^(1/3))]
```

```
(%i2)float(sqrt(31)/(2*3^(3/2))+1/2)^(1/3)*(-(sqrt(3)*%i)/2-1/2)-((sqrt(3)*%i)/2-1/2)/(3*(sqrt(31)/(2*3^(3/2))+1/2)^(1/3));
```

```
(%i2) float((sqrt(31)/(2*3^(3/2))+1/2)^(1/3)-1/(3*(sqrt(31)/(2*3^(3/2))+1/2)^(1/3)));
```

```
(%o2) 0.68232780382802
```

※ 「sqrt ( 數值 )」指令表示數值開根號。

※ 「float( 數值 )」指令表示將結果轉換為小數。

※ 「solve([ 變數算式 ],[ 變數 ])」指令表示求解。

**P.211** **習題 3-5**

1. 觀念題：對的在題號前打○，錯的在題號前打×

\_\_\_ (1) 設  $n$  為大於 1 的自然數，則實係數  $n$  次方程式至少有一實根

\_\_\_ (2) 方程式  $x^5 + 3x^2 - 2x + 1 = 0$  至少有一實根

\_\_\_ (3) 設  $\frac{b}{a}$  為最簡分數且  $a \mid a_n$ 、 $b \mid a_0$ ，則  $\frac{b}{a}$  為整係數  $n$  次方程式

\_\_\_ (4) 設  $f(x)$  為一實係數多項式， $a$ 、 $b$  為相異兩實數，若  $f(a) \cdot f(b) > 0$ ，則方程式  $f(x) = 0$  在  $a$ 、 $b$  之間沒有實根

\_\_\_ (5) 若實係數二次方程式的兩根和為  $a$ ，二根積為  $b$ ，則此方程式可表為  $x^2 - ax + b = 0$

**※本小題不建議使用 Maxima 解題※**

2. 設  $a$ 、 $b$  為實數，且  $2-i$  為  $x^4 - 2x^3 - x^2 + ax + b = 0$  的根，試求  $a$ 、 $b$  的值

```
(%i1) f(x):= x^4 -2*x^3-x^2 +a*x+b
```

```
(%o1) f(x):= x^4 -2x^3-x^2 +ax+b
```

```
(%i2) expand(f(2-%i));
```

```
(%o2) b-%i*a+2*a+2*%i-14
```

```
(%i3) expand(f(2+%i));
```

```
(%o3) b+%i*a+2*a-2*%i-14
```

```
(%i4) solve([b-%i*a+2*a+2*%i-14=0, b+%i*a+2*a-2*%i-14=0],[a,b]);
```

```
(%o4) [[a=2,b=10]]
```

```
* %i =  $\sqrt{-1}$ 
```

**※  $f(x):=ax+b$ ；定義函數：須以“:=”定義；定義後只需輸入  $f(x)$  之  $x$  數值即可求得**

**結果。**

**※ 「solve([ 變數算式 ], [ 變數 ])」指令表示求解。**

※ 「`expand([算式] × [算式])`」指令表示展開算式。

3. 已知  $1-2i$  為  $x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 14x + 10 = 0$  的一根，是求其他的根

```
(%i1) factor(x^4 - 4*x^3 + 11*x^2 - 14*x + 10);
```

```
(%o1) (x^2 - 2x + 2) (x^2 - 2x + 5)
```

```
(%i2) solve([x^2 - 2*x + 2 = 0], [x]);
```

```
(%o2) [x = 1 - %i, x = %i + 1]
```

```
(%i3) solve([x^2 - 2*x + 5 = 0], [x]);
```

```
(%o3) [x = 1 - 2%i, x = 2%i + 1]
```

```
* %i =  $\sqrt{-1}$ 
```

※ `f(x):=ax+b`; 定義函數：須以“:=”定義；定義後只需輸入  $f(x)$  之  $x$  數值即可求得

結果。

※ 「`solve([變數算式],[變數])`」指令表示求解。

※ 「`factor(數值)`」指令表示求因式分解。

4. 設  $a$ 、 $b$  為實數，且多項方程式  $x^3 + ax^2 + bx + 10 = 0$  有一根為  $2+i$ ，則此方程式的實根為何？

```
(%i1) f(x) := x^3 + a*x^2 + b*x + 10
```

```
(%o1) f(x) := x^3 + ax^2 + bx + 10
```

```
(%i2) expand(f(2-%i));
```

```
(%o2) -%ib + 2b - 4%ia + 3a - 11%i + 12
```

```
(%i3) expand(f(2+%i));
```

```
(%o3) %ib + 2b + 4%ia + 3a + 11%i + 12
```

```
(%i4) solve([-%ib + 2b - 4%ia + 3a - 11%i + 12 = 0, %ib + 2b + 4%ia + 3a + 11%i + 12 = 0], [a, b]);
```

```
(%o4) [[a=-2,b=-3]]
```

```
(%i5) expand(x^3+(-2)*x^2 +(-3)*x+10);
```

```
(%o5) x^3-2x^2-3x+10
```

```
(%i6) solve([x^3-2*x^2-3*x+10],[x]);
```

```
(%o6) [x=2-%i,x=%i+2,x=-2]
```

```
*%i =  $\sqrt{-1}$ 
```

※  $f(x):=ax+b$ ; 定義函數：須以”:=”定義； 定義後只需輸入  $f(x)$  之  $x$  數值即可求得

結果。

※ 「`solve([ 變數算式 ],[ 變數 ])`」指令表示求解。

※ 「`expand([ 算式 ] × [ 算式 ])`」指令表示展開算式。

5. 試求含有 2 及  $3-i$  兩個根的最低實係數多項方程式

