Maxima 在微積分上之應用

極限

國立屏東教育大學 應用數學系 研究助理 徐偉玲

weilinghsu@mail.npue.edu.tw

日期：2009/9/21

1.1A Preview of Calculus

1.1 Finding Limits Graphically and Numerically

Example 1. Estimating a Limit Numerically

Evaluate the function $f(x) = x/(\sqrt{x+1}-1)$ at several points near $x=0$ and use the results to estimate the limit $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$.

Solution：

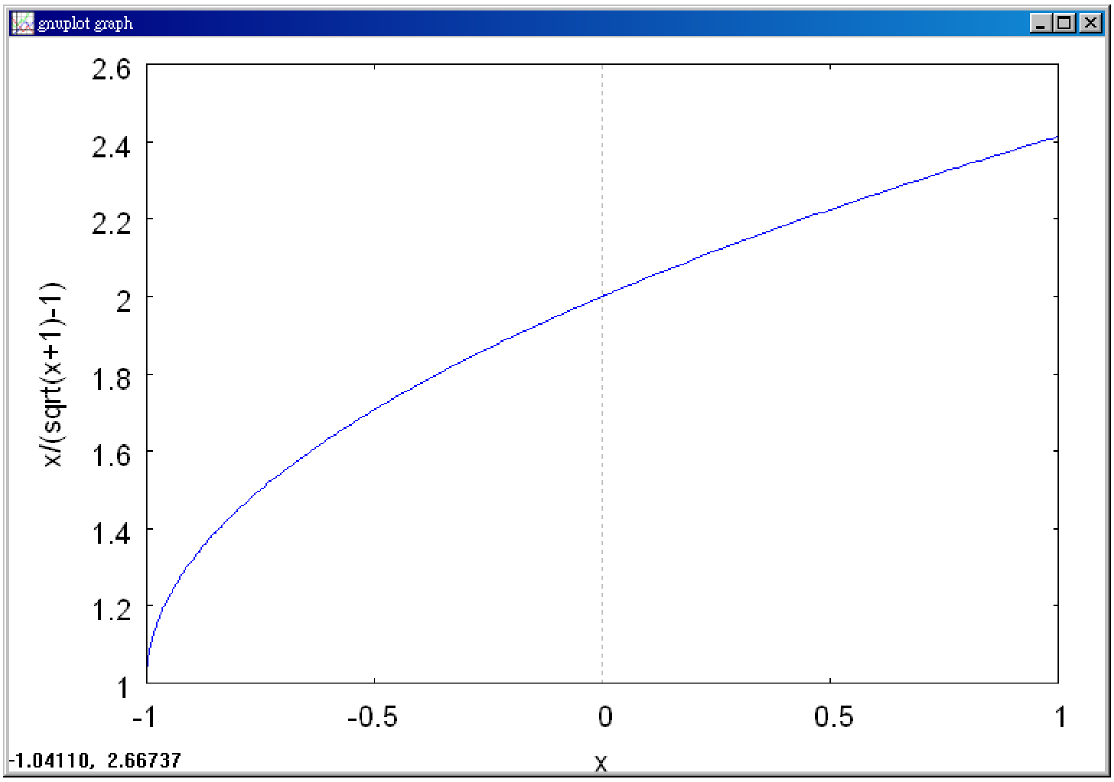
(%i1) plot2d([x/(sqrt(x+1)-1)],[x,-1,1]);

繪圖指令解說：plot2d([expr，x_range，options])， plot2d 是 Maxima 的繪圖指令，maxima 執行到這時，會去呼叫 gunplot 來繪製圖形。

expr：是你要繪製的函數，這例是 $x/\sqrt{x+1}-1$ 函數圖形

x_range：是 x 軸的顯示範圍，當然可以指定 x 軸的顯示範圍，我們也可以指定 y 軸的顯示範圍，如果不指定 y 軸，系統也會自動設定適當的大小，不過一定要指定 x 軸，另外函數中的變數要與範圍指定的變數相同，例如函數為 $\frac{g}{\sqrt{g+1}-1}$,那麼指定範圍時就是[g, -1, 1]。

options：指其它的繪圖選項，如線的顏色，圖形背景色，線的大小，線型‧‧‧‧等等。



(%i2) f:x/(sqrt(x+1)-1); //建立一方程式 $\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$ ，方程式名稱叫做 f

(%o2) $\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$

(%i3) limit(f,x,0); 極限指令：limit(方程式，極限變數，範圍) //此例 f 爲前所定義之方程式 $\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$ ，極限變數爲 x，範圍爲 x 趨近於 0

(%o3) 2

(%i4) 'limit(f,x,2); 有時我們會希望呈現未運算前的格式，在 maxima，我們只需要在方程式前面加上「 ' 」，maxima 就不會運算該程式

(%o4) $\lim_{x \to 2} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$

The table lists the values of $f(x)$ for several x-values near 0.

x	-0.01	-0.001	-0.0001	0	0.0001	0.001	0.01
$f(x)$	1.99499	1.99950	1.99995	?	2.00005	2.00050	2.00499

From the results shown in the table, you can estimate the limit to be 2. This limit is reinforced by the graph of f (see Figure 1.6).

Example 2. Finding a Limit

Find the limit of $f(x)$ as x approaches 2 where f is defined as $f(x)\begin{cases}1, x \neq 2\\ 0, x = 2\end{cases}$.

Solution：(%i1) f(x):=1; //定義函數 f(x)=1

```
(%o1)  f(x):=1
```

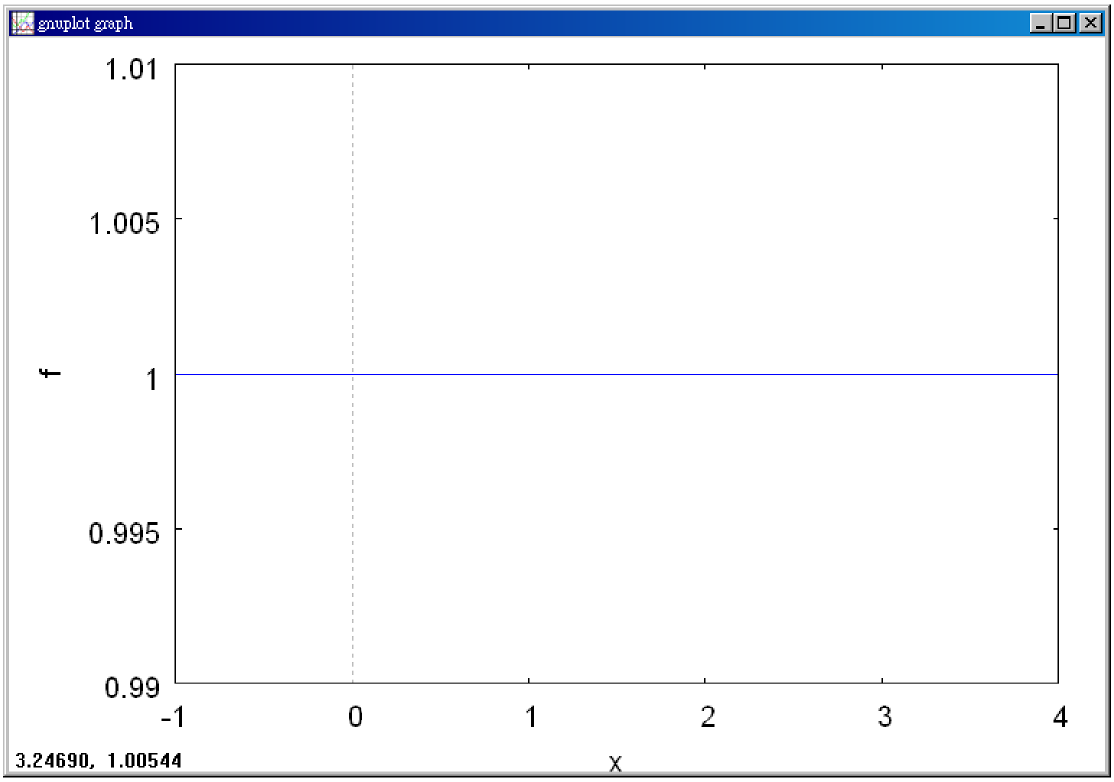
(%i2) plot2d([f],[x,-1,4]); 繪圖指令解說：plot2d([expr，x_range，options])， plot2d 是 Maxima 的繪圖指令，maxima 執行到這時，會去呼叫 gunplot 來繪製圖形。

expr：是你要繪製的函數，這例是 f(x)=1 函數圖形

x_range：是 x 軸的顯示範圍，當然可以指定 x 軸的顯示範圍，我們也可以指定 y 軸的顯示範圍，如果不指定 y 軸，系統也會自動設定適當的大小，不過一定要指定 x 軸，另外函數中的變數要與範圍指定的變數相同

options：指其它的繪圖選項，如線的顏色，圖形背景色，線的大小，線型‧‧‧‧等等。

```
(%o2)
```



Because $f(x)=1$ for all x other than $x=2$, you can conclude that the limit is 1, as shown in Figure 1.7. So, you can write $\lim_{x\to 2} f(x)=1$. The fact that $f(2)=0$ has no bearing on the existence or value of the limit as x approaches 2. For instance, if the function were defined as $f(x)=\begin{cases}1, x\neq 2\\ 2, x=2\end{cases}$ the limit would be the same.

Example 3. Behavior That Differs from the Right and Left

Show that the limit does not exist. $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$

Solution：

(%i1) f(x):=abs(x)/x; //定義一函數 $\frac{|x|}{x}$ ，函數名稱叫做 f(x)

(%o1) $f(x):=\frac{|x|}{x}$

(%i2) plot2d([f],[x,-1,1]); 繪圖指令解說：plot2d([expr，x_range，options])， plot2d 是 Maxima 的繪圖指令，maxima 執行到這時，會去呼叫 gunplot 來繪製圖形。

expr：是你要繪製的函數，這例是 $\frac{|x|}{x}$ 函數圖形

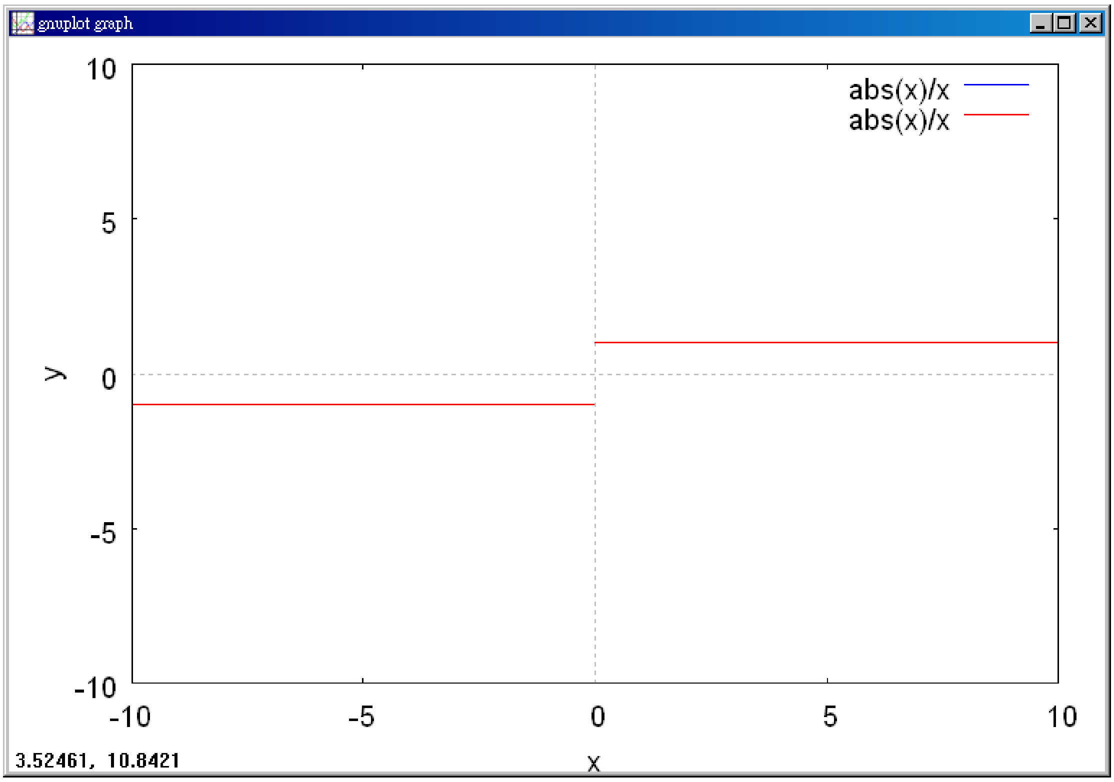
x_range：是 x 軸的顯示範圍，當然可以指定 x 軸的顯示範圍，我們也可以指定 y 軸的顯示範圍，如果不指定 y 軸，系統也會自動設定適當的大小，不過一定要指定 x 軸，另外函數中的變數要與範圍指定的變數相同，例如函數爲 $\frac{|g|}{g}$,那麼指定範圍時就是[g, -1, 1]。

options：指其它的繪圖選項，如線的顏色，圖形背景色，線的大小，線型‧‧‧‧等等。

//此題並不能畫出圖形，Maxima 顯示在 0 的時候會出現問題

```
Division by 0
#0: f(x=0.0)
 -- an error.  To debug this try debugmode(true);
```

(%i1) plot2d([abs(x)/x,abs(x)/x], [x, -10,10], [y,-10,10])$ 多個函數繪圖指令：plot2d([第一個函數，…第 n 個函數]，[x 軸的範圍]，[y 軸的範圍]) //由於在 0 時會出錯，於是我們將同一個函數看成不同的函數，畫出圖形



(%i3) f:abs(x)/x;　//建立一方程式 $\frac{|x|}{x}$ ，方程式名稱叫做 f

(%o3) $\frac{|x|}{x}$

(%i4) limit(f,x,0);　$\boxed{\text{極限指令：limit(方程式，極限變數，範圍)}}$　//此例 f 爲前所定義之方程式 $\frac{|x|}{x}$ ，極限變數爲 x，範圍爲 x 趨近於 0

(%o4) und

(%i5) 'limit(f,x,0);　$\boxed{\text{有時我們會希望呈現未運算前的格式，在 maxima，我們只需要在方程式前面加上「 ' 」，maxima 就不會運算該程式}}$

(%o5) $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$

Consider the graph of the function $f(x)=\frac{|x|}{x}$. From Figure 1.8, you can see that for positive x-values $\frac{|x|}{x}=1, x>0$ and for negative x-values $\frac{|x|}{x}=-1, x<0$. This means that no matter how close x gets to 0, there will be both positive and negative x-values that yields $f(x)=1$ and $f(x)=-1$. Specifically, if δ (the lowercase Greek letter delta) is a positive number, then for x-values satisfying the inequality $0<|x|<\delta$, you can classify the values of $|x|/x$ as known. This implies that the limit does not exist.

Example 4. Unbounded behavior

Discuss the existence of the limit $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}$.

Solution：(%i1) f(x):=1/x^2; //定義一函數 $\frac{1}{x^2}$ ，函數名稱叫做 f(x)

$$(\%o1) \quad f(x):=\frac{1}{x^2}$$

(%i2) plot2d([f],[x,-2,2]); $\boxed{\text{繪圖指令解說：plot2d([expr，x\_range，options])，plot2d 是 Maxima 的繪圖指令，maxima 執行到這時，會去呼叫 gunplot 來繪製圖形。}}$

expr：是你要繪製的函數，這例是 $\frac{1}{x^2}$ 函數圖形

x_range：是 x 軸的顯示範圍，當然可以指定 x 軸的顯示範圍，我們也可以指定 y 軸的顯示範圍，如果不指定 y 軸，系統也會自動設定適當的大小，不過一定要指定 x 軸，另外函數中的變數要與範圍指定的變數相同，例如函數為 $\frac{1}{g^2}$,那麼指定範圍時就是[g, -1, 1]。

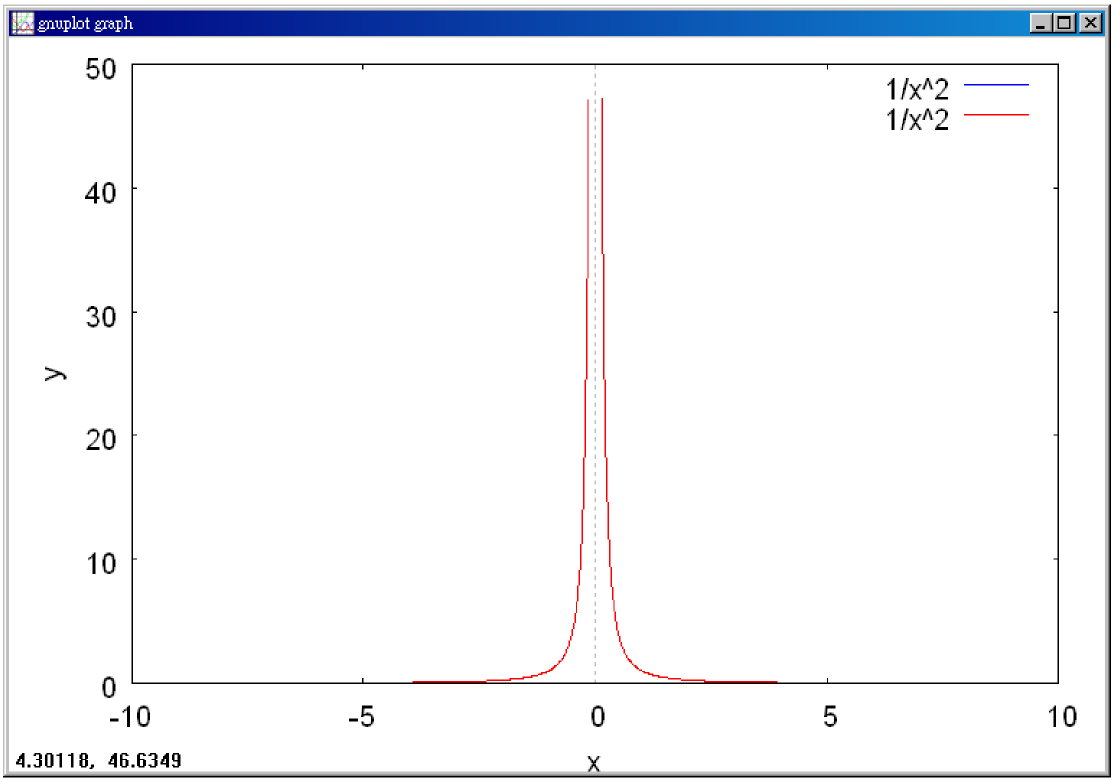
options：指其它的繪圖選項，如線的顏色，圖形背景色，線的大小，線型‧‧‧‧等等。

//此題並不能畫出圖形，Maxima 顯示在 0 的時候會出現問題

```
Division by 0
#0: f(x=0.0)
 -- an error.  To debug this try debugmode(true);
```

(%i1) plot2d([1/x^2,1/x^2], [x, -10,10], [y,0,50])$ 多個函數繪圖指令：plot2d([第一個函數，…第 n 個函數]，[x 軸的範圍]，[y 軸的範圍]) //由於在 0 時會出錯，於是我們將同一個函數看成不同的函數，畫出圖形

```
plot2d: expression evaluates to non-numeric value somewhere in plot
plot2d: expression evaluates to non-numeric value somewhere in plot
```



(%i3) f:1/x^2; //建立一方程式 $\frac{1}{x^2}$ ，方程式名稱叫做 f

(%o3) $\frac{1}{x^2}$

(%i4) limit(f,x,0); 極限指令：limit(方程式，極限變數，範圍) //此例 f 爲前所

定義之方程式$\frac{1}{x^2}$，極限變數爲 x，範圍爲 x 趨近於 0

(%o4) ∞

(%i5) 'limit(f,x,0); 有時我們會希望呈現未運算前的格式，在 maxima，我們只需要在方程式前面加上「 ' 」，maxima 就不會運算該程式

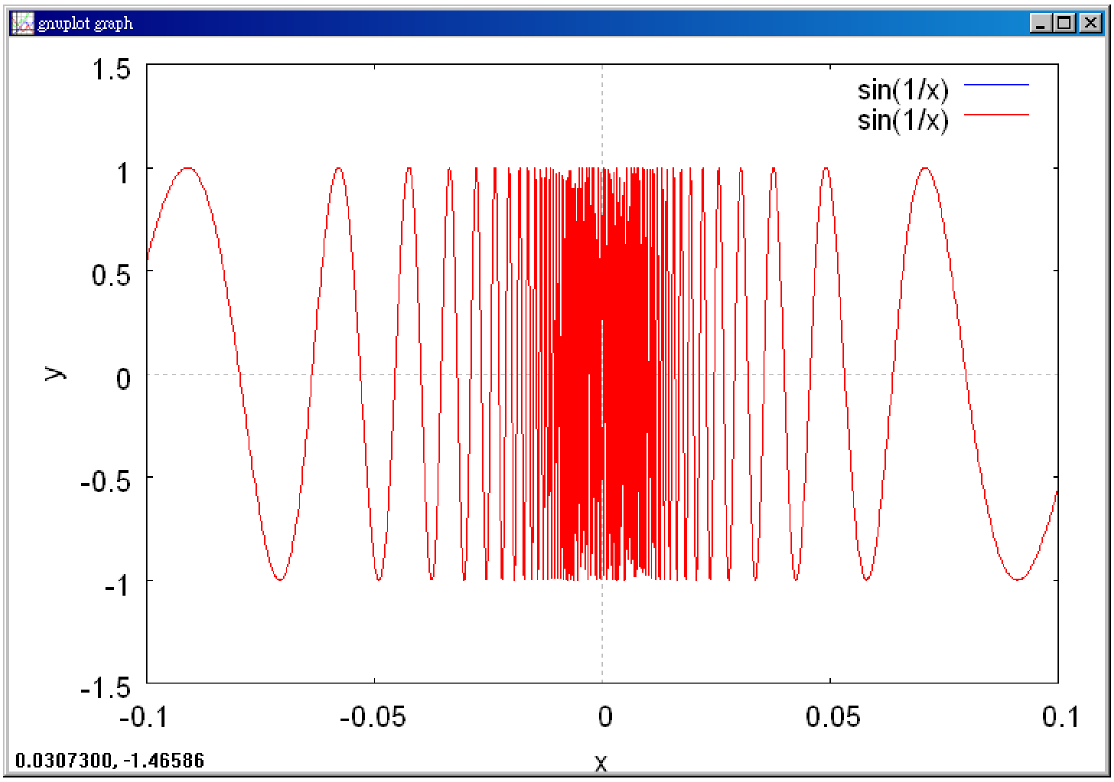
(%o5) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$

Let $f(x)=1/x^2$. In Figure 1.9, you can see that as x approaches 0 from either the right or the left, $f(x)$ increases without bound. This means that by choosing x close enough to 0, you can force $f(x)$ to be as large as you want. For instance, $f(x)$ will be large than 100 if you choose x that is within $\frac{1}{10}$ of 0. That is, $0<|x|<\frac{1}{10} \Rightarrow f(x)=\frac{1}{x^2}>100$. Similarly, you can force $f(x)$ to be than 1000000, as follows. $0<|x|<\frac{1}{1000} \Rightarrow f(x)=\frac{1}{x^2}>1000000$. Because $f(x)$ is not approaching a real number L as x approaches 0, you can conclude that the limit does not exist.

Example 5. Oscillating Behavior

Discuss the existence of the limit $\lim_{x \to 0} \sin\frac{1}{x}$.

Solution：(%i1) plot2d([sin(1/x),sin(1/x)], [x, -0.1,0.1], [y,-1.5,1.5])$ 多個函數繪圖指令：plot2d([第一個函數，…第 n 個函數]，[x 軸的範圍]，[y 軸的範圍]) //由於在 0 時會出錯，於是我們將同一個函數看成不同的函數，畫出圖形



(%i2) f(x):=sin(1/x);　//定義一函數 $\sin\frac{1}{x}$ ，函數名稱叫做 f(x)

$$(\%o2)\quad f(x):=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

(%i3) plot2d([f],[x,-2,2]);　繪圖指令解說：plot2d([expr，x_range，options])， plot2d 是 Maxima 的繪圖指令，maxima 執行到這時，會去呼叫 gunplot 來繪製圖形。

expr：是你要繪製的函數，這例是 $\sin\frac{1}{x}$ 函數圖形

x_range：是 x 軸的顯示範圍，當然可以指定 x 軸的顯示範圍，我們也可以指定 y 軸的顯示範圍，如果不指定 y 軸，系統也會自動設定適當的大小，不過一定要指定 x 軸，另外函數中的變數要與範圍指定的變數相同，例如函數爲 $\sin\frac{1}{g}$,那麼指定範圍時就是[g, -1, 1]。

options：指其它的繪圖選項，如線的顏色，圖形背景色，線的大小，線型‥‥等等。

//此題並不能畫出圖形，Maxima 顯示在 0 的時候會出現問題

```
Division by 0
#0: f(x=0.0)
 -- an error.  To debug this try debugmode(true);
```

(%i4) f:sin(1/x);　//建立一方程式 $\sin\frac{1}{x}$ ，方程式名稱叫做 f

(%o4) $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

(%i5) limit(f,x,0);　$\boxed{\text{極限指令：limit(方程式，極限變數，範圍)}}$　//此例 f 為前所定義之方程式 $\sin\frac{1}{x}$ ，極限變數為 x，範圍為 x 趨近於 0

(%o5) ind

(%i6) 'limit(f,x,0);　$\boxed{\text{有時我們會希望呈現未運算前的格式，在 maxima，我們只需要在方程式前面加上「 ' 」，maxima 就不會運算該程式}}$

(%o6) $\lim\limits_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Let $f(x)=\sin(1/x)$. In Figure 1.10, you can see that as x approaches 0, $f(x)$ oscillates between -1and 1. So, the limit does not exist because no matter how small you choose δ, it is possible to choose x_1 and x_2 within δ units of 0 such that $\sin(1/x_1)=1$ and $\sin(1/x_2)=-1$, as shown in the table.

x	$2/\pi$	$2/3\pi$	$2/5\pi$	$2/7\pi$	$2/9\pi$	$2/11\pi$	$x\to 0$
$\sin(1/x)$	1	-1	1	-1	1	-1	Limit does not exist.

Example 6.　Finding a δ for a Given ε

Given the limit $\lim\limits_{x\to 3}(2x-5)=1$ find δ such that $|(2x-5)-1|<0.01$ where

$0<|x-3|<\delta$.

Solution：(%i1) f:2*x-5;　//定義一函數 2x-5，函數名稱叫做 f

(%o1) 2 x - 5

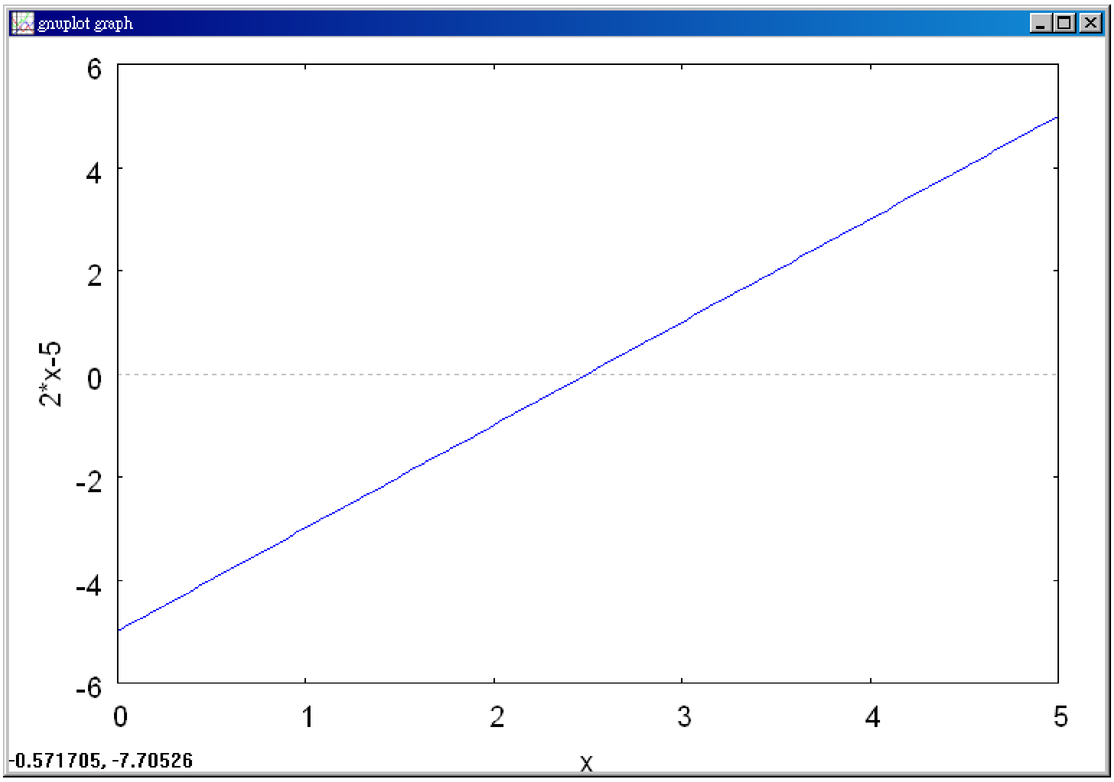
(%i2) plot2d([f],[x,0,5]);　繪圖指令解說：plot2d([expr，x_range，options])，　plot2d 是 Maxima 的繪圖指令，maxima 執行到這時，會去呼叫 gunplot 來繪製圖形。

expr：是你要繪製的函數，這例是 2x-5 函數圖形

x_range：是 x 軸的顯示範圍，當然可以指定 x 軸的顯示範圍，我們也可以指定 y 軸的顯示範圍，如果不指定 y 軸，系統也會自動設定適當的大小，不過一定要指定 x 軸，另外函數中的變數要與範圍指定的變數相同，例如函數爲 2g-5,那麼指定範圍時就是[g, 0, 5]。

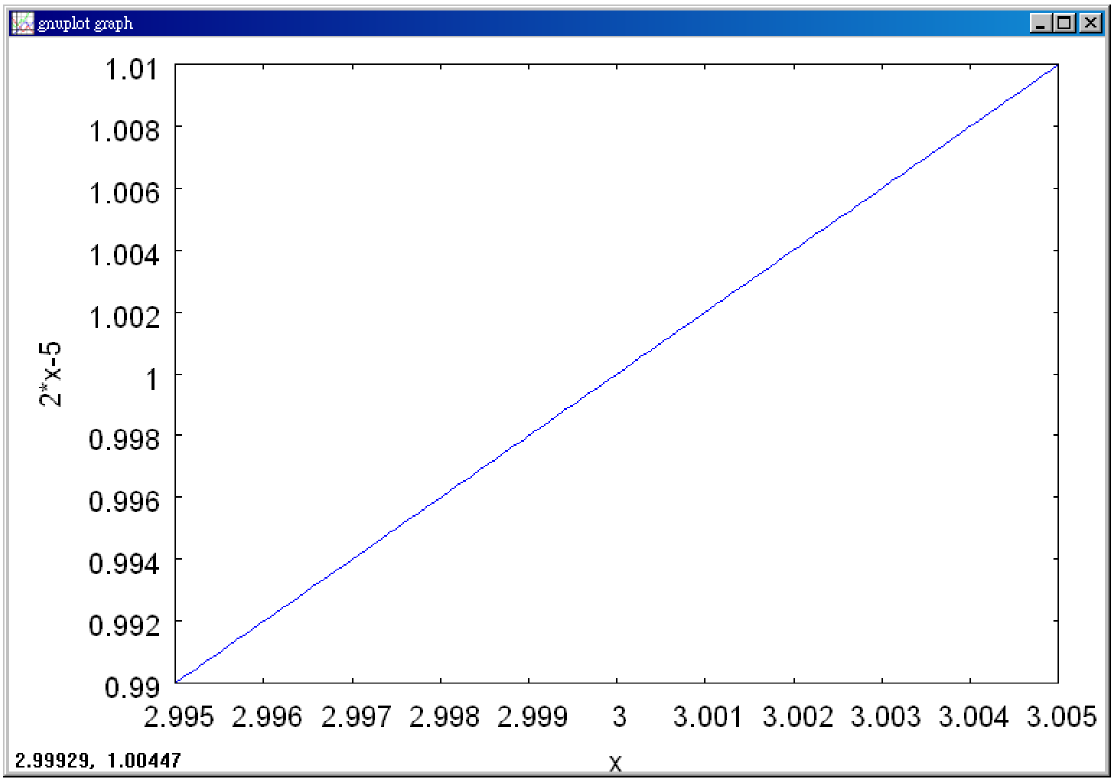
options：指其它的繪圖選項，如線的顏色，圖形背景色，線的大小，線型‥‥等等。

(%o2)



(%i3) plot2d([f],[x,2.995,3.005]);　//如上圖，只是我們把 x 軸的範圍縮小了，縮至 2.995~3.005，因爲取 $\varepsilon=0.01$ 則 $\delta=1/2(0.01)=0.005$

(%o3)



(%i4) f:2*x-5; //建立一方程式 2x-5，方程式名稱叫做 f

(%o4) 2 x - 5

(%i5) limit(f,x,3); 極限指令：limit(方程式，極限變數，範圍) //此例 f 爲前所定義之方程式 2x-5，極限變數爲 x，範圍爲 x 趨近於 3

(%o5) 1

(%i6) 'limit(f,x,3); 有時我們會希望呈現未運算前的格式，在 maxima，我們只需要在方程式前面加上「 ' 」，maxima 就不會運算該程式

(%o6) $\lim\limits_{x \to 3} 2x - 5$

In this problem, you are working with a given value of ε —namely, $\varepsilon = 0.01$. To find an appropriate δ, notice that $|(2x-5)-1| = |2x-6| = 2|x-3|.$ Because the inequality $|(2x-5)-1| < 0.01$ is equivalent to $2|x-3| < 0.01$, you can choose

$\delta = \frac{1}{2}(0.01) = 0.005.$ This choice works because $0 < |x-3| < 0.005$ implies that

$|(2x-5)-1| = 2|x-3| < 2(0.005) = 0.01$ as shown in Figure 1.13.

Example 7. Using the $\varepsilon - \delta$ Definition of Limit

Use the $\varepsilon - \delta$ definition of limit to prove that $\lim_{x \to 2}(3x-2) = 4.$

Solution：(%i1) f:3*x-2; //定義一函數 3x-2，函數名稱叫做 f

```
(%o1) 3 x - 2
```

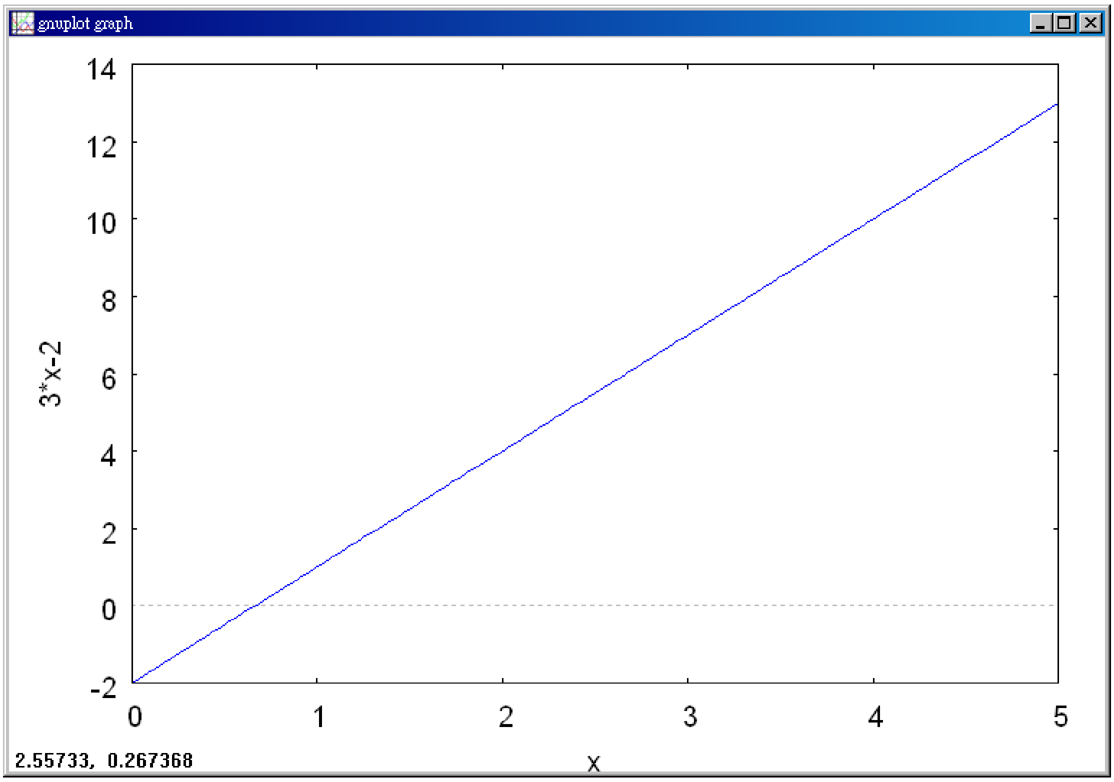
(%i2) plot2d([f],[x,0,5]); 繪圖指令解說：plot2d([expr，x_range，options])， plot2d 是 Maxima 的繪圖指令，maxima 執行到這時，會去呼叫 gunplot 來繪製圖形。

expr：是你要繪製的函數，這例是 3x-2 函數圖形

x_range：是 x 軸的顯示範圍，當然可以指定 x 軸的顯示範圍，我們也可以指定 y 軸的顯示範圍，如果不指定 y 軸，系統也會自動設定適當的大小，不過一定要指定 x 軸，另外函數中的變數要與範圍指定的變數相同，例如函數爲 3g-2,那麼指定範圍時就是[g, 0, 5]。

options：指其它的繪圖選項，如線的顏色，圖形背景色，線的大小，線型‧‧‧‧等等。

```
(%o2)
```



(%i3) f:3*x-2; //建立一方程式 3x-2，方程式名稱叫做 f

(%o3) 3 x - 2

(%i4) limit(f,x,2); 極限指令：limit(方程式，極限變數，範圍) //此例 f 為前所定義之方程式 3x-2，極限變數為 x，範圍為 x 趨近於 2

(%o4) 4

(%i5) 'limit(f,x,2); 有時我們會希望呈現未運算前的格式，在 maxima，我們只需要在方程式前面加上「 ' 」，maxima 就不會運算該程式

(%o5) $\lim\limits_{x \to 2} 3x - 2$

You must show that for each $\varepsilon > 0$, there exists a $\delta > 0$ such that $|(3x-2)-4| < \varepsilon$ whenever $0 < |x-2| < \delta$. Because your choice of δ depends on ε, you need to establish a connection between the absolute values $|(3x-2)-4|$ and $|x-2|$.