```
(%i1) expand((x-2)*(x-(3-%i))*(x-(3+%i)) );
```

```
(%o1) x^3-8x^2+22x-20
```

※ 「`expand([ 算式 ] × [ 算式 ])`」指令表示展開算式。

6. 試解下列方程式

(1)  $x^4 - 5x^2 - 10x - 6 = 0$

```
(%i1) factor(x^4 -5*x ^2 -10*x-6);
```

```
(%o1) (x-3)(x+1)(x^2+2x+2)
```

```
(%i2) solve([x^2+2*x+2=0],[x]);
```

```
(%o2) [x=-%i-1,x=%i-1]
```

```
(%i3) solve([x-3=0],[x]);
```

```
(%o3) [x=3]
```



(%i4) solve([x+1=0],[x]);

(%o4) [x=-1]

\* 方程式的解為  $x=-i-1$ 、 $i-1$ 、 $3$ 、 $-1$

(2)  $2x^3-3x^2-11x+6=0$

(%i1) factor(2\*x^3-3\*x^2-11\*x+6);

(%o1) (x-3)(x+2)(2x-1)

(%i2) solve([x-3=0],[x]);

(%o2) [x=3]

(%i3) solve([x+2=0],[x]);

(%o3) [x=-2]

(%i4) solve([2\*x-1=0],[x]);

(%o4)  $[x=\frac{1}{2}]$

\* 方程式的解為  $x=3$ 、 $-2$ 、 $\frac{1}{2}$

※ 「solve([ 變數算式 ],[ 變數 ])」指令表示求解。

※ 「factor( 數值 )」指令表示求因式分解。

7. 方程式  $x^3-4x^2-x+7=0$  在哪些連續整數之間有根

(%i1) f(x):=(x^3-4\*x^2-x+7);

(%o1) f(x):=  $x^3-4x^2-x+7$

(%i2) f(-2);

(%o2) -15

(%i3) f(-1);

(%o3) 3

(%i4) f(0);

(%o4) 7

(%i5) f(1);

(%o5) 3

(%i6) f(2);

(%o6) -3

(%i7) f(3);

(%o7) -5

(%i8) f(4);

(%o8) 3

\* 實根介於-1~-2 ; 1~2 ; 3~4 之間

※  $f(x):=ax+b$ ; 定義函數：須以” :=”定義； 定義後只需輸入  $f(x)$ 之  $x$  數值即可求得

結果。

### 3-6 多項不等式

#### P.212

**例題 1：**求一次不等式  $3x+4 > 0$  的解

```
(%i1) load(fourier_elim);
```

```
(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier_elim/fourier_elim.lisp
```

```
(%i2) fourier_elim([3*x+4>0],[x]);
```

```
(%o2)  $[-\frac{4}{3} < x]$ 
```

※ 「load (fourier\_elim)」指令可執行不等式計算，須先載入。

※ 「fourier\_elim([變數算式],[變數])」求解不等式。

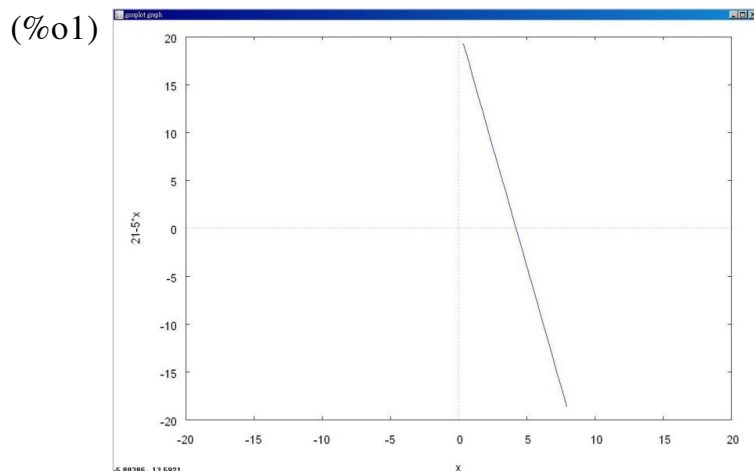
#### P.213

**隨堂練習：**

(1)描繪函數  $y = -5x+21$  的圖形

```
(%i1) plot2d([-5*x+21],[x,-20,20],[y,-20,20]);
```

```
plot2d: some values were clipped.
```



(2)承(1)試以此函數圖形判斷不等式  $-5x+21 > 0$  的解