$|(3x-2)-4| = |3x-6| = 3|x-2|$ So, for a given $\varepsilon > 0$ you can choose $\delta = \varepsilon / 3$. This choice works because $0 < |x-2| < \delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$ implies that $|(3x-2)-4| = 3|x-2| < 3(\dfrac{\varepsilon}{3}) = \varepsilon$ as shown in Figure 1.14.

Example 8. Using the $\varepsilon - \delta$ Definition of Limit

Use the $\varepsilon - \delta$ definition of the limit to prove that $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$.

Solution：(%i1) f:x^2; //定義一函數 x^2 ，函數名稱叫做 f

(%o1) x^2

(%i2) plot2d([f],[x,-5,5]);

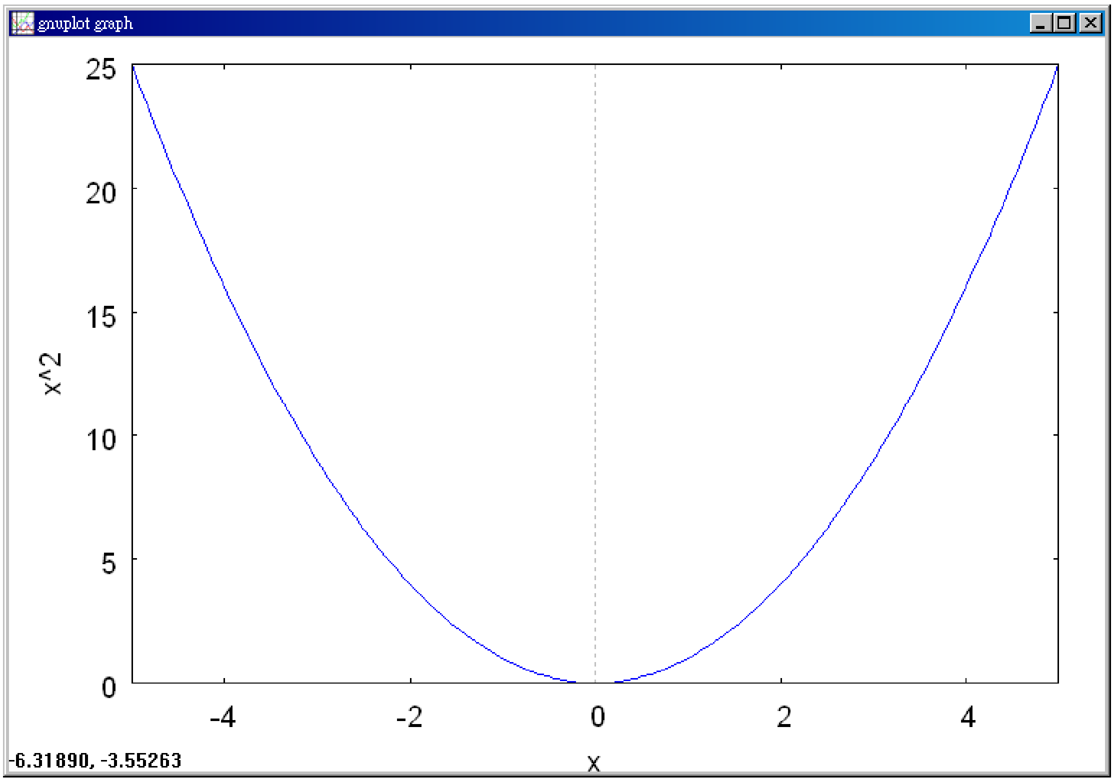
繪圖指令解說：plot2d([expr，x_range，options])， plot2d 是 Maxima 的繪圖指令，maxima 執行到這時，會去呼叫 gunplot 來繪製圖形。

expr：是你要繪製的函數，這例是 x^2 函數圖形

x_range：是 x 軸的顯示範圍，當然可以指定 x 軸的顯示範圍，我們也可以指定 y 軸的顯示範圍，如果不指定 y 軸，系統也會自動設定適當的大小，不過一定要指定 x 軸，另外函數中的變數要與範圍指定的變數相同，例如函數為 g^2 ,那麼指定範圍時就是[g, -5, 5]。

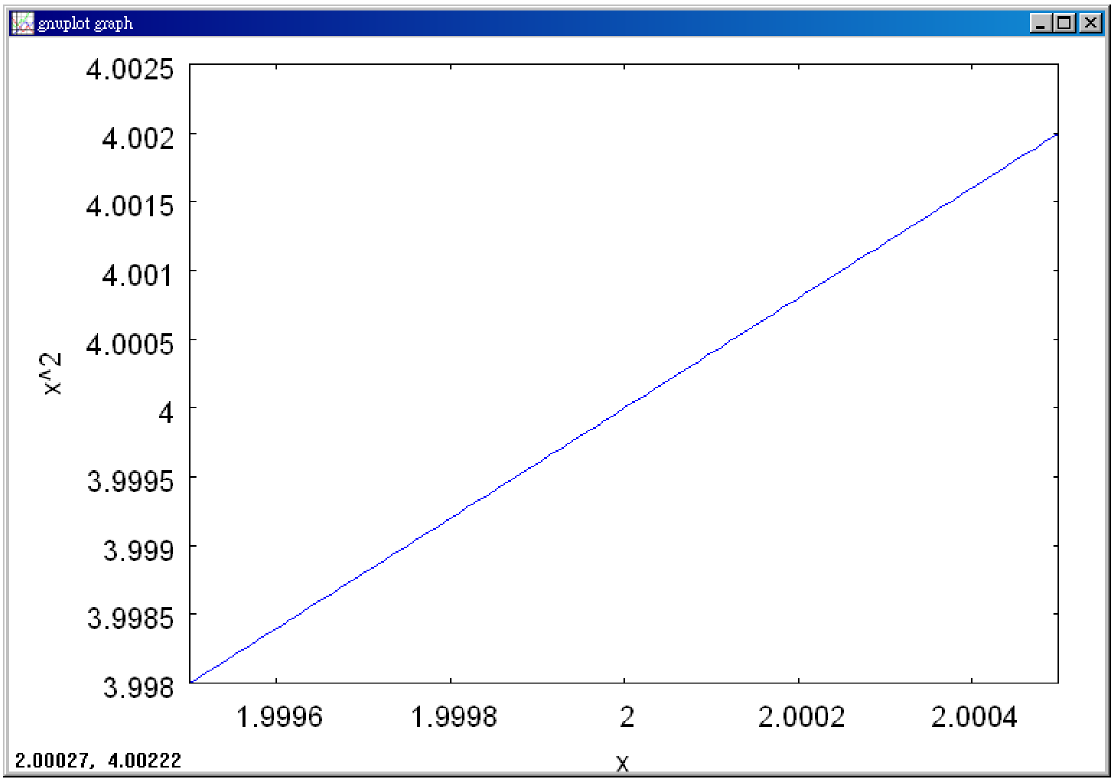
options：指其它的繪圖選項，如線的顏色，圖形背景色，線的大小，線型‧‧‧‧等等。

(%o2)



(%i3) plot2d([f],[x,1.9995,2.0005]);　//如上圖，只是我們把 x 軸的範圍縮小了，縮至 1.9995~2.0005，因爲取ε=0.001 則δ=1/2(0.001)=0.0005

(%o3)



(%i4) f:x^2;　//建立一方程式 x^2，方程式名稱叫做 f

(%o4)　x^2

(%i5) limit(f,x,2);　$\boxed{\text{極限指令：limit(方程式，極限變數，範圍)}}$　//此例 f 為前所定義之方程式 x^2，極限變數為 x，範圍為 x 趨近於 2

(%o5)　4

(%i6) 'limit(f,x,2);　$\boxed{\text{有時我們會希望呈現未運算前的格式，在 maxima，我們只需要在方程式前面加上「 ' 」，maxima 就不會運算該程式}}$

(%o6)　$\lim_{x \to 2} x^2$

You must show that for each $\varepsilon > 0$, there exists a $\delta > 0$ such that $|x^2 - 4| < \varepsilon$ whenever $0 < |x-2| < \delta$. To find an appropriate δ, begin by writing $|x^2 - 4| = |x-2||x+2|$. Find all x in the interval (1, 3), you know that $|x+2| < 5$. So, letting δ be the minimum of $\varepsilon/5$ and 1, it follows that, whenever $0<|x-2|<\delta$, you have $|x^2-4|=|x-2||x+2|<(\frac{\varepsilon}{5})(5)=\varepsilon$ as shown in Figure 1.15.

1.2 Evaluating Limits Analytically

Example 1. Evaluating Basic Limits

a. $\lim_{x\to 2} 3 = 3$

b. $\lim_{x\to -4} x = -4$

c. $\lim_{x\to 2} x^2 = 2^2 = 4$

Solution：

a. (%i1) f:3; //建立一方程式 3，方程式名稱叫做 f

(%o1) 3

(%i2) limit(f,x,2); 極限指令：limit(方程式，極限變數，範圍) //此例 f 為前所定義之方程式 3，極限變數為 x，範圍為 x 趨近於 2

(%o2) 3

(%i3) 'limit(f,x,2); 有時我們會希望呈現未運算前的格式，在 maxima，我們只需要在方程式前面加上「 ' 」，maxima 就不會運算該程式

(%o3) 3

b. (%i1) f:x; //建立一方程式 x，方程式名稱叫做 f

(%o1) x

(%i2) limit(f,x,-4); 極限指令：limit(方程式，極限變數，範圍) //此例 f 為前所定義之方程式 x，極限變數為 x，範圍為 x 趨近於-4

(%o2) - 4

(%i3) 'limit(f,x,-4); $\boxed{\text{有時我們會希望呈現未運算前的格式，在 maxima，我們只需要在方程式前面加上「 ' 」，maxima 就不會運算該程式}}$

(%o3) $\lim_{x \to -4} x$

c. (%i1) f:x^2; //建立一方程式 x^2 ，方程式名稱叫做 f

(%o1) x^2

(%i2) limit(f,x,2); $\boxed{\text{極限指令：limit(方程式，極限變數，範圍)}}$ //此例 f 爲前所定義之方程式 x^2 ，極限變數爲 x，範圍爲 x 趨近於 2

(%o2) 4

(%i3) 'limit(f,x,2); $\boxed{\text{有時我們會希望呈現未運算前的格式，在 maxima，我們只需要在方程式前面加上「 ' 」，maxima 就不會運算該程式}}$

(%o3) $\lim_{x \to 2} x^2$

Exmaple 2. The Limit of a Polynomial

$$\lim_{x\to 2}(4x^2+3)$$

Solution：

(%i1) f:4*x^2+3; //建立一方程式 $4x^2+3$ ，方程式名稱叫做 f

(%o1) $4x^2+3$

(%i2) limit(f,x,2); $\boxed{\text{極限指令：limit(方程式，極限變數，範圍)}}$ //此例 f 爲前所定義之方程式 $4x^2+3$ ，極限變數爲 x，範圍爲 x 趨近於 2

(%o2) 19

(%i3) 'limit(f,x,2); 有時我們會希望呈現未運算前的格式，在 maxima，我們只需要在方程式前面加上「 ' 」，maxima 就不會運算該程式

(%o3) $\lim_{x \to 2} 4x^2 + 3$

$$\lim_{x\to 2}(4x^2+3) = \lim_{x\to 2} 4x^2 + \lim_{x\to 2} 3 \quad \text{Property 2}$$

$$= 4\left(\lim_{x\to 2} x^2\right) + \lim_{x\to 2} 3 \quad \text{Property 1}$$

$$= 4(2^2) + 3 \quad \text{Example 1}$$

$$= 19 \quad \text{Simplify.}$$

Example 3. The Limit of a Rational Function

Find the limit： $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x+2}{x+1}$.

Solution：

(%i1) f:(x^2+x+2)/(x+1); //建立一方程式 $\frac{x^2+x+2}{x+1}$ ，方程式名稱叫做 f

(%o1) $\frac{x^2+x+2}{x+1}$

(%i2) limit(f,x,1); 極限指令：limit(方程式，極限變數，範圍) //此例 f 為前所定義之方程式 $\frac{x^2+x+2}{x+1}$ ，極限變數為 x，範圍為 x 趨近於 1

(%o2) 2

(%i3) 'limit(f,x,1); 有時我們會希望呈現未運算前的格式，在 maxima，我們只需要在方程式前面加上「 ' 」，maxima 就不會運算該程式

(%o3) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + x + 2}{x + 1}$

Because the denominator is not 0 when $x = 1$, you can apply Theorem 1.3 to obtain $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + x + 2}{x + 1} = \dfrac{1^2 + 1 + 2}{1 + 1} = \dfrac{4}{2} = 2.$

Example 4. The Limit of a Composite Function

a. Because $\lim\limits_{x \to 0}(x^2 + 4) = 0^2 + 4 = 4$ and $\lim\limits_{x \to 4} \sqrt{x} = 2$ it follows that $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x^2 + 4} = \sqrt{4} = 2.$

b. Because $\lim\limits_{x \to 3}(2x^2 - 10) = 2(3^2) - 10 = 8$ and $\lim\limits_{x \to 8} \sqrt[3]{x} = 2$ it follows that $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt[3]{2x^2 - 10} = \sqrt[3]{8} = 2.$

Solution：

a. (%i1) f:sqrt(x^2+4); //建立一方程式 $x^2 + 4$，方程式名稱叫做 f

(%o1) $\sqrt{x^2 + 4}$

(%i2) limit(f,x,0); 極限指令：limit(方程式，極限變數，範圍) //此例 f 爲前所定義之方程式 $x^2 + 4$，極限變數爲 x，範圍爲 x 趨近於 0

(%o2) 2

(%i3) 'limit(f,x,0); 有時我們會希望呈現未運算前的格式，在 maxima，我們只需要在方程式前面加上「 ' 」，maxima 就不會運算該程式

(%o3) $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x^2 + 4}$

b. (%i1) f:(2*x^2-10)^(1/3);　//建立一方程式$\sqrt[3]{2x^2-10}$，方程式名稱叫做 f

(%o1) $(2x^2-10)^{1/3}$

(%i2) limit(f,x,3);　$\boxed{\text{極限指令：limit(方程式，極限變數，範圍)}}$　//此例 f 爲前所定義之方程式$\sqrt[3]{2x^2-10}$，極限變數爲 x，範圍爲 x 趨近於 3

(%o2) 2

(%i3) 'limit(f,x,3);　$\boxed{\text{有時我們會希望呈現未運算前的格式，在 maxima，我們只需要在方程式前面加上「 ' 」，maxima 就不會運算該程式}}$

(%o3) $\lim\limits_{x \to 3} (2x^2-10)^{1/3}$

Example 5.　Limits of Trigonometric Functions

a. $\lim\limits_{x \to 0} \tan x = \tan(0) = 0$

b. $\lim\limits_{x \to \pi}(x\cos x) = (\lim\limits_{x \to \pi} x)(\lim\limits_{x \to \pi}\cos x) = \pi\cos(\pi) = -\pi$

c. $\lim\limits_{x \to 0}\sin^2 x = \lim\limits_{x \to 0}(\sin)^2 = 0^2 = 0$

Solution：

a. (%i1) f:tan(x);　//建立一方程式 tan(x)，方程式名稱叫做 f

(%o1) tan(x)

(%i2) limit(f,x,0);　$\boxed{\text{極限指令：limit(方程式，極限變數，範圍)}}$　//此例 f 爲前所定義之方程式 tan(x)，極限變數爲 x，範圍爲 x 趨近於 0

(%o2) 0

(%i3) 'limit(f,x,0); 有時我們會希望呈現未運算前的格式，在 maxima，我們只需要在方程式前面加上「 ' 」，maxima 就不會運算該程式

$$(\%o3)\quad \lim_{x \to 0} \tan(x)$$

b. (%i1) f:x*cos(x); //建立一方程式 xcos(x)，方程式名稱叫做 f

$$(\%o1)\quad x\cos(x)$$

(%i2) limit(f,x,%pi); 極限指令：limit(方程式，極限變數，範圍) //此例 f 爲前所定義之方程式 xcos(x)，極限變數爲 x，範圍爲 x 趨近於 π ，π 指令表示方式爲 %pi

$$(\%o2)\quad -\%pi$$

(%i3) 'limit(f,x,%pi); 有時我們會希望呈現未運算前的格式，在 maxima，我們只需要在方程式前面加上「 ' 」，maxima 就不會運算該程式

$$(\%o3)\quad \lim_{x \to \%pi} x\cos(x)$$

c. (%i1) f:(sin(x))^2; //建立一方程式 $\sin^2(x)$，方程式名稱叫做 f

$$(\%o1)\quad \sin(x)^2$$

(%i2) limit(f,x,0); 極限指令：limit(方程式，極限變數，範圍) //此例 f 爲前所定義之方程式 $\sin^2(x)$，極限變數爲 x，範圍爲 x 趨近於 0

$$(\%o2)\quad 0$$

(%i3) 'limit(f,x,0); 有時我們會希望呈現未運算前的格式，在 maxima，我們只需要在方程式前面加上「 ' 」，maxima 就不會運算該程式

$$(\%o3)\quad \lim_{x \to 0} \sin(x)^2$$

Example 6. Finding the Limit of a Function

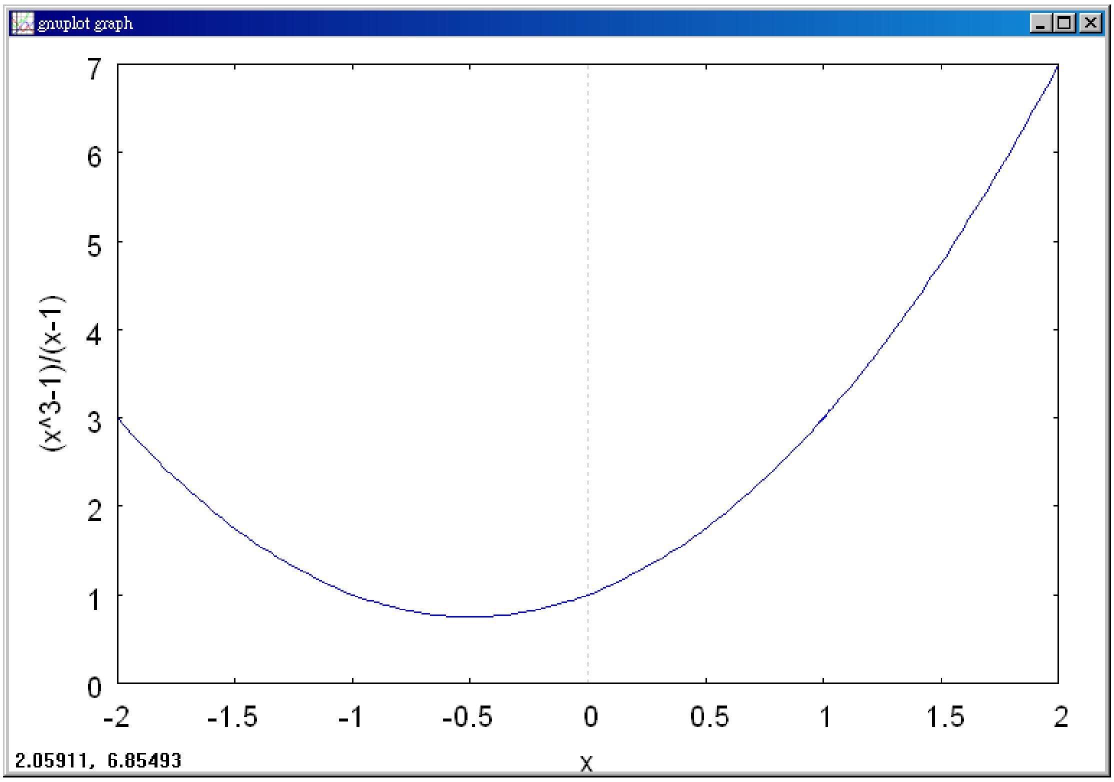
Find the limit： $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$.