```
(%i1) load(fourier_elim);
```

(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier\_elim/fourier\_elim.lisp

(%i2) `fourier_elim([-5*x+21 > 0],[x]);`

(%o2)  $[x < \frac{21}{5}]$

※ 「`load (fourier_elim)`」指令可執行不等式計算，須先載入。

※ 「`fourier_elim([ 變數算式 ],[ 變數 ])`」求解不等式。

## P.214

**例題 2：**試解下列二次不等式

(1)  $3x^2 - 5x + 2 \geq 0$

(%i1) `load(fourier_elim);`

(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier\_elim/fourier\_elim.lisp

(%i2) `fourier_elim([3*x^2-5*x+2>=0],[x]);`

(%o2)  $[x = \frac{2}{3}]$  or  $[x = 1]$  or  $[1 < x]$  or  $[x < \frac{2}{3}]$

(2)  $x^2 - 6x + 9 > 0$

(%i1) `load(fourier_elim);`

(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier\_elim/fourier\_elim.lisp

(%i2) `fourier_elim([x^2-6*x+9 > 0],[x]);`

(%o2)  $[x < 3]$  or  $[3 < x]$

(3)  $x(2-x) \leq 3-x$

(%i1) `load(fourier_elim);`

(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier\_elim/fourier\_elim.lisp

(%i2) `fourier_elim([x*(2-x)<=3-x],[x]);`

(%o2)  $[x^2-3x+3=0]$  or  $[x^2-3x+3>0]$

※ 「load (fourier\_elim)」 指令可執行不等式計算，須先載入。

※ 「fourier\_elim([ 變數算式 ],[ 變數 ])」 求解不等式。

## P.215

### 隨堂練習：

試解下列二次不等式

(1)  $3x^2+7x-6 < 0$

(%i1) load(fourier\_elim);

(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier\_elim/fourier\_elim.lisp

(%i2) fourier\_elim([ $3*x^2+7*x-6 < 0$ ],[x]);

(%o2)  $[-3 < x, x < \frac{2}{3}]$

(2)  $x^2-10x+25 \leq 0$

(%i1) load(fourier\_elim);

(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier\_elim/fourier\_elim.lisp

(%i2) fourier\_elim([ $x^2-10*x+25 \leq 0$ ],[x]);

(%o2)  $[x=5]$

(3)  $2(x+1)(x-1) > x^2+2x-5$

(%i1) load(fourier\_elim);

(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier\_elim/fourier\_elim.lisp

(%i2) fourier\_elim([ $2*(x+1)*(x-1) > x^2+2*x-5$ ],[x]);

(%o2)  $[x^2-2x+3>0]$

※ 「load (fourier\_elim)」 指令可執行不等式計算，須先載入。

※ 「fourier\_elim([ 變數算式 ],[ 變數 ])」 求解不等式。

**例題 3：** 試配合二次函數的圖形，解下列二次不等式

$$(1) 3x^2 - 5x + 2 \geq 0$$

(%i1) load(fourier\_elim);

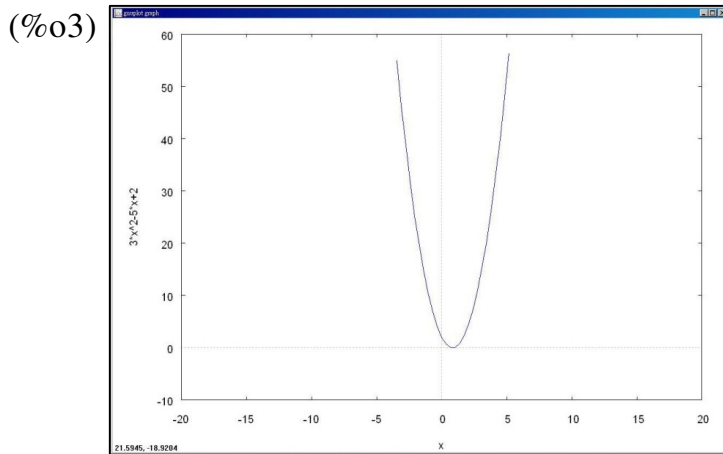
(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier\_elim/fourier\_elim.lisp

(%i2) fourier\_elim([3\*x^2-5\*x+2>=0],[x]);

(%o2)  $x = \frac{2}{3}$  ] or  $x = 1$  ] or  $1 < x$  ] or  $x < \frac{2}{3}$  ]