Solution：(%i1) plot2d([((x^3-1)/(x-1))],[x,-2,2]); 繪圖指令解說：plot2d([expr，x_range，options])， plot2d 是 Maxima 的繪圖指令，maxima 執行到這時，會去呼叫 gunplot 來繪製圖形。

expr：是你要繪製的函數，這例是 $\dfrac{x^3-1}{x-1}$ 函數圖形

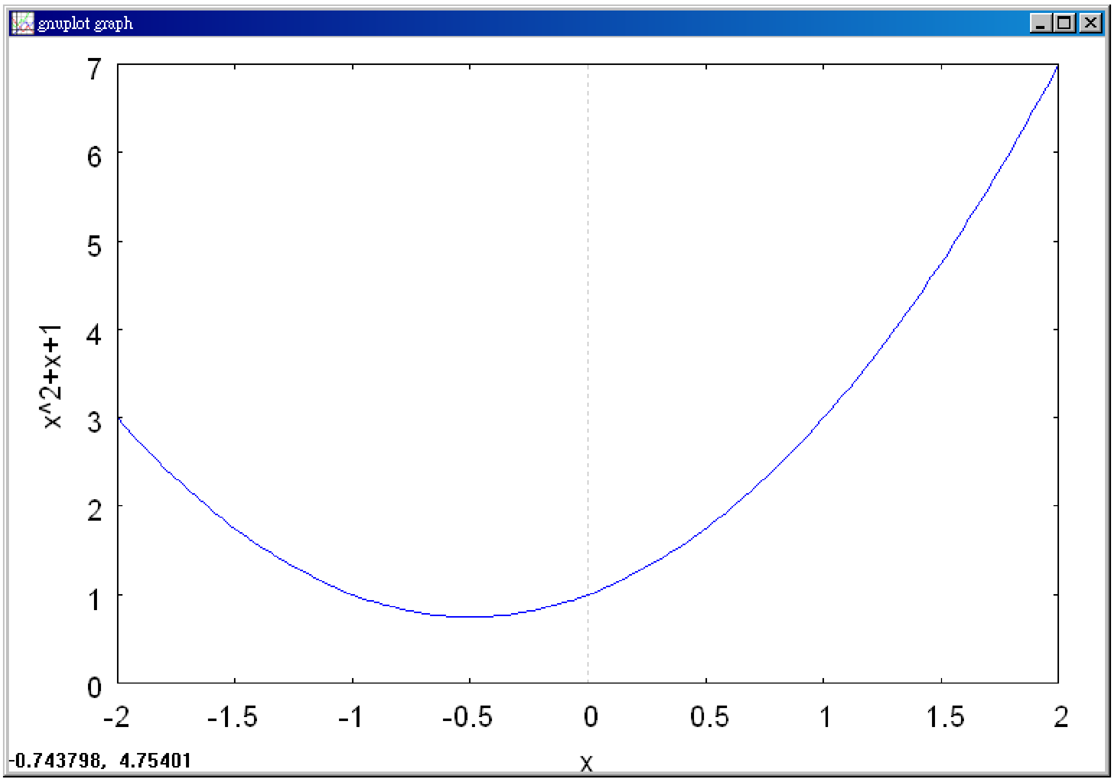
x_range：是 x 軸的顯示範圍，當然可以指定 x 軸的顯示範圍，我們也可以指定 y 軸的顯示範圍，如果不指定 y 軸，系統也會自動設定適當的大小，不過一定要指定 x 軸，另外函數中的變數要與範圍指定的變數相同，例如函數爲 $\dfrac{g^{3-1}}{g-1}$,那麼指定範圍時就是[g, -2, 2]。
options：指其它的繪圖選項，如線的顏色，圖形背景色，線的大小，線型‧‧‧‧等等。

(%o1)



(%i2) plot2d([x^2+x+1],[x,-2,2]); //畫出 x^2+x+1 的圖形來比較上圖

(%o2)



(%i3) f:(x^3-1)/(x-1);　//建立一方程式$\dfrac{x^3-1}{x-1}$，方程式名稱叫做 f

(%o3) $\dfrac{x^3-1}{x-1}$

(%i4) limit(f,x,1);　$\boxed{\text{極限指令：limit(方程式，極限變數，範圍)}}$　//此例 f 為前所定義之方程式$\dfrac{x^3-1}{x-1}$，極限變數為 x，範圍為 x 趨近於 1

(%o4) 3

(%i5) 'limit(f,x,1);　$\boxed{\text{有時我們會希望呈現未運算前的格式，在 maxima，我們只需要在方程式前面加上「 ' 」，maxima 就不會運算該程式}}$

(%o5) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3-1}{x-1}$

Let $f(x)=(x^3-1)/(x-1)$. By factoring and dividing out like factors, you can rewrite f as $f(x)=\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=x^2+x+1=g(x), \quad x\neq 1.$

So, for all x-values other than $x=1$, the functions f and g agree, as shown in Figure 1.17. Because $\lim_{x\to 1} g(x)$ exists, you can apply Theorem 1.7 to conclude that f and g have the same limit at $x=1$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} \qquad \text{Factor.}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{\cancel{(x-1)}} \qquad \text{Divide out like factors.}$$

$$=\lim_{x\to 1}(x^2+x+1) \qquad \text{Apply Theorem 1.7}$$

. $$=1^2+1+1 \qquad \text{Use direct substitution.}$$

$$=3 \qquad \text{Simplify.}$$

Example 7. Dividing Out Technique

Find the limit：$\lim_{x\to -3}\dfrac{x^2+x-6}{x+3}$.

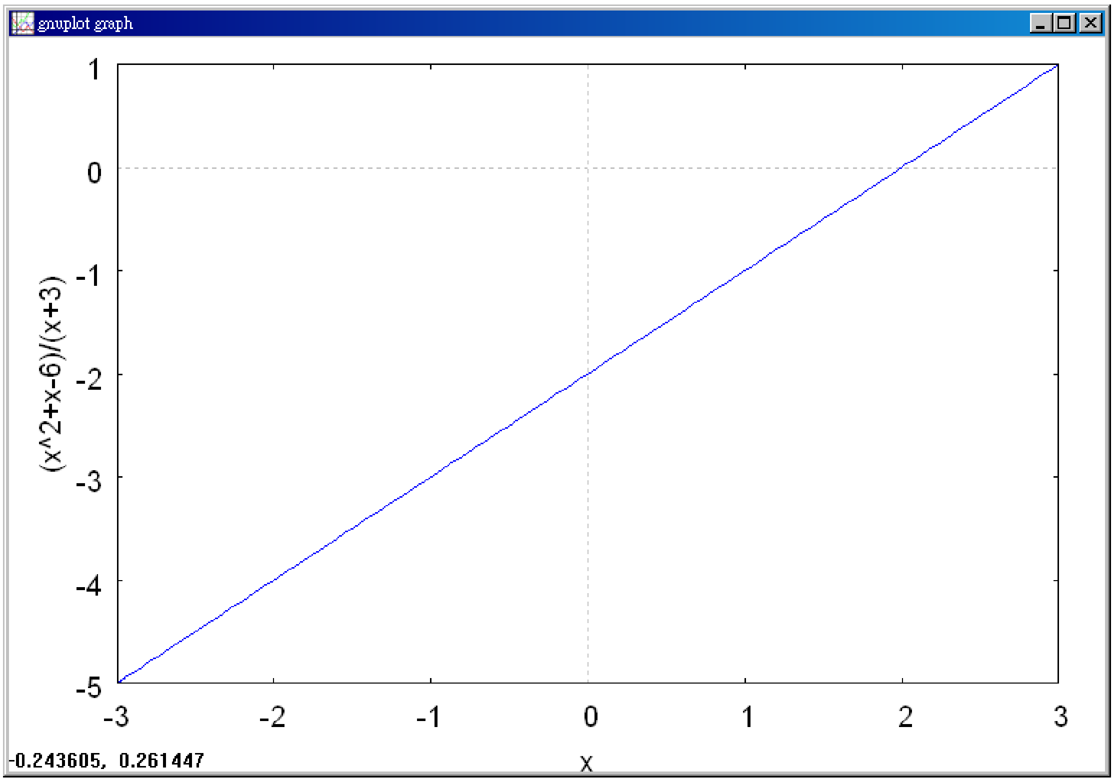
Solution：(%i1) plot2d([(x^2+x-6)/(x+3)],[x,-3,3]); 繪圖指令解說：plot2d([expr，x_range，options])， plot2d 是 Maxima 的繪圖指令，maxima 執行到這時，會去呼叫 gunplot 來繪製圖形。

expr：是你要繪製的函數，這例是$\dfrac{x^2+x-6}{x+3}$函數圖形

x_range：是 x 軸的顯示範圍，當然可以指定 x 軸的顯示範圍，我們也可以指定 y 軸的顯示範圍，如果不指定 y 軸，系統也會自動設定適當的大小，不過一定要指定 x 軸，另外函數中的變數要與範圍指定的變數相同，例如函數為$\dfrac{g^2+g-6}{g+3}$，那麼指定範圍時就是[g, -3, 3]。

options：指其它的繪圖選項，如線的顏色，圖形背景色，線的大小，線型‧‧‧‧等等。

(%o1)



(%i2) f:(x^2+x-6)/(x+3);　//建立一方程式 $\frac{x^2+x-6}{x+3}$，方程式名稱叫做 f

(%o2) $\frac{x^2+x-6}{x+3}$

(%i3) limit(f,x,-3);　極限指令：limit(方程式，極限變數，範圍)　//此例 f 爲前所定義之方程式 $\frac{x^2+x-6}{x+3}$，極限變數爲 x，範圍爲 x 趨近於-3

(%o3) -5

(%i4) 'limit(f,x,-3); 有時我們會希望呈現未運算前的格式，在 maxima，我們只需要在方程式前面加上「 ' 」，maxima 就不會運算該程式

$$\text{(\%o4)} \quad \lim_{x \to -3} \frac{x^2 + x - 6}{x + 3}$$

Although you are taking the limit of a rational function, you cannot apply Theorem 1.3 because the limit of the denominator is 0.

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2+x-6}{x+3} \rightarrow \lim_{x\to -3}(x^2+x-6)=0$$

Direct substitution fails.

$$\rightarrow \lim_{x\to -3}(x+3)=0$$

Because the limit of the numerator is also 0, the numerator and denominator have a common factor of $(x+3)$. So, for all $x \neq -3$, you can divide out this factor to obtain $f(x)=\frac{x^2+x-6}{x+3}=\frac{(x+3)(x-2)}{x+3}=x-2=g(x), \quad x\neq -3.$ Using Theorem 1.7, it follows that $\lim_{x\to -3}\frac{x^2+x-6}{x+3}=\lim_{x\to -3}(x-2)$ Apply Theorem 1.7.

=-5 Use direct substitution.

This result is shown graphically in Figure 1.18. Note that the graph of the function f coincides with the graph of the function $g(x)=x-2,$ except that the graph of f has a gap at the point (-3, -5).

Example 8. Rationalizing Technique

Find the limit： $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$.

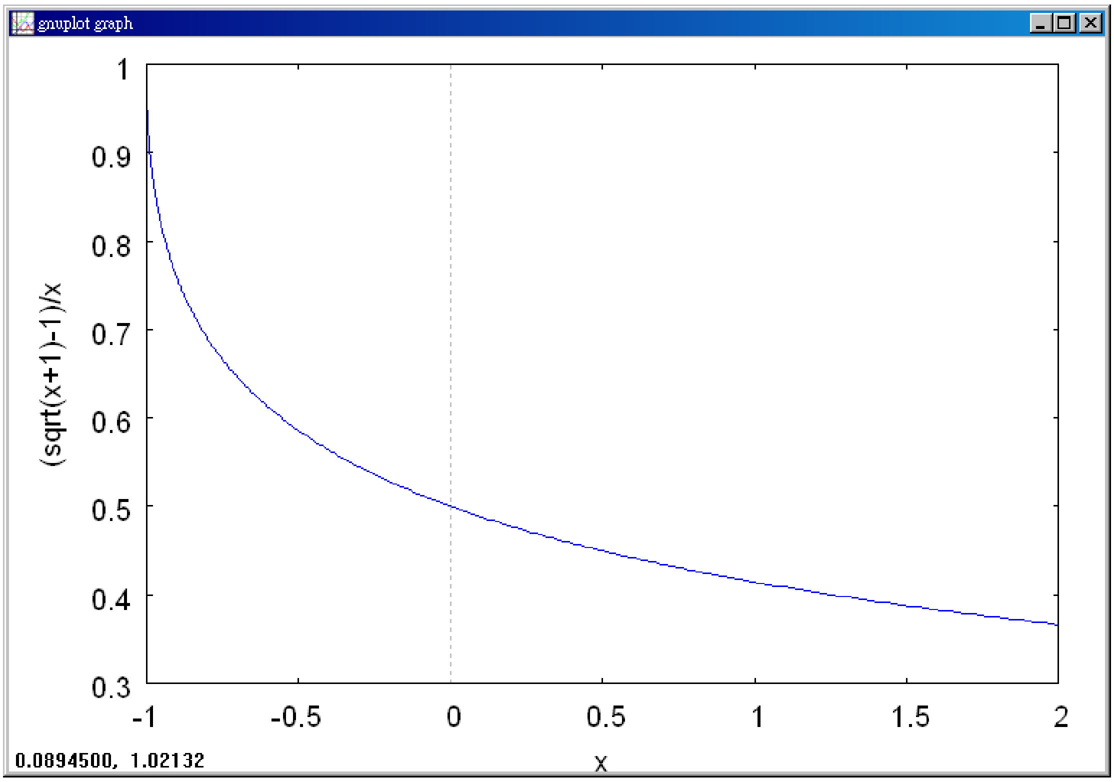
Solution：(%i1) plot2d([(sqrt(x+1)-1)/x],[x,-1,2]); 繪圖指令解說：plot2d([expr，x_range，options])， plot2d 是 Maxima 的繪圖指令，maxima 執行到這時，會去呼叫 gunplot 來繪製圖形。

expr：是你要繪製的函數，這例是 $\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ 函數圖形

x_range：是 x 軸的顯示範圍，當然可以指定 x 軸的顯示範圍，我們也可以指定 y 軸的顯示範圍，如果不指定 y 軸，系統也會自動設定適當的大小，不過一定要指定 x 軸，另外函數中的變數要與範圍指定的變數相同，例如函數為 $\dfrac{\sqrt{g+1}-1}{g}$,那麼指定範圍時就是[g, -1, 2]。

options：指其它的繪圖選項，如線的顏色，圖形背景色，線的大小，線型‧‧‧‧等等。

(%o1)



(%i2) f:(sqrt(x+1)-1)/x;　//建立一方程式 $\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$，方程式名稱叫做 f

(%o2) $\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

(%i3) limit(f,x,0);　$\boxed{\text{極限指令：limit(方程式，極限變數，範圍)}}$　//此例 f 爲前所定義之方程式 $\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$，極限變數爲 x，範圍爲 x 趨近於 0

(%o3) $\frac{1}{2}$

(%i4) 'limit(f,x,0);　$\boxed{\text{有時我們會希望呈現未運算前的格式，在 maxima，我們只需要在方程式前面加上「 ' 」，maxima 就不會運算該程式}}$

(%o4) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

By direct substitution, you obtain the indeterminate form 0/0.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \to \lim_{x\to 0}(\sqrt{x+1}-1)=0$$

Direct substitution fails.

$$\to \lim_{x\to 0} x = 0$$

In this case, you can rewrite the faction by rationalizing the numerator.

$$\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\left(\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\right)\left(\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}\right)$$

$$=\frac{(x+1)-1}{x(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$=\frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}, \quad x \neq 0$$

Now, using Theorem 1.7, you can evaluate the limit as shown.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

A table or a graph can reinforce your conclusion that the limit is $\frac{1}{2}$. (See Figure 1.20.)

x	-0.25	-0.1	-0.01	-0.001	0	0.001	0.01	0.1	0.25
$f(x)$	0.5359	0.5132	0.5013	0.5001	?	0.4999	0.4988	0.4881	0.4721

Example 9.　A Limit Involving a Trigonometric Function

Find the limit： $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}$.

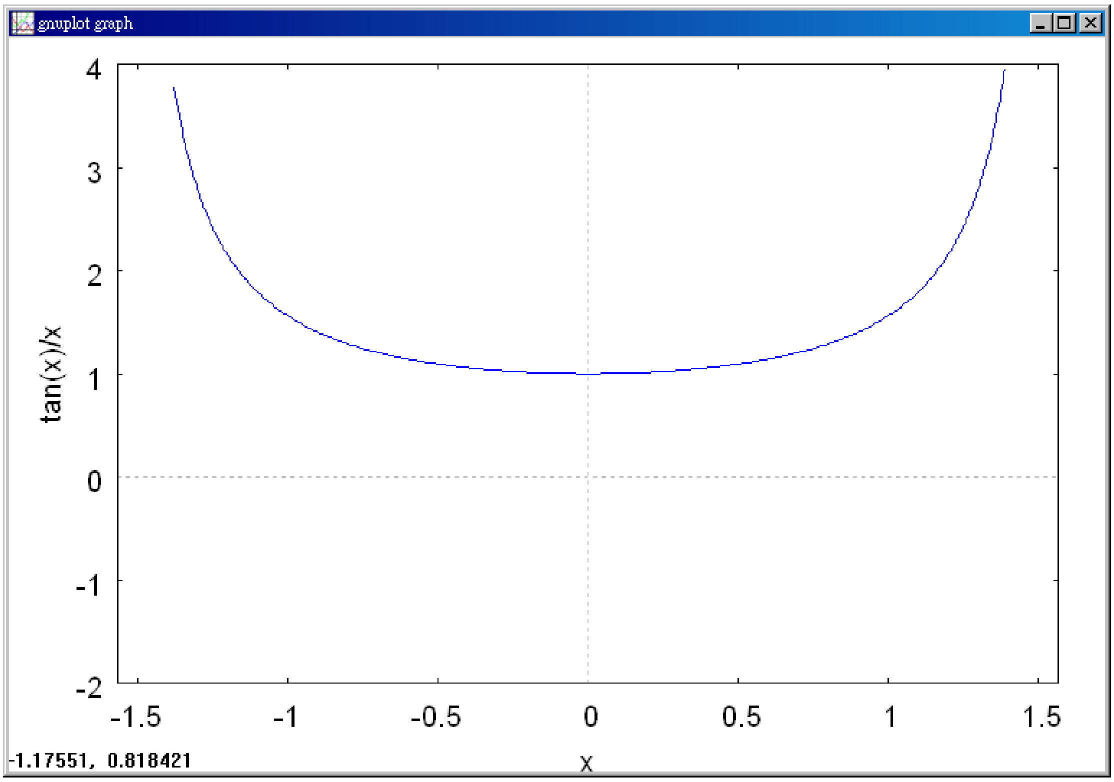
Solution：(%i1) plot2d([tan(x)/x],[x,-(%pi)/2,(%pi)/2],[y,-2,4]);　繪圖指令解說：plot2d([expr，x_range，options])，　plot2d 是 Maxima 的繪圖指令，maxima 執行到這時，會去呼叫 gunplot 來繪製圖形。

expr：是你要繪製的函數，這例是 $\frac{\tan x}{x}$ 函數圖形

x_range：是 x 軸的顯示範圍，當然可以指定 x 軸的顯示範圍，我們也可以指定 y 軸的顯示範圍，如果不指定 y 軸，系統也會自動設定適當的大小，不過一定要指定 x 軸，在這裡我們指令了 y 軸的範圍，爲-2~4，另外函數中的變數要與範圍指定的變數相同。

options：指其它的繪圖選項，如線的顏色，圖形背景色，線的大小，線型‧‧‧‧等等。

plot2d: expression evaluates to non-numeric value somewhere in plot
(%o1)



(%i2) f:tan(x)/x; //建立一方程式$\frac{\tan x}{x}$，方程式名稱叫做 f

(%o2) $\frac{\tan(x)}{x}$

(%i3) limit(f,x,0); 極限指令：limit(方程式，極限變數，範圍) //此例 f 爲前所定義之方程式$\frac{\tan x}{x}$，極限變數爲 x，範圍爲 x 趨近於 0

(%o3) 1

(%i4) 'limit(f,x,0); 有時我們會希望呈現未運算前的格式，在 maxima，我們只需要在方程式前面加上「 ' 」，maxima 就不會運算該程式

(%o4) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan(x)}{x}$

Direct substitution yields the indeterminate form 0/0. To solve this problem, you can write $\tan x$ as $(\sin x)/(\cos x)$ and obtain

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\left(\frac{1}{\cos x}\right).$$

Now, because

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad \text{and} \quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1$$

you can obtain

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\right)$$

= (1)(1)=1. (See Figure 1.23.)

Example 10. A Limit Involving a Trigonometric Function

Find the limit：$\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{x}$.

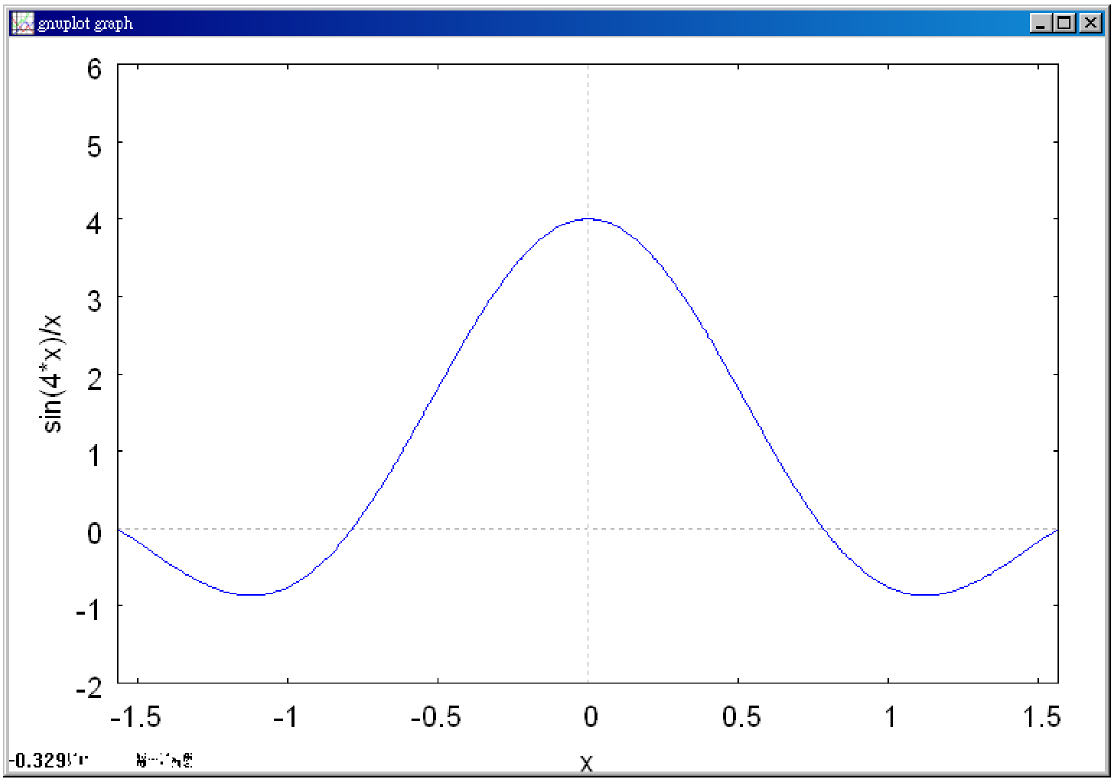
Solution：(%i1) plot2d([(sin(4*x)/x)],[x,-(%pi)/2,(%pi)/2],[y,-2,6]); 繪圖指令解說：plot2d([expr，x_range，options])， plot2d 是 Maxima 的繪圖指令，maxima 執行到這時，會去呼叫 gunplot 來繪製圖形。

expr：是你要繪製的函數，這例是$\dfrac{\sin 4x}{x}$函數圖形

x_range：是 x 軸的顯示範圍，當然可以指定 x 軸的顯示範圍，我們也可以指定 y 軸的顯示範圍，如果不指定 y 軸，系統也會自動設定適當的大小，不過一定要指定 x 軸，在這裡我們指令了 y 軸的範圍，為-2~6，另外函數中的變數要與範圍指定的變數相同

options：指其它的繪圖選項，如線的顏色，圖形背景色，線的大小，線型‧‧‧‧等等。

(%o1)



(%i2) f:sin(4*x)/x;　//建立一方程式 $\frac{\sin 4x}{x}$ ，方程式名稱叫做 f

(%o2) $\frac{\sin(4\,x)}{x}$

(%i3) limit(f,x,0);　極限指令：limit(方程式，極限變數，範圍)　//此例 f 爲前所定義之方程式 $\frac{\sin 4x}{x}$ ，極限變數爲 x，範圍爲 x 趨近於 0

(%o3) 4

(%i4) 'limit(f,x,0);　有時我們會希望呈現未運算前的格式，在 maxima，我們只需要在方程式前面加上「 ' 」，maxima 就不會運算該程式

(%o4) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(4\,x)}{x}$

Direct substitution yields the indeterminate form 0/0. To solve this problem, you can rewrite the limit as $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x} = 4\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}\right)$.　Multiply and divide by 4.

Now, by letting $y = 4x$ and observing that $x \to 0$ if and only if $y \to 0$, you can write

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{x} = 4\left(\lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{4x} \right)$$

$$= 4\left(\lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} \right)$$

$$= 4(1)$$

$$= 4. \qquad \text{(See Figure 1.24.)}$$

1.3 Continuity and One-Sided Limits

Example 1.　Continuity of a Function

Discuss the continuity of each function

a. $f(x) = \dfrac{1}{x}$

b. $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

c. $h(x) = \begin{cases} x+1, & x \le 0 \\ x^2 + 1, & x > 0 \end{cases}$

d. $y = \sin x$

Solution：

a.

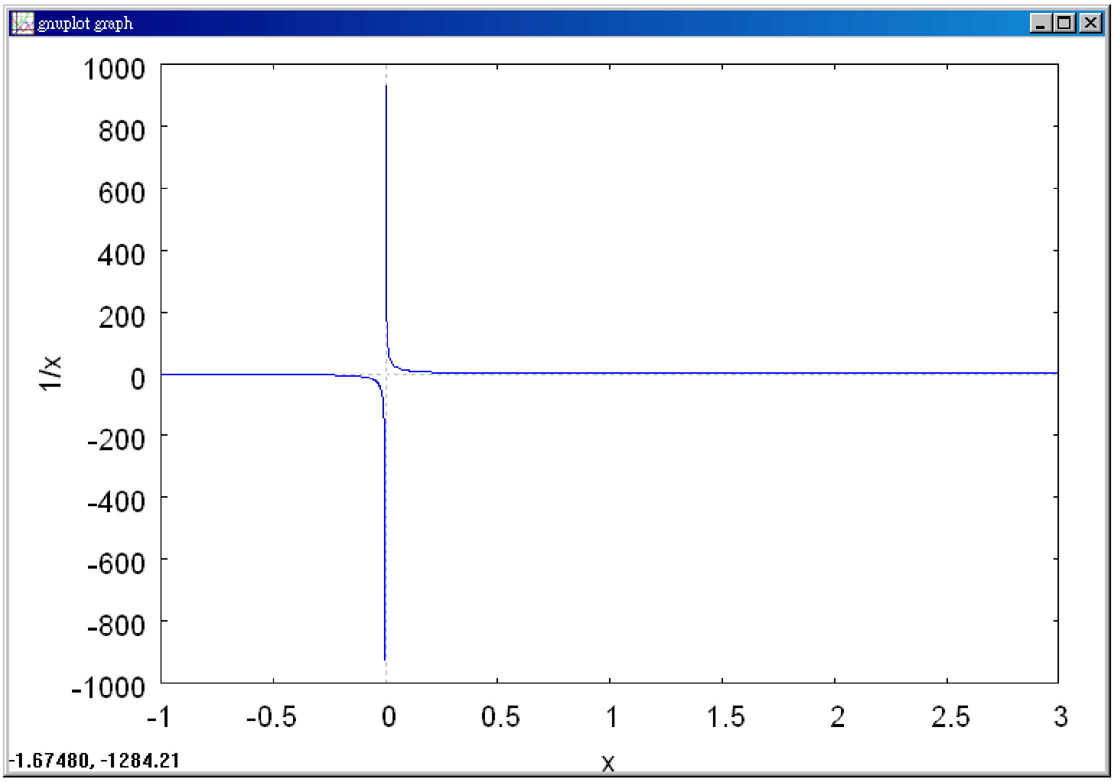
(%i1) plot2d([1/x],[x,-1,3]);　繪圖指令解說：plot2d([expr，x_range，options])，plot2d 是 Maxima 的繪圖指令，maxima 執行到這時，會去呼叫 gunplot 來繪製圖形。

expr：是你要繪製的函數，這例是 $\dfrac{1}{x}$ 函數圖形

x_range：是 x 軸的顯示範圍，當然可以指定 x 軸的顯示範圍，我們也可以指定 y 軸的顯示範圍，如果不指定 y 軸，系統也會自動設定適當的大小，不過一定要指定 x 軸，另外函數中的變數要與範圍指定的變數相同。
options：指其它的繪圖選項，如線的顏色，圖形背景色，線的大小，線型‧‧‧‧等等。

//圖形顯示 nonremovable discontinuity at x=0

(%o1)



(%i2) f:1/x;　　//建立一方程式 $\frac{1}{x}$ ，方程式名稱叫做 f

(%o2) $\frac{1}{x}$

(%i3) limit(f,x,0);　$\boxed{\text{極限指令：limit(方程式，極限變數，範圍)}}$　//此例 f 為前所定義之方程式 $\frac{1}{x}$ ，極限變數為 x，範圍為 x 趨近於 0

(%o3) infinity

The domain of f is all nonzero real numbers. From Theorem 1.3, you can conclude that f is continuous at every x-value in its domain. At $x=0$, f has a nonremovable discontinuity, as shown in Figure 1.27(a). In other words, there is no way to define $f(0)$ so as to make the function continuous at $x=0$.

b.

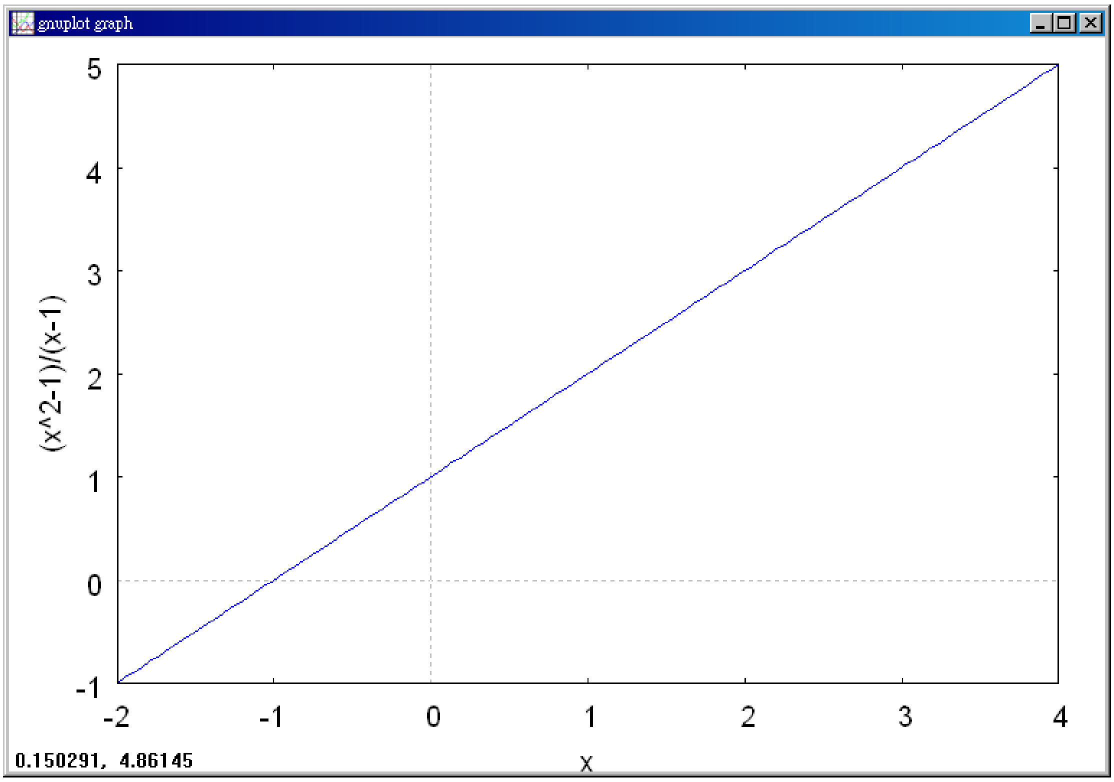
(%i1) plot2d([(x^2-1)/(x-1)],[x,-2,4]); 繪圖指令解說：plot2d([expr，x_range，options])，plot2d 是 Maxima 的繪圖指令，maxima 執行到這時，會去呼叫 gunplot 來繪製圖形。

expr：是你要繪製的函數，這例是 $\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 函數圖形

x_range：是 x 軸的顯示範圍，當然可以指定 x 軸的顯示範圍，我們也可以指定 y 軸的顯示範圍，如果不指定 y 軸，系統也會自動設定適當的大小，不過一定要指定 x 軸，另外函數中的變數要與範圍指定的變數相同
options：指其它的繪圖選項，如線的顏色，圖形背景色，線的大小，線型‧‧‧‧等等。

//由圖形知 removable discontinuity at x=1

(%o1)



(%i2) f:(x^2-1)/(x-1); //建立一方程式$\frac{x^2-1}{x-1}$，方程式名稱叫做 f

(%o2) $\frac{x^2-1}{x-1}$

(%i3) limit(f,x,1); 極限指令：limit(方程式，極限變數，範圍) //此例 f 爲前所定義之方程式$\frac{x^2-1}{x-1}$，極限變數爲 x，範圍爲 x 趨近於 1

(%o3) 2

(%i4) 'limit(f,x,1); 有時我們會希望呈現未運算前的格式，在 maxima，我們只需要在方程式前面加上「 ' 」，maxima 就不會運算該程式

(%o4) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$

The domain of g is all real numbers except $x=1$. From Theorem 1.3, you can conclude that g is continuous at every x-value in its domain. At $x=1$, the function has a removable discontinuity, as shown in Figure 1.27(b). If $g(1)$ is defined as 2, the "newly defined" function is continuous for all real number.

c.

(%i1) plot2d([x+1,x^2+1],[x,-1,4],[y,-1,4]); 繪圖指令解說：plot2d([expr，x_range，options])， plot2d 是 Maxima 的繪圖指令，maxima 執行到這時，會去呼叫 gunplot 來繪製圖形。

expr：是你要繪製的函數，這例是$x+1, x^2+1$函數圖形

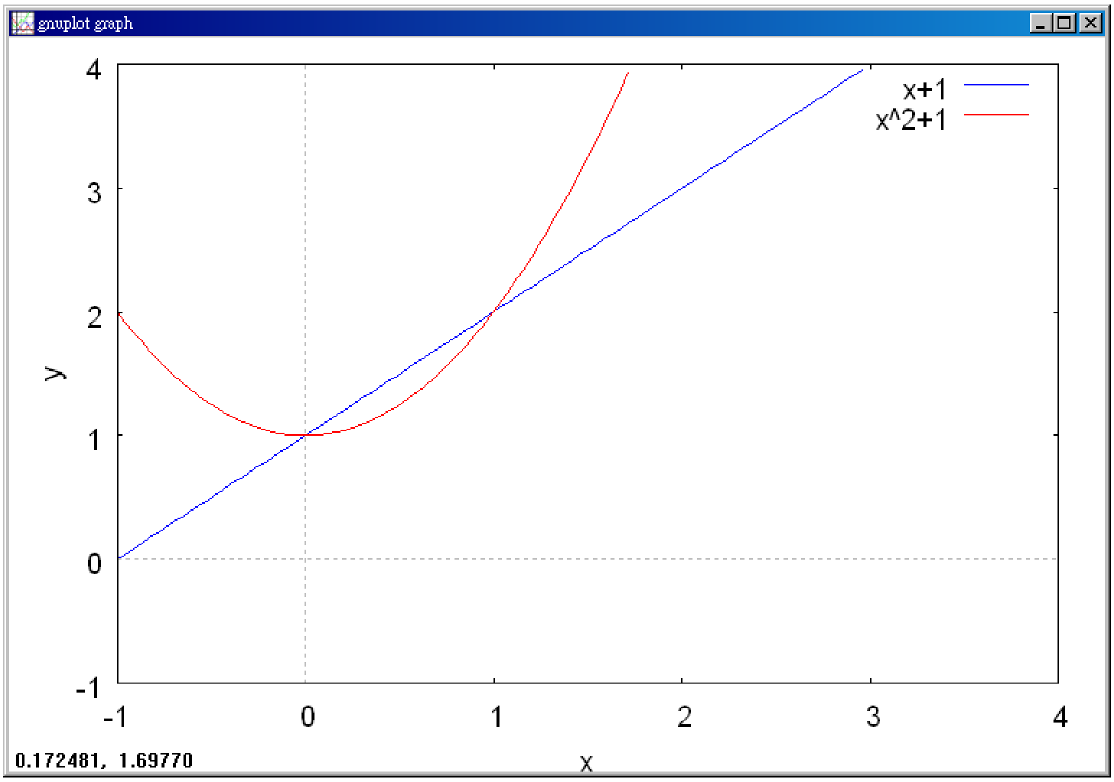
x_range：是 x 軸的顯示範圍，當然可以指定 x 軸的顯示範圍，我們也可以指定 y 軸的顯示範圍，如果不指定 y 軸，系統也會自動設定適當的大小，不過一定要指定 x 軸，另外函數中的變數要與範圍指定的變數相同

options：指其它的繪圖選項，如線的顏色，圖形背景色，線的大小，線型‧‧‧‧等等。

//由圖形知 continuous on entire real line

```
plot2d: expression evaluates to non-numeric value somewhere in plot
plot2d: expression evaluates to non-numeric value somewhere in plot
```

(%o1)



(%i2) f:x+1;　//建立一方程式 $x+1$，方程式名稱叫做 f

(%o2) $x+1$

(%i3) limit(f,x,0);　極限指令：limit(方程式，極限變數，範圍)　//此例 f 爲前所定義之方程式 $x+1$，極限變數爲 x，範圍爲 x 趨近於 0

(%o3) 1

(%i4) 'limit(f,x,0);　有時我們會希望呈現未運算前的格式，在 maxima，我們只需要在方程式前面加上「 ' 」，maxima 就不會運算該程式

(%o4) $\lim_{x \to 0} x+1$

(%i5) f:x^2+1; //建立一方程式 x^2+1，方程式名稱叫做 f

(%o5) x^2+1

(%i6) limit(f,x,0); 極限指令：limit(方程式，極限變數，範圍) //此例 f 為前所定義之方程式 x^2+1，極限變數為 x，範圍為 x 趨近於 0

(%o6) 1

(%i7) 'limit(f,x,0); 有時我們會希望呈現未運算前的格式，在 maxima，我們只需要在方程式前面加上「 ' 」，maxima 就不會運算該程式

(%o7) $\lim\limits_{x \to 0} x^2+1$

The domain of h is all real numbers. The function h is continuous on $(-\infty,0)$ and $(0,\infty)$, and, because $\lim\limits_{x\to 0} h(x)=1$, h is continuous on the entire real line, as shown in Figure 1.27(c).

d.