(%i3) plot2d ([3\*x^2-5\*x+2],[x,-20,20],[y,-10,60]);

plot2d: some values were clipped.



$$(2) x^2 - 6x + 9 > 0$$

(%i1) load(fourier\_elim);

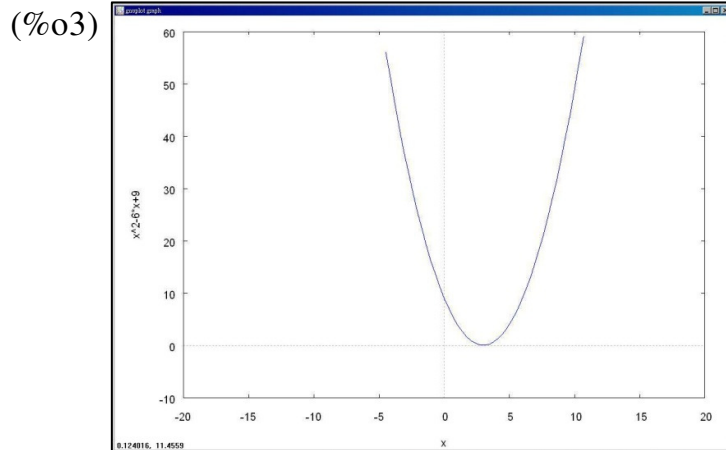
(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier\_elim/fourier\_elim.lisp

(%i2) fourier\_elim([x^2-6\*x+9 > 0],[x]);

(%o2)  $x < 3$  ] or  $3 < x$  ]

(%i3) plot2d ([x^2-6\*x+9],[x,-20,20],[y,-10,60]);

plot2d: some values were clipped.



(3)  $x(2-x) \leq 3-x$

(%i1) load(fourier\_elim);

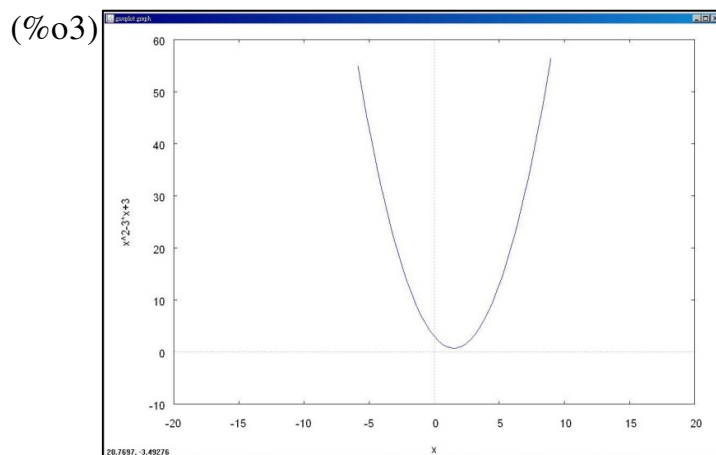
(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier\_elim/fourier\_elim.lisp

(%i2) fourier\_elim([x\*(2-x)<=3-x],[x]);

(%o2) [x^2-3\*x+3=0] or [x^2-3\*x+3>0]

(%i3) plot2d ([x^2-3\*x+3],[x,-20,20],[y,-10,60]);

plot2d: some values were clipped.



※ 「load (fourier\_elim)」 指令可執行不等式計算，須先載入。

※ 「fourier\_elim([ 變數算式 ],[ 變數 ])」 求解不等式。

**P.217**

**隨堂練習：**試配合二次函數的圖形，解下列二次不等式

(1)  $x^2+5x+4 < 0$

(%i1) load(fourier\_elim);

(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier\_elim/fourier\_elim.lisp

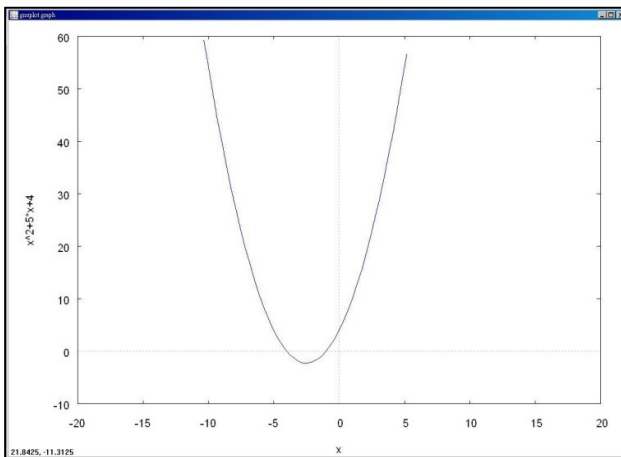
(%i2) fourier\_elim([x^2+5\*x+4 < 0],[x]);

(%o2) [-4<x,x<-1]

(%i3) plot2d ([x^2+5\*x+4],[x,-20,20],[y,-10,60]);

plot2d: some values were clipped.

(%o3)



(2)  $4x^2-4x+1 \leq 0$

(%i1) load(fourier\_elim);

(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier\_elim/fourier\_elim.lisp

(%i2) fourier\_elim([4\*x^2-4\*x+1<=0],[x]);

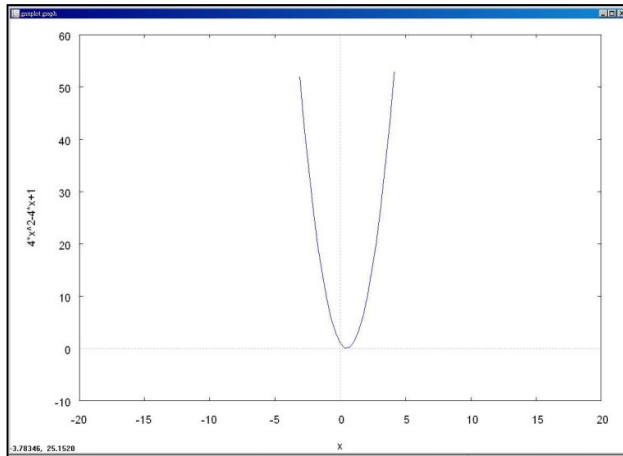
(%o2)  $[x=\frac{1}{2}]$

(%i3) plot2d ([4\*x^2-4\*x+1],[x,-20,20],[y,-10,60]);

plot2d: some values were clipped.



(%o3)



$$(3) 2x(x+1)+3 < x+2$$

(%i1) load(fourier\_elim);

(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier\_elim/fourier\_elim.lisp

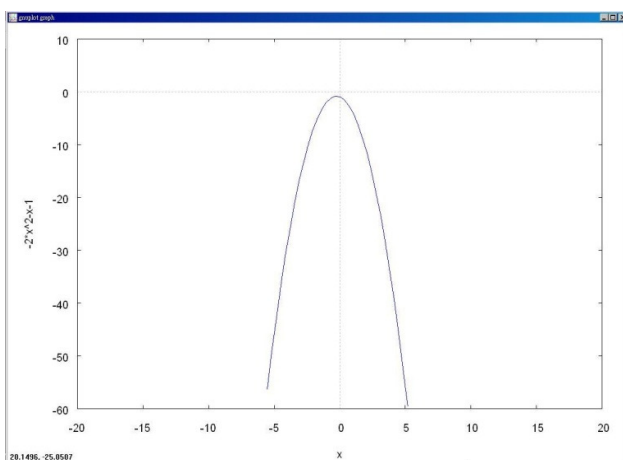
(%i2) fourier\_elim([2\*x\*(x+1)+3 &lt; x+2],[x]);

(%o2) [-2x<sup>2</sup>-x-1>0]

(%i3) plot2d ([-2\*x^2-x-1],[x,-20,20],[y,-60,10]);

plot2d: some values were clipped.

(%o3)



※ 「load (fourier\_elim)」 指令可執行不等式計算，須先載入。

※ 「fourier\_elim([ 變數算式 ],[ 變數 ])」 求解不等式。

**P.220**

**例題 4:** 設對所有實數  $x$ ，二次函數  $f(x) = mx^2 + (3-m)x + (m-3)$  的圖形都在  $x$  軸的下方，試求實數  $m$  的範圍