(%i1) plot2d([sin(x)],[x,-(%pi)/2,5*(%pi)/2],[y,-1,1]); 繪圖指令解說：plot2d([expr，x_range，options])， plot2d 是 Maxima 的繪圖指令，maxima 執行到這時，會去呼叫 gunplot 來繪製圖形。

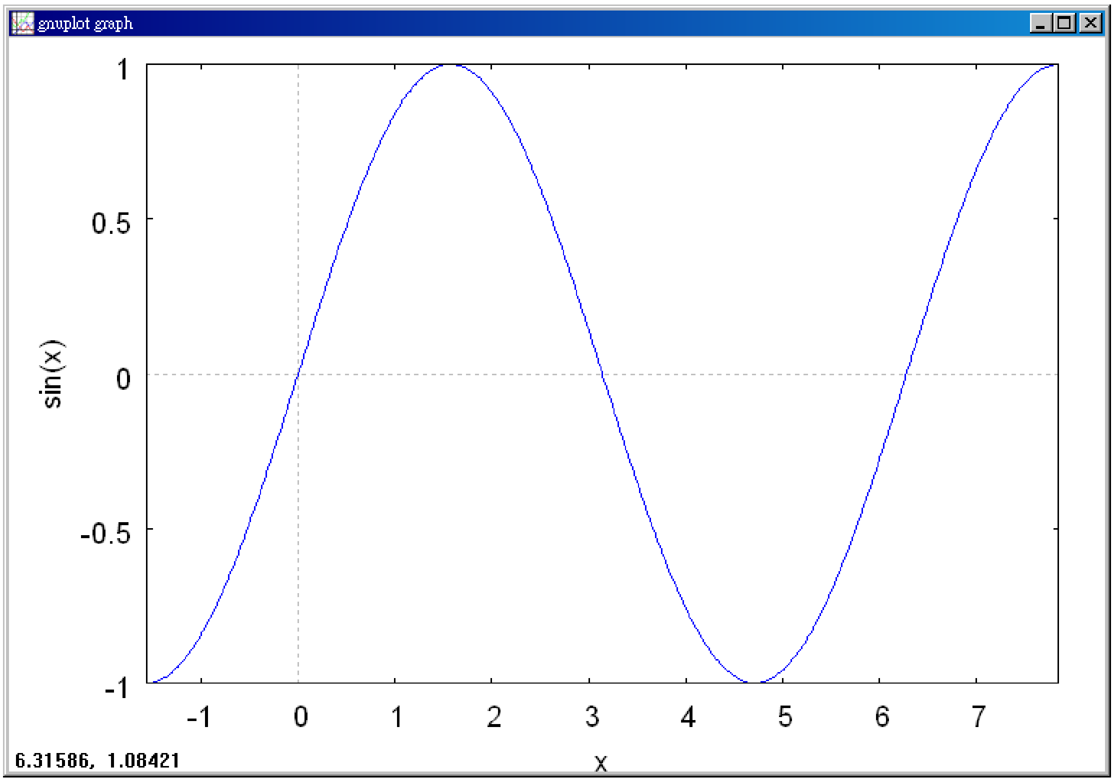
expr：是你要繪製的函數，這例是 $\sin x$ 函數圖形

x_range：是 x 軸的顯示範圍，當然可以指定 x 軸的顯示範圍，我們也可以指定 y 軸的顯示範圍，如果不指定 y 軸，系統也會自動設定適當的大小，不過一定要指定 x 軸，這裡指定了 y 軸的範圍-1~1，另外函數中的變數要與範圍指定的變數相同

options：指其它的繪圖選項，如線的顏色，圖形背景色，線的大小，線型‧‧‧‧等等。

//由圖形知 continuous on entire real line

(%o1)



Example 2.　A One-Sided Limit

Find the limit of $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ as x approaches -2 from the right.

Solution：

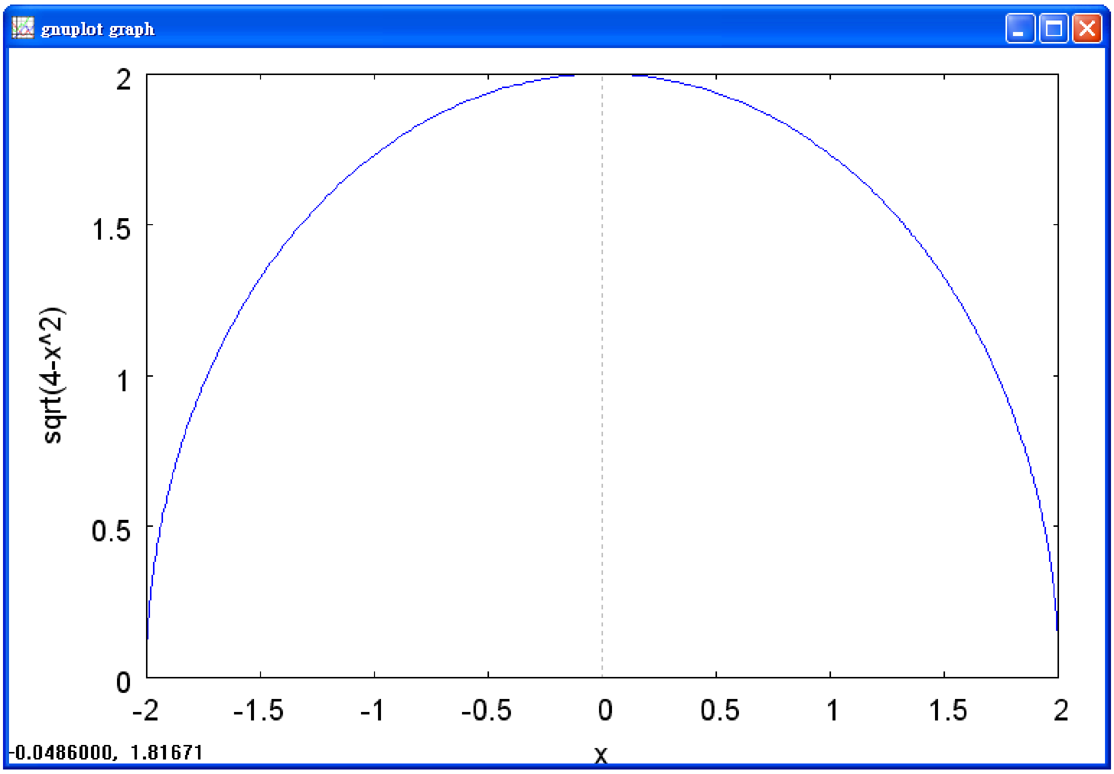
(%i1) plot2d([sqrt(4-x^2)],[x,-2,2]);　繪圖指令解說：plot2d([expr，x_range，options])，plot2d 是 Maxima 的繪圖指令，maxima 執行到這時，會去呼叫 gunplot 來繪製圖形。

expr：是你要繪製的函數，這例是 $\sqrt{4-x^2}$ 函數圖形

x_range：是 x 軸的顯示範圍，當然可以指定 x 軸的顯示範圍，我們也可以指定 y 軸的顯示範圍，如果不指定 y 軸，系統也會自動設定適當的大小，不過一定要指定 x 軸，另外函數中的變數要與範圍指定的變數相同

options：指其它的繪圖選項，如線的顏色，圖形背景色，線的大小，線型‧‧‧‧等等。

(%o1)



(%i2) f:sqrt(4-x^2);　//建立一方程式 $\sqrt{4-x^2}$ ，方程式名稱叫做 f

(%o2) $\sqrt{4 - x^2}$

(%i3) limit(f,x,-2);　$\boxed{\text{極限指令：limit(方程式，極限變數，範圍)}}$　//此例 f 爲前所定義之方程式 $\sqrt{4-x^2}$ ，極限變數爲 x，範圍爲 x 趨近於-2

(%o3) 0

As shown in Figure 1.29, the limit as x approaches -2 from the right is

$$\lim_{x \to -2^+} \sqrt{4-x^2} = 0.$$

Example 3.　The Greatest Integer Function

Find the limit of the greatest integer function $f(x) = [x]$ as x approaches 0 from the left and from the right.

Solution： 不知道如何用 Maxima 寫出 step function.

As shown in Figure 1.30, the limit as x approaches 0 from the left is given by

$$\lim_{x \to 0^+} [x] = -1$$

And the limit as x approaches 0 from the right is given by $\lim_{x \to 0^+} [x] = 0.$

The greatest integer function has a discontinuity at zero because the left and right limits at zero are different. By similar reasoning, you can see that the greatest integer function has a discontinuity at any integer n.

Example 4. Continuity on a Close Interval

Discuss the continuity of $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Solution：

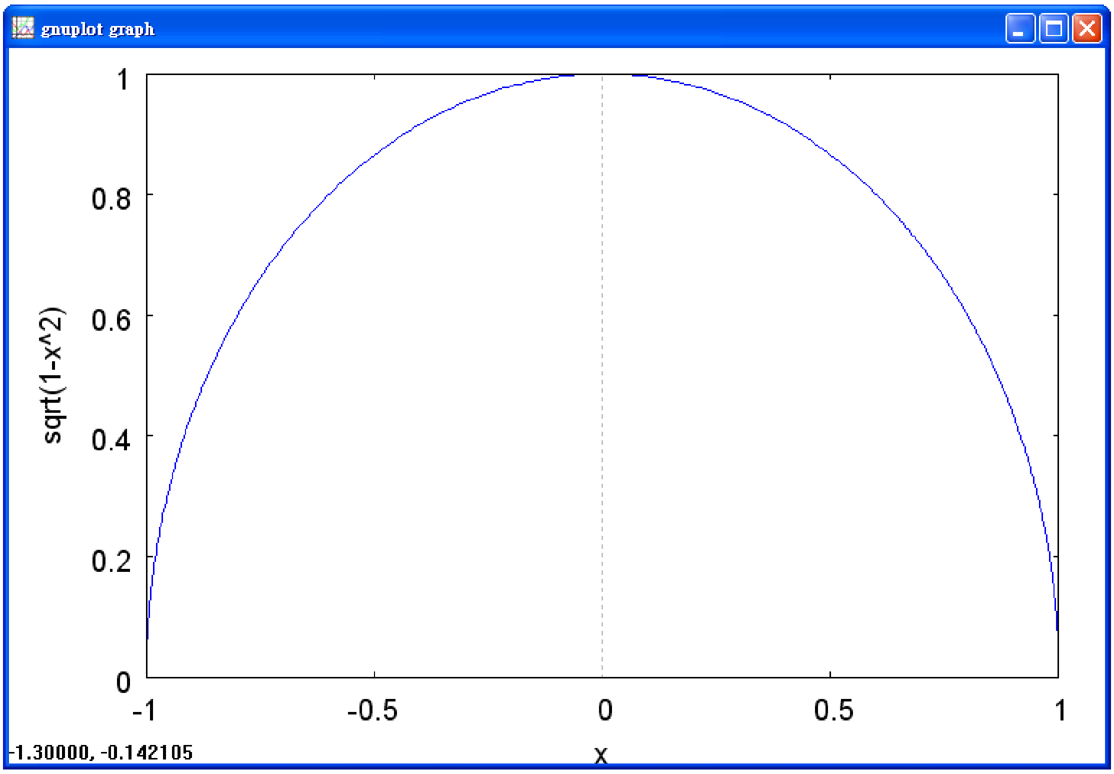
(%i1) plot2d([sqrt(1-x^2)],[x,-1,1]); 繪圖指令解說：plot2d([expr，x_range，options])，plot2d 是 Maxima 的繪圖指令，maxima 執行到這時，會去呼叫 gunplot 來繪製圖形。

expr：是你要繪製的函數，這例是 $\sqrt{1-x^2}$ 函數圖形

x_range：是 x 軸的顯示範圍，當然可以指定 x 軸的顯示範圍，我們也可以指定 y 軸的顯示範圍，如果不指定 y 軸，系統也會自動設定適當的大小，不過一定要指定 x 軸，另外函數中的變數要與範圍指定的變數相同

options：指其它的繪圖選項，如線的顏色，圖形背景色，線的大小，線型‧‧‧‧等等。

(%o1)



(%i2) f:sqrt(1-x^2); //建立一方程式 $\sqrt{1-x^2}$ ，方程式名稱叫做 f

(%o2) $\sqrt{1-x^2}$

(%i3) limit(f,x,-1); 極限指令：limit(方程式，極限變數，範圍) //此例 f 爲前所定義之方程式 $\sqrt{1-x^2}$ ，極限變數爲 x，範圍爲 x 趨近於-1

(%o3) 0

(%i4) limit(f,x,1); 極限指令：limit(方程式，極限變數，範圍) //此例 f 爲前所定義之方程式 $\sqrt{1-x^2}$ ，極限變數爲 x，範圍爲 x 趨近於 1

(%o4) 0

The domain of f is the closed interval [-1, 1]. As all points in the open interval (-1, 1), the continuity of f follows from Theorem 1.4 and 1.5. Moreover, because

$$\lim_{x\to -1^+}\sqrt{1-x^2}=0=f(-1)$$ Continuous from the right

And

$$\lim_{x\to 1^-}\sqrt{1-x^2}=0=f(1)$$ Continuous from the left

you can conclude that f is continuous on the closed interval [-1, 1], as shown in Figure 1.32.

Example 5. Charles' s Law and Absolute Zero

On the Kelvin scale, absolute zero is the temperature 0 K. Although temperatures of approximately 0.0001 K have been produced in laboratories, absolute zero has never been attained. In fact, evidence suggests that absolute zero cannot be attained. How did scientists determine that 0 K is the "lower limit" of the temperature of matter？ What is absolute zero on the Celsius scale？

Solution：

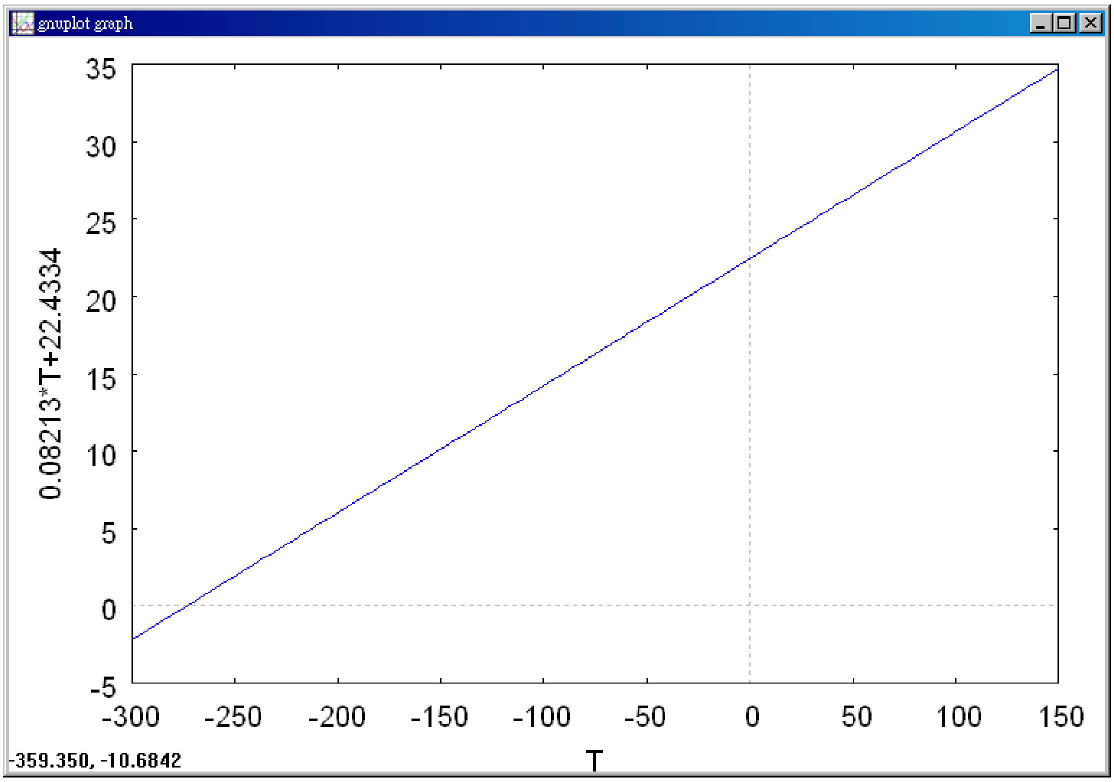
(%i1) plot2d([0.08213*T+22.4334],[T,-300,150]); 繪圖指令解說：plot2d([expr，x_range，options])， plot2d 是 Maxima 的繪圖指令，maxima 執行到這時，會去呼叫 gunplot 來繪製圖形。

expr：是你要繪製的函數，這例是 $\dfrac{V-22.4334}{0.08213}$ 函數圖形

x_range：是 x 軸的顯示範圍，當然可以指定 x 軸的顯示範圍，我們也可以指定 y 軸的顯示範圍，如果不指定 y 軸，系統也會自動設定適當的大小，不過一定要指定 x 軸，另外函數中的變數要與範圍指定的變數相同

options：指其它的繪圖選項，如線的顏色，圖形背景色，線的大小，線型‧‧‧‧等等。

(%o1)



The determination of absolute zero stems from the work of the French physicist Jacques Charles (1746-1823). Charles discovered that the volume of gas at a constant pressure increase linearly with the temperature of the gas. The table illustrates this relationship between volume and temperature. The volume V is measured in liters and the temperature T is measured in degrees Celsius.

T	-40	-20	0	20	40	60	80
V	19.1482	20.7908	22.4334	24.0760	25.7186	27.3612	29.0038

The points represented by the table are shown in Figure 1.33. Moreover, by using the points in the table, you can determine that T and V are related by the linear equation

$$V = 0.08213T + 22.4334 \quad \text{or} \quad T = \frac{V - 22.4334}{0.08213}.$$

By reasoning that the volume of the gas can approach 0 (but never equal or go below 0) you can determine that the "least possible temperature" is given by

$$\lim_{V \to 0^+} T = \lim_{V \to 0^+} \frac{V - 22.4334}{0.08213}$$

$$= \frac{0 - 22.4334}{0.08213}$$ Use direct substitution.

$\approx -273.15.$

So, absolute zero on the Kelvin scale (0 K) is approximately -273.15° on the Celsius scale.

Example 6. Applying Properties of Continuity

By Theorem 1.11, it follows that each of the following functions is continuous at every point in its domain.

$$f(x) = x + \sin x, \quad f(x) = 3\tan x, \quad f(x) = \frac{x^2+1}{\cos x}$$

Solution：

The next theorem, which is a consequence of the Theorem 1.5, allows you to determine the continuity of composite functions such as

$$f(x) = \sin 3x, \quad f(x) = \sqrt{x^2+1}, \quad f(x) = \tan\frac{1}{x}.$$

Example 7. Testing for Continuity

Describe the interval(s) on which each function is continuous.

a. $f(x) = \tan x$

b. $g(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

c. $h(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Solution：

a. (%i1) f:tan(x);　//定義一函數 tan(x)，函數名稱叫做 f

```
(%o1)  tan(x)
```

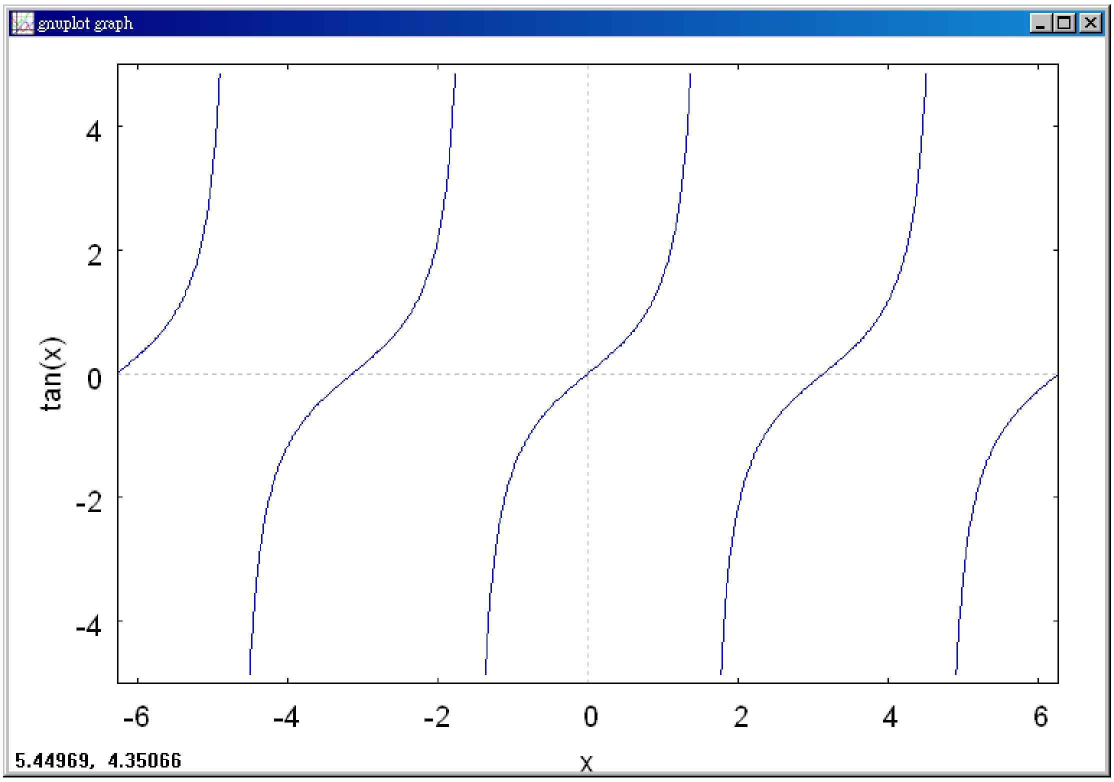
(%i2) plot2d([f],[x,-2*%pi,2*%pi],[y,-5,5]);　繪圖指令解說：plot2d([expr，x_range，options])，　plot2d 是 Maxima 的繪圖指令，maxima 執行到這時，會去呼叫 gunplot 來繪製圖形。

expr：是你要繪製的函數，這例是 tan(x)函數圖形

x_range：是 x 軸的顯示範圍，當然可以指定 x 軸的顯示範圍，我們也可以指定 y 軸的顯示範圍，如果不指定 y 軸，系統也會自動設定適當的大小，不過一定要指定 x 軸，這裡我們也指定 y 軸的範圍-5~5，另外函數中的變數要與範圍指定的變數相同。

options：指其它的繪圖選項，如線的顏色，圖形背景色，線的大小，線型‧‧‧‧等等。

```
plot2d: expression evaluates to non-numeric value somewhere in plott
(%o2)
```



The tangent function $f(x)=\tan x$ is undefined at $x=\frac{\pi}{2}+n\pi,$ n is an integer.

At all other points it is continuous. So, $f(x)=\tan x$ is continuous on the open intervals $\ldots,\left(-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right),\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right),\ldots$ as shown in Figure 1.34(a).

b. (%i1) g:sin(1/x); //定義一函數 $\sin(\frac{1}{x})$ ，函數名稱叫做 g

(%o1) $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

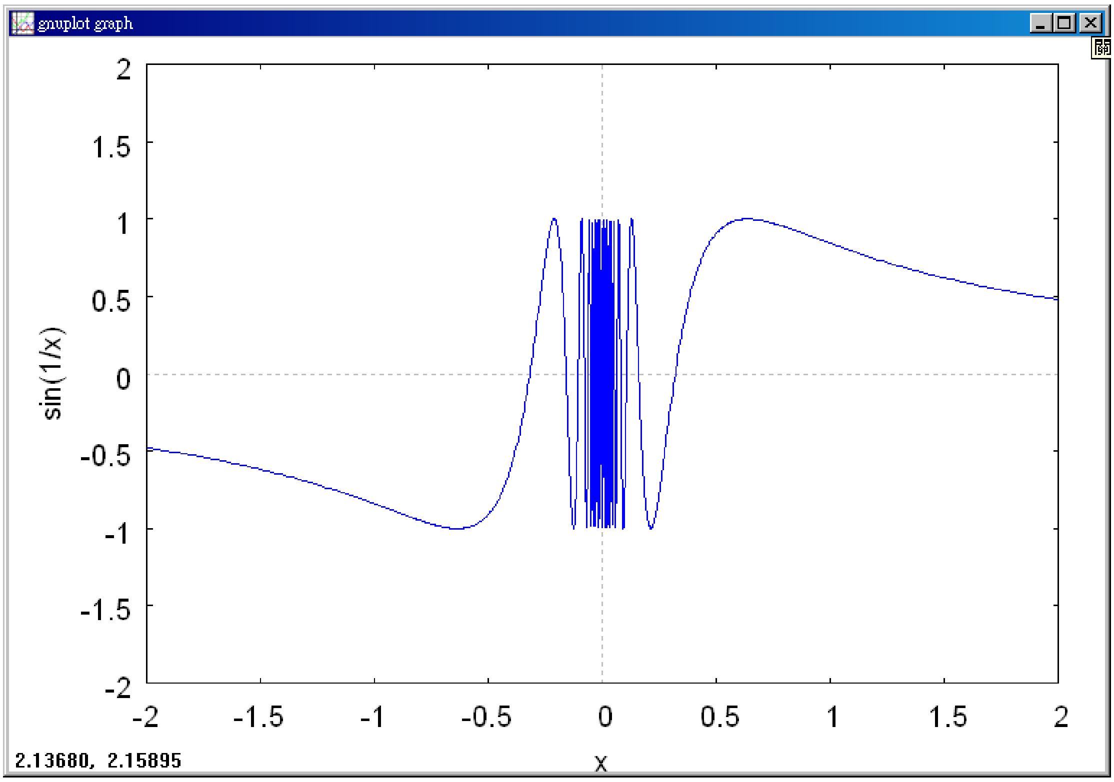
(%i2) plot2d([g],[x,-2,2],[y,-2,2]); 繪圖指令解說：plot2d([expr，x_range，options])，plot2d 是 Maxima 的繪圖指令，maxima 執行到這時，會去呼叫 gunplot 來繪製圖形。

expr：是你要繪製的函數，這例是 $\sin(\frac{1}{x})$ 函數圖形

x_range：是 x 軸的顯示範圍，當然可以指定 x 軸的顯示範圍，我們也可以指定 y 軸的顯示範圍，如果不指定 y 軸，系統也會自動設定適當的大小，不過一定要指定 x 軸，這裡我們指定 y 軸的範圍-2~2，另外函數中的變數要與範圍指定的變數相同。

options：指其它的繪圖選項，如線的顏色，圖形背景色，線的大小，線型‧‧‧‧等等。

(%o2)



Because $y = 1/x$ is continuous except at $x = 0$ and the sine function is continuous for all real values of x, it follows that $y = \sin(1/x)$ is continuous at all real values except $x = 0$. At $x = 0$, the limit of $g(x)$ does not exist (See Example 5, Section 1.2). So, g is continuous on the intervals (-∞, 0) and (0, ∞), as shown in Figure 1.34(b).

c. (%i1) h:x*sin(1/x); //定義一函數 $x\sin(\frac{1}{x})$ ，函數名稱叫做 h

$$(\%o1)\quad \sin\left(\frac{1}{x}\right)x$$

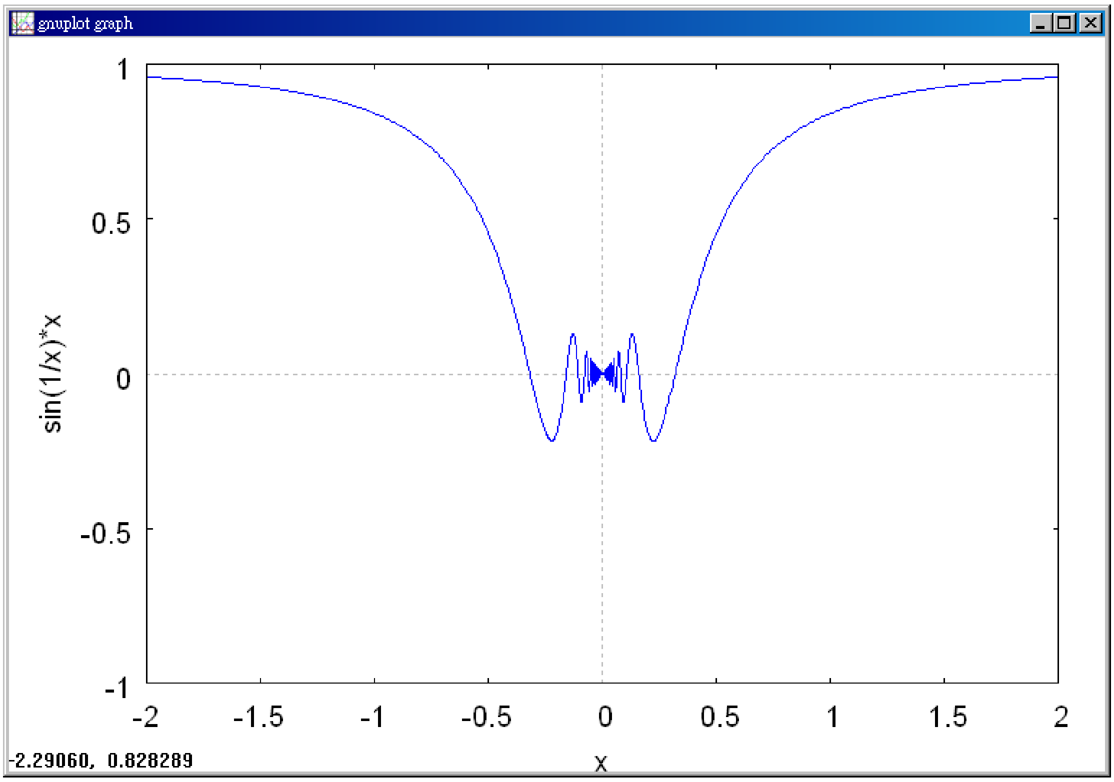
(%i2) plot2d([h],[x,-2,2],[y,-1,1]); 繪圖指令解說：plot2d([expr，x_range，options])，plot2d 是 Maxima 的繪圖指令，maxima 執行到這時，會去呼叫 gunplot 來繪製圖形。

expr：是你要繪製的函數，這例是 $x\sin(\frac{1}{x})$ 函數圖形

x_range：是 x 軸的顯示範圍，當然可以指定 x 軸的顯示範圍，我們也可以指定 y 軸的顯示範圍，如果不指定 y 軸，系統也會自動設定適當的大小，不過一定要指定 x 軸，這裡我們指定 y 軸的範圍-1~1，另外函數中的變數要與範圍指定的變數相同。

options：指其它的繪圖選項，如線的顏色，圖形背景色，線的大小，線型‧‧‧‧等等。

(%o2)



This function is similar to that in part(b) except that the oscillations are damped by the factor x. Using the Squeeze Theorem, you can $-|x| \le x\sin\frac{1}{x} \le |x|, \quad x \ne 0$ and you can conclude that $\lim_{x\to 0} h(x) = 0.$

So, h is continuous on the entire real line, as shown in Figure 1.34(c).

Example 8. An Application of the Intermediate Value Theorem

Use the Intermediate Value Theorem to show that the polynomial function $f(x) = x^3 + 2x - 1$ has zero in the interval [0, 1].

Solution： (%i1) f:x^3+2*x-1; //定義一函數 x^3+2x-1，函數名稱叫做 f

(%o1) x^3+2x-1

(%i2) plot2d([f],[x,-2,2],[y,-2,3]); 繪圖指令解說：plot2d([expr，x_range，options])，plot2d 是 Maxima 的繪圖指令，maxima 執行到這時，會去呼叫 gunplot 來繪製圖形。

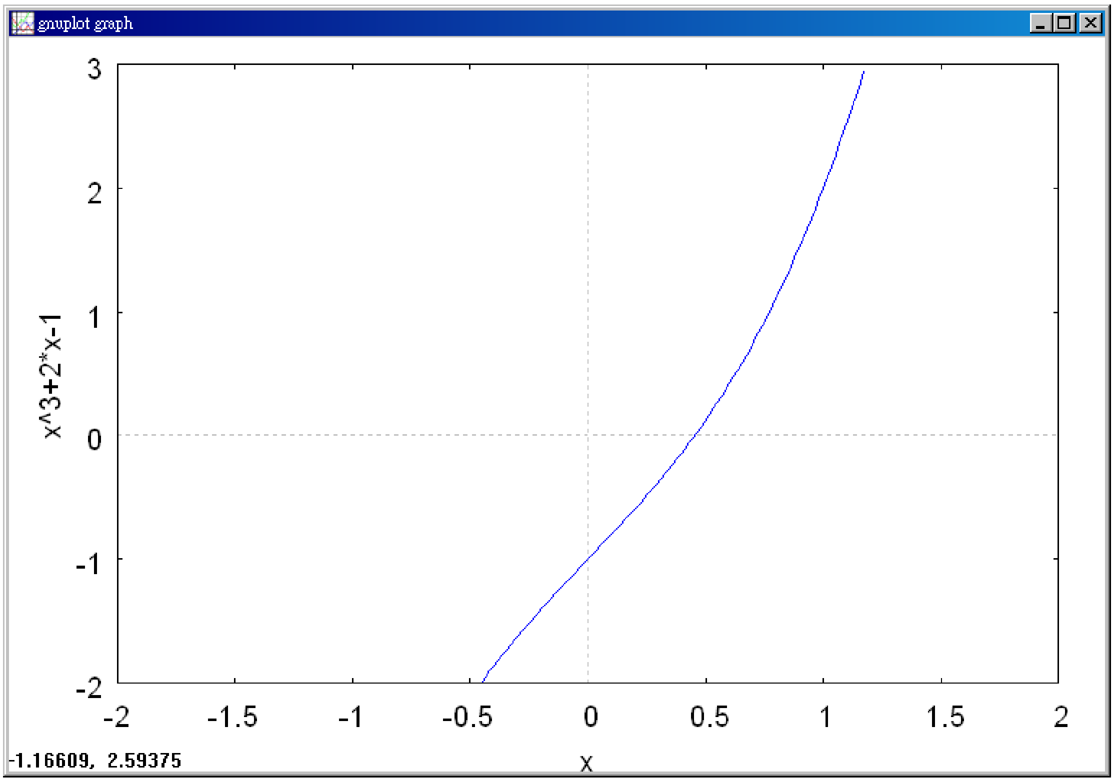
expr：是你要繪製的函數，這例是 x^3+2x-1函數圖形

x_range：是 x 軸的顯示範圍，當然可以指定 x 軸的顯示範圍，我們也可以指定 y 軸的顯示範圍，如果不指定 y 軸，系統也會自動設定適當的大小，不過一定要指定 x 軸，這裡我們指定 y 軸的範圍爲-2~3，另外函數中的變數要與範圍指定的變數相同

options：指其它的繪圖選項，如線的顏色，圖形背景色，線的大小，線型‧‧‧等等。

```
plot2d: expression evaluates to non-numeric value somewhere in plot
```

(%o2)



Note that f is continuous on the closed interval [0, 1]. Because $f(0)=0^3+2(0)-1=-1$ and $f(1)=1^3+2(1)-1=2$ it follows that $f(0)<0$ and

$f(1) > 0$. You can therefore apply the Intermediate Value Theorem to conclude that there must be some c in [0, 1] such that $f(c) = 0$ f has a zero in the closed interval [0, 1].

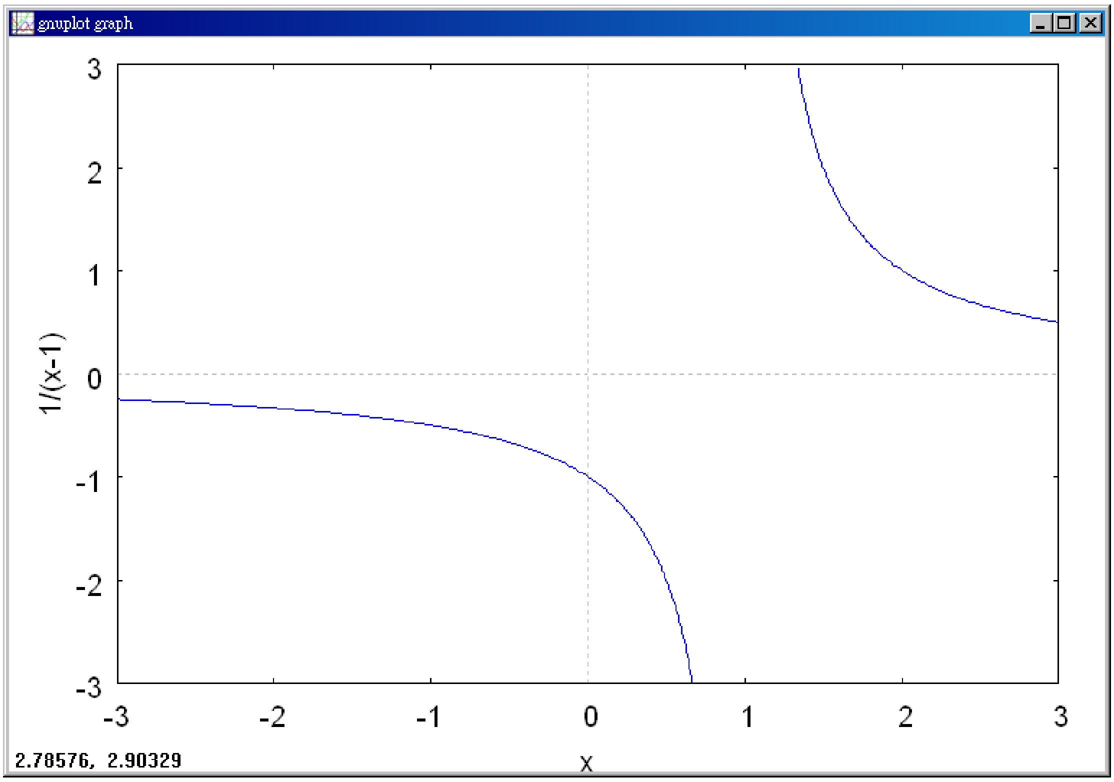
as shown in Figure 1.37.