```
(%i1) load(fourier_elim);
```

```
(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier_elim/fourier_elim.lisp
```

```
(%i2) fourier_elim([(3-m)^2-4*m*(m-3)<0],[m]);
```

```
(%o2) [3<m] or [m<-1]
```

\*圖形在  $x$  軸下方且開口向下，方程式  $ax^2+bx+c$  須同時符合， $a<0$ 、 $b^2-4ac<0$ ，故本題為  $m<-1$

※ 「load (fourier\_elim)」指令可執行不等式計算，須先載入。

※ 「fourier\_elim([ 變數算式 ],[ 變數 ])」求解不等式。

**隨堂練習：** 設對所有實數  $x$ ，二次函數  $f(x) = 3x^2 + 2(m-2)x + (m-2)$  的函數值恆正，試求實數  $m$  的範圍

```
(%i1)load(fourier_elim);
```

```
(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier_elim/fourier_elim.lisp
```

```
(%i2) fourier_elim([(2*(m-2))^2-4*3*(m-2) < 0],[m]);
```

```
(%o2) [2<m,m<5]
```

\*圖形在  $x$  軸上方且開口向上，不與  $x$  軸相交，方程式  $ax^2+bx+c$  須同時符合， $a>0$ 、 $b^2-4ac < 0$ ，故本題為  $2 < m < 5$

※ 「load (fourier\_elim)」指令可執行不等式計算，須先載入。

※ 「fourier\_elim([ 變數算式 ],[ 變數 ])」求解不等式。

**P.221****例題 5**：試解下列不等式

(1)  $(x+2)(x-1)(x-3) < 0$

(%i1)load(fourier\_elim);

(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier\_elim/fourier\_elim.lisp

(%i2) fourier\_elim([(x+2)\*(x-1)\*(x-3) &lt; 0],[x]);

(%o2) [1&lt;x,x&lt;3] or [x&lt;-2]

(2)  $(x^2-x+1)(x+2)(x-1)(x-3) \geq 0$

(%i1)load(fourier\_elim);

(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier\_elim/fourier\_elim.lisp

(%i2) fourier\_elim([(x^2-x+1)\*(x+2)\*(x-1)\*(x-3)&gt;=0],[x]);

(%o2) [x^2-x+1=0] or [x=-2] or [x=1] or [x=3] or [3&lt;x,x^2-x+1&gt;0] or

[-2&lt;x,x&lt;1,x^2-x+1&gt;0] or [1&lt;x,x&lt;3,-(x^2-x+1)&gt;0] or [x&lt;-2,-(x^2-x+1)&gt;0]

※ 「load (fourier\_elim)」指令可執行不等式計算，須先載入。

※ 「fourier\_elim([變數算式],[變數])」求解不等式。

**P.222****隨堂練習**：試解下列不等式

(1)  $(x-2)(2x-1)(x+3)(4x+1) > 0$

(%i1)load(fourier\_elim);

(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier\_elim/fourier\_elim.lisp

(%i2) fourier\_elim([(x-2)\*(2\*x-1)\*(x+3)\*(4\*x+1)&gt;0],[x]);

(%o2) [2&lt;x] or [-1/4&lt;x,x&lt;1/2] or [x&lt;-3]

$$(2) 2x^3 + 4x^2 - 10x - 12 \geq 0$$

```
(%i1)load(fourier_elim);
```

```
(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier_elim/fourier_elim.lisp
```

```
(%i2) fourier_elim([2*x^3+4*x^2 -10*x-12>=0],[x]);
```

```
(%o2) [x=-3] or [x=-1] or [x=2] or [2<x] or [-3<x,x<-1]
```

$$(3) (x^2+x+1)(x-2)(x+3)(x+1) \geq 0$$

```
(%i1)load(fourier_elim);
```

```
(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier_elim/fourier_elim.lisp
```

```
(%i2) fourier_elim([(x^2+x+1)*(x-2)*(x+3)*(x+1)>=0],[x]);
```

```
(%o2) [x^2+x+1=0] or [x=-3] or [x=-1] or [x=2] or [2<x,x^2+x+1>0] or
```

```
[-3<x,x<-1,x^2+x+1>0] or [-1<x,x<2,-(x^2+x+1)>0] or [x<-3,-(x^2+x+1)>0]
```

※ 「load (fourier\_elim)」 指令可執行不等式計算，須先載入。

※ 「fourier\_elim([ 變數算式 ],[ 變數 ])」 求解不等式。

**例題 6：**試解下列不等式

$$(1) (x-1)^2 (x+2)(x-3) < 0$$

```
(%i1)load(fourier_elim);
```

```
(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier_elim/fourier_elim.lisp
```

```
(%i2) fourier_elim([(x-1)^2*(x+2)*(x-3) < 0],[x]);
```

```
(%o2) [-2<x,x<1] or [1<x,x<3]
```

$$(2) (x-1)^4(x+2)(x-3) \geq 0$$

```
(%i1)load(fourier_elim);
```

```
(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier_elim/fourier_elim.lisp
```

```
(%i2) fourier_elim([(x-1)^4*(x+2)*(x-3) >=0],[x]);
```

```
(%o2) [x=-2] or [x=1] or [x=3] or [3<x] or [x<-2]
```

(3)  $(x-1)^3(x+2)(x-3) > 0$

```
(%i1)load(fourier_elim);
```

```
(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier_elim/fourier_elim.lisp
```

```
(%i2) fourier_elim([(x-1)^3*(x+2)*(x-3) > 0],[x]);
```

```
(%o2) [3<x] or [-2<x,x<3,-(x-1)^3>0]
```

※ 「load (fourier\_elim)」 指令可執行不等式計算，須先載入。

※ 「fourier\_elim([ 變數算式 ],[ 變數 ])」 求解不等式。

## P.223

**隨堂練習：**試解下列不等式

(1)  $(x-2)^2(x+1)(x+3) < 0$

```
(%i1)load(fourier_elim);
```

```
(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier_elim/fourier_elim.lisp
```

```
(%i2) fourier_elim([(x-2)^2*(x+1)*(x+3) < 0],[x]);
```

```
(%o2) [-3<x,x<-1]
```

(2)  $(x-2)^6(x+1)(x+3) > 0$

```
(%i1)load(fourier_elim);
```

```
(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier_elim/fourier_elim.lisp
```

```
(%i2) fourier_elim([(x-2)^6*(x+1)*(x+3)>0],[x]);
```

(%o2)  $[-1 < x, x < 2]$  or  $[2 < x]$  or  $[x < -3]$

(3)  $(x-1)(x^2+4x+3)(x-2)^5 < 0$

(%i1) load(fourier\_elim);

(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier\_elim/fourier\_elim.lisp

(%i2) fourier\_elim([(x-1)\*(x^2+4\*x+3)\*(x-2)^5 < 0],[x]);

(%o2)  $[1 < x, -(x-2)^5 > 0]$  or  $[-3 < x, x < -1, -(x-2)^5 > 0]$

※ 「load (fourier\_elim)」指令可執行不等式計算，須先載入。

※ 「fourier\_elim([變數算式],[變數])」求解不等式。

**P.224** **習題 3-6**

1. 觀念題：對的在題號前打○，錯的在題號前打×

\_\_\_ (1) 設  $a$ 、 $b$ 、 $c$  均為實數，若  $a > b$ ，則  $ac > bc$

\_\_\_ (2) 若  $x > 3$ ，則  $(x-3)(x+1) > 0$

\_\_\_ (3)  $(x-3)(x+1) > 0$ ，則  $x > 3$

\_\_\_ (4) 不等式  $(x+3)(x-2)(x-1)^2 < 0$  與不等式  $(x+3)(x-2) < 0$  的解相同

\_\_\_ (5) 設  $a$  為不等於 0 的實數，不等式  $\frac{2x-4}{a} < x+2$  與不等式  $2x-4 < a(x+2)$  的解相同

\_\_\_ (6) 不等式  $\frac{2x+3}{x^2+x+1} > 1$  與不等式  $2x+3 > x^2+x+1$  的解相同

**※本題不建議使用 Maxima 解題※**

2. 試求下列不等式的解

(1)  $x + \frac{x}{2} - \frac{x}{3} < 2x + 5$

(%i1)load(fourier\_elim);

(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier\_elim/fourier\_elim.lisp

(%i2) fourier\_elim([x+x/2-x/3<2\*x+5],[x]);

(%o2) [-6<x]

(2)  $2x^2 - 4x + 3 < x + 6$

(%i1)load(fourier\_elim);

(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier\_elim/fourier\_elim.lisp

(%i2) fourier\_elim([2\*x^2-4\*x+3 < x+6],[x]);

(%o2)  $[-\frac{1}{2} < x, x < 3]$

(3)  $x^2 + 8x + 16 > 0$

(%i1)load(fourier\_elim);

(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier\_elim/fourier\_elim.lisp

(%i2) fourier\_elim([x^2+8\*x+16 > 0],[x]);

(%o2) [x<-4] or [-4<x]

(4)  $3x^2+2x+1 < 0$

(%i1)load(fourier\_elim);

(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier\_elim/fourier\_elim.lisp

(%i2) fourier\_elim([3\*x^2+2\*x+1 < 0],[x]);

(%o2) [-3x^2-2x-1>0]

(5)  $(2x+1)(x-3)(3x-1)(x+5) < 0$

(%i1)load(fourier\_elim);

(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier\_elim/fourier\_elim.lisp

(%i2) fourier\_elim([(2\*x+1)\*(x-3)\*(3\*x-1)\*(x+5)< 0],[x]);

(%o2) [ $\frac{1}{3}$ <x,x<3] or [-5<x,x< - $\frac{1}{2}$ ]

(6)  $(x+1)(x-3)(x+4)(x^2+x+1) > 0$

(%i1)load(fourier\_elim);

(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier\_elim/fourier\_elim.lisp

(%i2) fourier\_elim([(x+1)\*(x-3)\*(x+4)\*(x^2+x+1) >0],[x]);

(%o2) [3<x,x^2+x+1>0] or [-4<x,x<-1,x^2+x+1>0] or [-1<x,x<3,-(x^2+x+1)>0] or

[x<-4,-(x^2+x+1)>0]



$$(7) (x-3)(x+4)^2(x^2+x+1) \geq 0$$

```
(%i1)load(fourier_elim);
```

```
(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier_elim/fourier_elim.lisp
```

```
(%i2) fourier_elim([(x-3)*(x+4)^2*(x^2+x+1)>= 0],[x]);
```

```
(%o2) [x^2+x+1=0] or [x=-4] or [x=3] or [3<x,x^2+x+1>0] or [x<-4,-(x^2+x+1)>0] or  
[-4<x,x<3,-(x^2+x+1)>0]
```

$$(8) (x-3)(x+4)^3(x^2+x+1) \leq 0$$

```
(%i1)load(fourier_elim);
```

```
(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier_elim/fourier_elim.lisp
```

```
(%i2) fourier_elim([(x-3)*(x+4)^3*(x^2+x+1) <=0],[x]);
```

```
(%o2) [x^2+x+1=0] or [x=-4] or [x=3] or [-4<x,x<3,x^2+x+1>0] or  
[3<x,-(x+4)^3>0,x^2+x+1>0] or [3<x,-(x^2+x+1)>0] or [x<3,-(x+4)^3>0,-(x^2+x+1)>0]
```

※ 「load (fourier\_elim)」指令可執行不等式計算，須先載入。

※ 「fourier\_elim([變數算式],[變數])」求解不等式。

3. 設  $a$ 、 $b$  為實數且  $ax+b > 0$  的解為  $x < -\frac{1}{3}$ ，試求  $(2a-b)x + (b-2a) < 0$  的解

4. 設  $a$ 、 $b$  為實數且  $x^2+ax+b \leq 0$  的解為  $|x-3| \leq 2$ ，試求數對  $(a, b) = ?$

5. 試就下列兩個二次函數  $y = ax^2+bx+c$  的圖形，判斷  $a$ 、 $b$ 、 $c$ ， $D = b^2-4ac$  的正負

6. 若  $y = x^2 + 2kx + 5k$  的圖形恆在直線  $y = -x-4$  的上方，試求實數  $k$  的範圍

7.若已知二次不等式  $ax^2+(4a-2)x+(7a-2)\leq 0$  無解，試求實數  $a$  的範圍

8.設  $f(x) = x^4 + x^3 - 12x^2 + 26x - 24$  且  $f(1+i) = 0$ ，試求  $f(x) < 0$  的解

9.試求不等式  $x^4 - 3x^3 + 5x^2 - x - 10 \geq 0$  的解

**綜合練習**

1. 若多項式  $x^3 - 10x + 3 = a(x-1)(x+2)(x-3) + b(x+2)(x-3) + c(x-3) + d$ ，試求常數  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$  的值

(%i1) quotient( $x^3-10*x+3,x-3$ );

(%o1)  $x^2+3x-1$

(%i2) remainder( $x^3-10*x+3,x-3$ );

(%o2) 0

(%i3) quotient( $x^2+3*x-1,x+2$ );

(%o3)  $x+1$

(%i4) remainder( $x^2+3*x-1,x+2$ );

(%o4) -3

(%i5) quotient( $x+1,x-1$ );

(%o5) 1

(%i6) remainder( $x+1,x-1$ );

(%o6) 2

\* 多項式  $x^3 - 10x^3 + 3 = 1(x-1)(x+2)(x-3) + 2(x+2)(x-3) + (-3)(x-3) + 0$ ， $a=1$ 、 $b=-2$ 、 $c=-3$ 、 $d=0$

※ 「quotient ( 被除數,除數 )」指令表示求商。

※ 「remainder ( 被除數,除數 )」指令表示求餘數。

2. 設多項式  $x^3 + 3x^2 - x + 7$  除以  $f(x)$  的商為  $x+3$ ，餘式為  $-3x+1$ ，試求  $f(x)$

(%i1) quotient((( $x^3+3*x^2-x+7$ )-( $-3*x+1$ )), $x+3$ );

(%o1)  $x^2+2$

※ 「quotient ( 被除數,除數 )」指令表示求商。

3. 設  $f(x) = 3x^3 + 7x^2 + 4x + 6 = a(x+2)^3 + b(x+2)^2 + c(x+2) + d$  ,

(1) 試求常數 a、b、c、d 的值

(%i1) quotient(3\*x^3+7\*x^2+4\*x +6,x+2);

(%o1)  $3x^2+x+2$

(%i2) remainder(3\*x^3+7\*x^2+4\*x +6, x+2);

(%o2) 2

(%i3) quotient(3\*x^2+x+2,x+2);

(%o3)  $3x-5$

(%i4) remainder(3\*x^2+x+2,x+2);

(%o4) 12

(%i5) quotient(3\*x-5, x+2);

(%o5) 3

(%i6) remainder(3\*x-5, x+2);

(%o6) -11

\* 多項式  $3x^3 + 7x^2 + 4x + 6 = 3(x+2)^3 + (-11)(x+2)^2 + 12(x+2) + 2$  , a=3、b=-11、c=12

、d=2

※ 「quotient ( 被除數,除數 )」指令表示求商。

※ 「remainder ( 被除數,除數 )」指令表示求餘數。

(2) 求  $f(-1.999)$  的近似值四捨五入至小數第二位

方法一：

(%i7) f(x):= 3\*x^3+7\*x^2+4\*x +6;

(%o7) f(x):=  $3x^3 + 7x^2 + 4x + 6$ ;

(%i8) f(-1.999);

(%o8) 2.0119890030000002

方法二：

(%i9)  $3*(-1.999+2)^3 + (-11)*(-1.999+2)^2 + 12*(-1.999+2) + 2;$

(%o9) 2.0119890029999999

4. 設  $f(x) = x^{2005} - 1$

(1) 分別求  $x-1$ 、 $x+1$  除  $f(x)$  所得的餘式

(%i1)  $f(x) := x^{2005} - 1$

(%o1)  $f(x) := x^{2005} - 1$

(%i2) remainder (f(x), x-1);

(%o2) 0

(%i3) remainder (f(x), x+1);

(%o3) -2

(2) 若  $f(x) = (x^2-1) \cdot q(x) + ax + b$ ，其中  $q(x)$  為  $f(x)$  除以  $x^2-1$  的商，求常數  $a$ 、 $b$

(%i4) remainder (f(x), x^2-1);

(%o4) x-1

\*  $ax + b = \text{餘數} = x - 1$ ，可知  $a = 1$ ， $b = -1$

(3) 求  $8^{2005}$  除以 63 所得的餘數

方法一：

(%i5) remainder(f(8)+1, 63);

(%o5) 8

方法二：

(%i7) remainder (8^2005, 63);

(%o7) 8

※  $f(x):=ax+b$ ; 定義函數：須以“:=”定義； 定義後只需輸入  $f(x)$  之  $x$  數值即可求得

結果。

※ 「remainder ( 被除數,除數 )」指令表示求餘數。

5.若多項式  $f(x) = (x-2)^5 + ax+b$  有  $x-1$  與  $x-3$  兩個一次項因式，試求常數  $a$ 、 $b$  的值

```
(%i1) solve([remainder ((x-2)^5+a*x+b,x-1)=0, remainder ((x-2)^5+a*x+b,x-3)=0],[a,b]);
```

```
(%o1) [[a=-1,b=2]]
```

※ 「solve( [ 變數算式 ], [ 變數 ] )」指令表示求解。

※ 「remainder ( 被除數,除數 )」指令表示求餘數。

6.若多項式  $f(x) = 2x^2 + ax+b$  與  $g(x) = 3x^2 + cx+d$  的最高公因式為  $x+1$ ，最低公倍式為  $6x^3-5x^2-8x+e$ ，試求  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$ 、 $e$  的值

```
(%i1) solve([6*(-1)^3-5*(-1)^2-8*(-1)+e=0],[e]);
```

```
(%o1) [e=3]
```

```
(%i2) factor(6*x^3-5*x^2-8*x+3);
```

```
(%o2) (x+1)(2x-3)(3x-1)
```

```
(%i3) expand((x+1)*(2*x-3));
```

```
(%o3) 2x^2-x-3
```

```
(%i3) expand((x+1)*(3*x-1));
```

```
(%o3) 3x^2+2x-1
```

\* $2x^2 + ax+b=2x^2-x-3$  ;  $3x^2 + cx+d = 3x^2+2x-1$  ;  $a = -1$ 、 $b = -3$ 、 $c = 2$ 、 $d = -1$ 、 $e = 3$

※ 「factor( 數值 )」指令表示求因式分解。

※ 「solve( [ 變數算式 ], [ 變數 ] )」指令表示求解。

※ 「`expand([算式] × [算式])`」指令表示展開算式。

7. 若多項式  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 2$ ， $g(x) = x^3 - x^2 - 4x + 7$ ，若  $f(a) = 4$ ， $g(a) = 3$ ，則常數  $a$  之值為何？

```
(%i1) f(x):= x^3 -6*x^2 +11*x-2;
```

```
(%o1) f(x):= x^3 -6x^2 +11x-2
```

```
(%i2) g(x):= x^3 - x^2 - 4*x+7;
```

```
(%o2) g(x):= x^3 - x^2 +(-4) x+7
```

```
(%i3) solve([f(a)=4,g(a)=3],[a]);
```

```
(%o3) [[a=2],[a=1]]
```

※ `f(x):=ax+b`；定義函數：須以“:=”定義；定義後只需輸入  $f(x)$  之  $x$  數值即可求得

結果。

※ 「`solve([變數算式],[變數])`」指令表示求解。

8. 若二次函數  $y = ax^2 + bx - 3$ ，在  $x = 2$  時有最大值 5，試求常數  $a$ 、 $b$  的值

9.  $a$ 、 $b$  為實數， $a > 0$ ，若二次函數  $f(x) = a(x-2)^2 + b$ ，試比較  $f(1)$ 、 $f(2)$ 、 $f(3)$ 、 $f(4)$  的大小關係

10. 欲將長為 10 公尺，寬為 6 公尺的長方形鐵板的四個角，各截去一個相同的小正方形，再將各邊摺起焊接成一個無蓋的長方體儲水槽，並使儲水槽的容積為 24 立方公尺，求截去的小正方形每邊的長(不計鐵板厚度)

```
(%i1) solve([(10-2*x)*(6-2*x)*x=24],[x]);
```

```
(%o1) [x=3-sqrt(6),x=sqrt(6)+3,x=2]
```

\* 邊長為實數故  $x=2$

※ 「solve([ 變數算式 ], [ 變數 ])」指令表示求解。

11. 若方程式  $x^3 - kx^2 + 2x + (2k-4) = 0$ ，在 -1 與 0 之間，1 與 2 之間都恰有一個實根(皆非重根)，求實數  $k$  的範圍。

12 設不等式  $ax^2 + bx + c > 0$  的解為  $-2 < x < 3$ ，求不等式  $cx^2 + bx + a > 0$  之解

13. 若二次函數  $y = 3x^2 + ax - 4a$  的圖形恆在  $y = ax^2 - ax - 12$  圖形的上方，求實數  $a$  的範圍

14. 試解不等式  $(1+x)(3-x)(x^2 - x + 2)(x^2 + 3x + 2) > 0$

```
(%i1) load(fourier_elim);
```

```
(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.19.2/share/contrib/fourier_elim/fourier_elim.lisp
```

```
(%i2) fourier_elim([(1+x)*(3-x)*(x^2 - x+2)*(x^2 +3*x+2)>0],[x]);
```

```
(%o2) [-2<x,x<-1,x^2-x+2>0] or [-1<x,x<3,x^2-x+2>0] or [3<x,-(x^2-x+2)>0] or  
[x<-2,-(x^2-x+2)>0]
```

※ 「load (fourier\_elim)」指令可執行不等式計算，須先載入。

※ 「fourier\_elim([ 變數算式 ], [ 變數 ])」求解不等式。