1.4 Infinite Limits

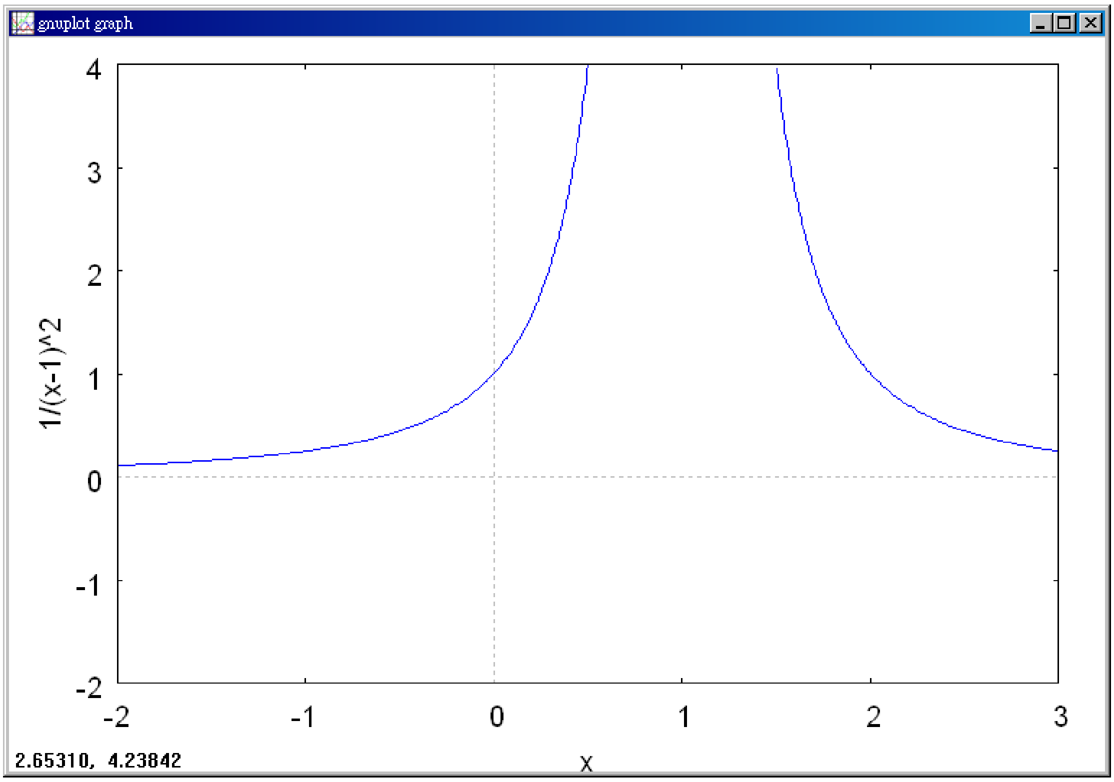
Example 1. Determining Infinite Limits from a Graph

Use Figure 1.41 to determine the limit of each function as x approaches 1 from the left and from the right.

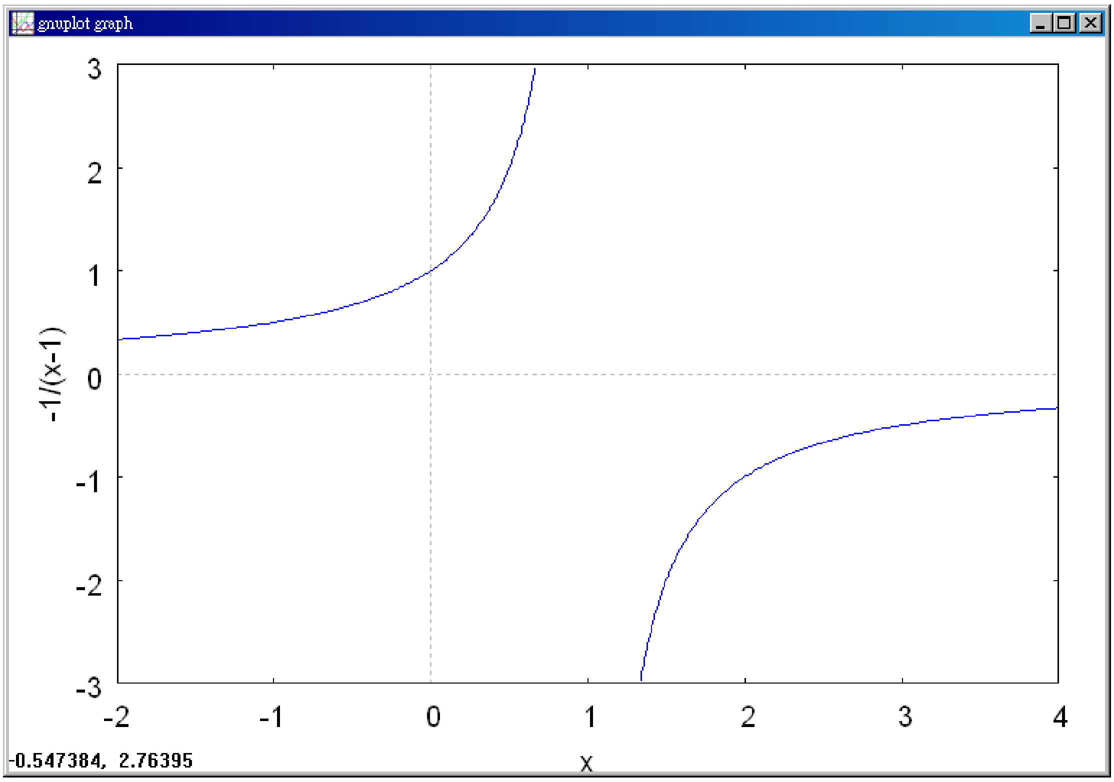
a.



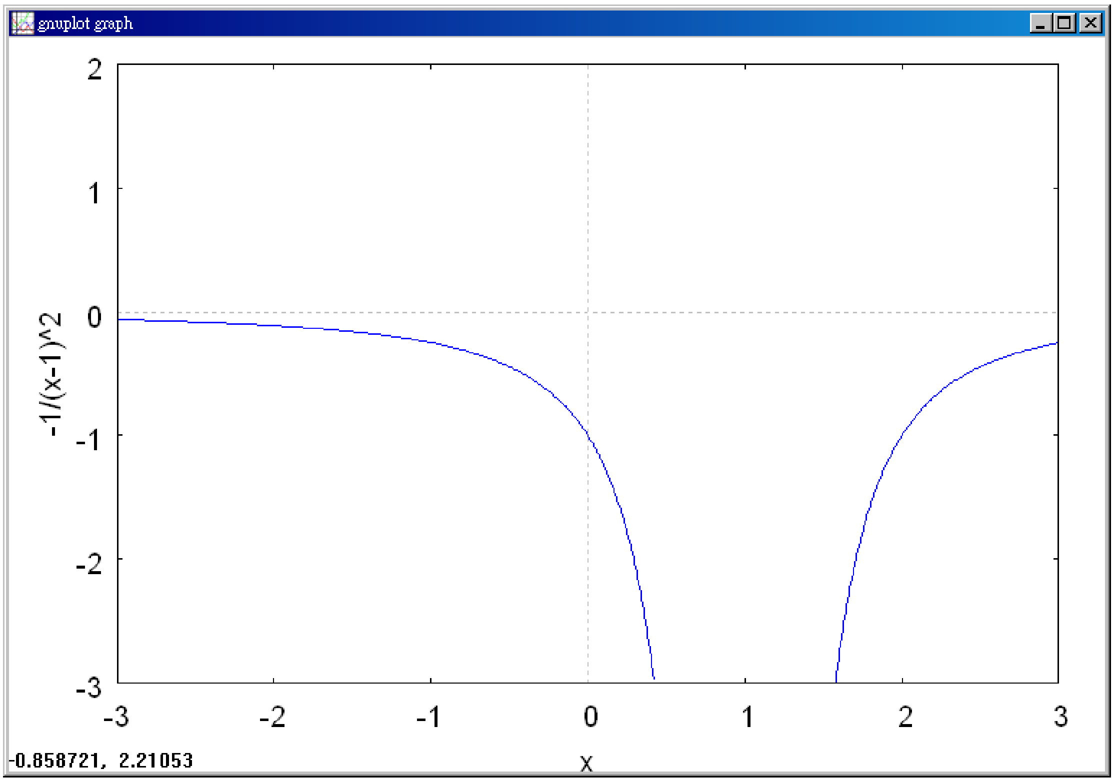
b.


gnuplot graph
4
3
2
1
0
-1
-2
1/(x-1)^2
-2
-1
0
1
2
3
x
2.65310, 4.23842

c.


gnuplot graph
3
2
1
0
-1
-2
-3
-1/(x-1)
-2
-1
0
1
2
3
4
x
-0.547384, 2.76395

d.



Solution：

a. (%i1) f:1/(x-1);　//建立一方程式 $\frac{1}{x-1}$ ，方程式名稱叫做 f

(%o1) $\frac{1}{x-1}$

(%i2) 'limit(f,x,1);　有時我們會希望呈現未運算前的格式，在 maxima，我們只需要在方程式前面加上「 ' 」，maxima 就不會運算該程式

(%o2) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{x-1}$

(%i3) limit(f,x,1);　極限指令：limit(方程式，極限變數，範圍)　//此例 f 爲前所定義之方程式 $\frac{1}{x-1}$ ，極限變數爲 x，範圍爲 x 趨近於 1

(%o3) *infinity*

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty \quad \text{and} \quad \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1} = \infty$$

b. (%i4) f:1/(x-1)^2; //建立一方程式 $\frac{1}{(x-1)^2}$ ，方程式名稱叫做 f

(%o4) $\frac{1}{(x-1)^2}$

(%i5) 'limit(f,x,1); 有時我們會希望呈現未運算前的格式，在 maxima，我們只需要在方程式前面加上「 ' 」，maxima 就不會運算該程式

(%o5) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2}$

(%i6) limit(f,x,1); 極限指令：limit(方程式，極限變數，範圍) //此例 f 爲前所定義之方程式 $\frac{1}{(x-1)^2}$ ，極限變數爲 x，範圍爲 x 趨近於 1

(%o6) ∞

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty$$ Limit from each side is ∞

c. (%i1) f:-1/(x-1); //建立一方程式 $\frac{-1}{x-1}$ ，方程式名稱叫做 f

(%o1) $-\frac{1}{x-1}$

(%i2) 'limit(f,x,1); 有時我們會希望呈現未運算前的格式，在 maxima，我們只需要在方程式前面加上「 ' 」，maxima 就不會運算該程式

(%o2) $-\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{x-1}$

(%i3) limit(f,x,1); 極限指令：limit(方程式，極限變數，範圍) //此例 f 爲前所定義之方程式 $\frac{-1}{x-1}$ ，極限變數爲 x，範圍爲 x 趨近於 1

(%o3) *infinity*

$\lim_{x\to 1^-} \frac{-1}{x-1} = \infty$ and $\lim_{x\to 1^+} \frac{-1}{x-1} = -\infty$

d. (%i1) f:-1/(x-1)^2; //建立一方程式 $\frac{-1}{(x-1)^2}$ ，方程式名稱叫做 f

(%o1) $-\frac{1}{(x-1)^2}$

(%i2) 'limit(f,x,1); 有時我們會希望呈現未運算前的格式，在 maxima，我們只需要在方程式前面加上「 ' 」，maxima 就不會運算該程式

(%o2) $-\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2}$

(%i3) limit(f,x,1); 極限指令：limit(方程式，極限變數，範圍) //此例 f 為前所定義之方程式 $\frac{-1}{(x-1)^2}$ ，極限變數為 x，範圍為 x 趨近於 1

(%o3) $-\infty$

$\lim_{x\to 1} \frac{-1}{(x-1)^2} = -\infty$ Limit from each side is $-\infty$

Example 2. Finding Vertical Asymptotes

Determine all vertical asymptotes of the graph of each function.

a. $f(x) = \frac{1}{2(x+1)}$

b. $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

c. $f(x) = \cot x$

Solution：

a. (%i1) f:1/(2*(x+1)); 定義一函數 $\frac{1}{2(x+1)}$ ，函數名稱叫做 f

(%o1) $\frac{1}{2\,(x+1)}$

(%i2) plot2d([f],[x,-3,1],[y,-5,5]); 繪圖指令解說：plot2d([expr，x_range，options])，plot2d 是 Maxima 的繪圖指令，maxima 執行到這時，會去呼叫 gunplot 來繪製圖形。

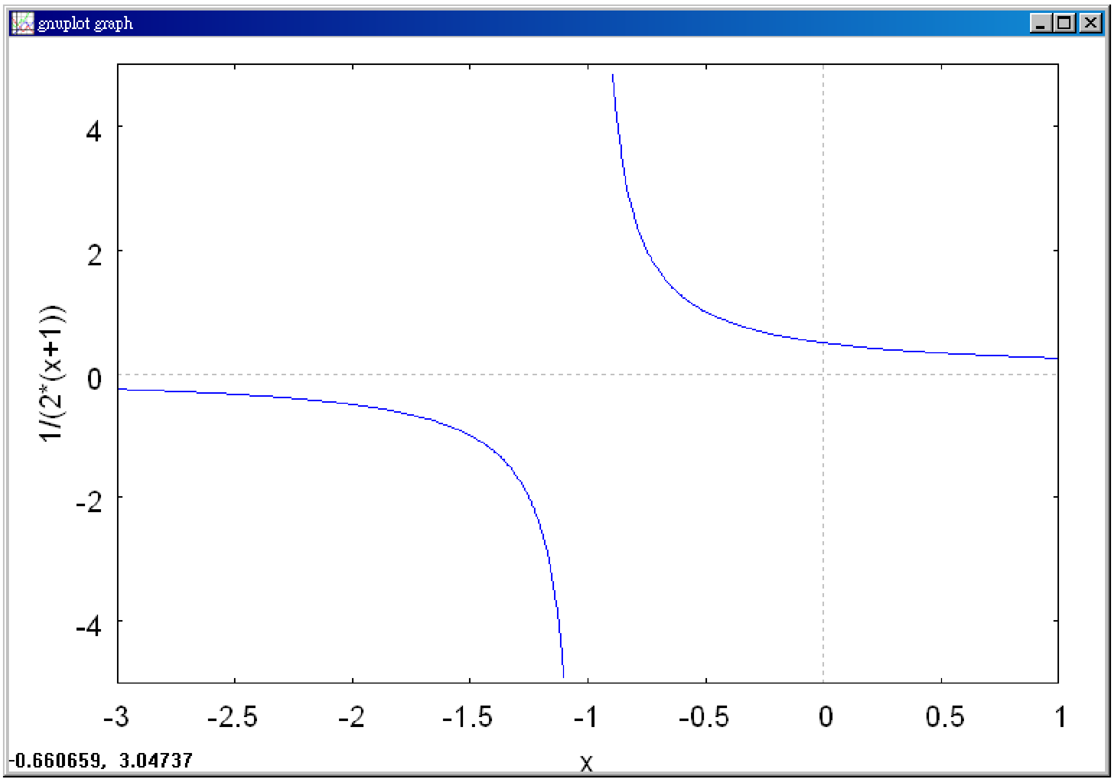
expr：是你要繪製的函數，這例是 $\frac{1}{2(x+1)}$ 函數圖形

x_range：是 x 軸的顯示範圍，當然可以指定 x 軸的顯示範圍，我們也可以指定 y 軸的顯示範圍，如果不指定 y 軸，系統也會自動設定適當的大小，不過一定要指定 x 軸，這裡我們給定 y 軸的範圍-5~5，變數要與範圍指定的變數相同。

options：指其它的繪圖選項，如線的顏色，圖形背景色，線的大小，線型‧‧‧‧等等。

```
plot2d: expression evaluates to non-numeric value somewhere in plott
```

(%o2)



When $x=-1$, the denominator of $f(x)=\dfrac{1}{2(x+1)}$ is 0 and the numerator is not 0. So, by Theorem 1.14, you can conclude that $x=-1$ is a vertical asymptote, as shown in Figure 1.42(a).

b. (%i1) f:(x^2+1)/(x^2-1); //定義一函數$\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$，函數名稱叫做 f

(%o1) $\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

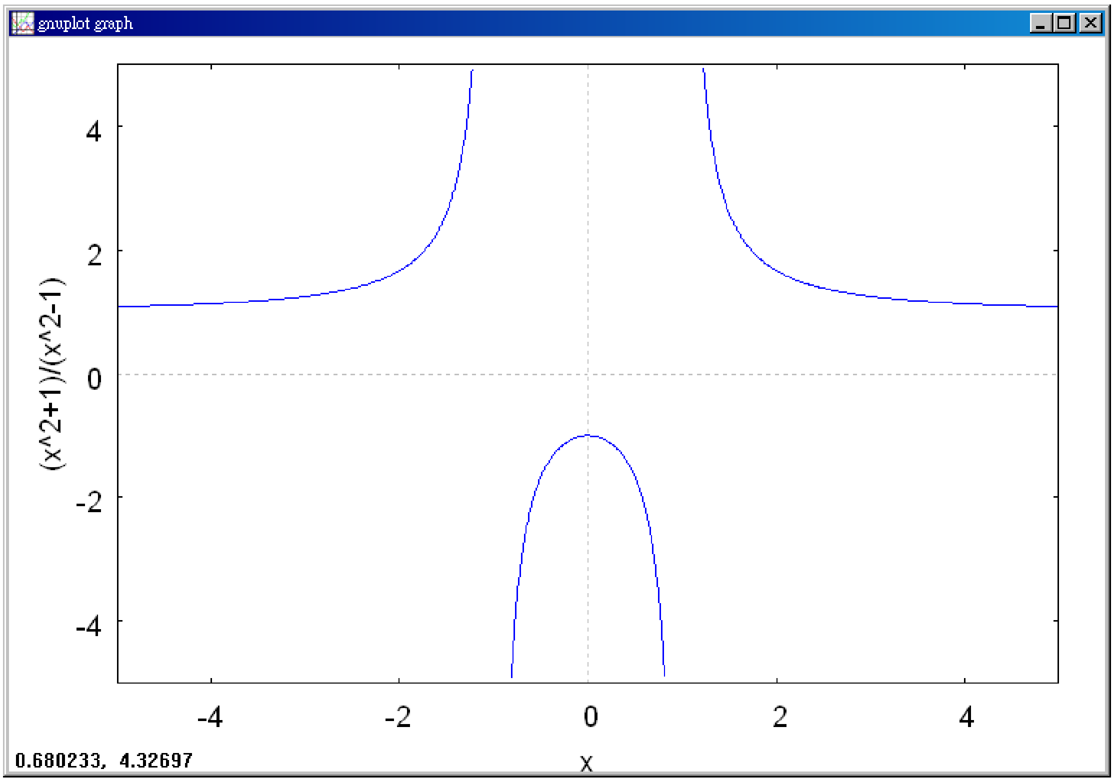
(%i2) plot2d([f],[x,-5,5],[y,-5,5]); 繪圖指令解說：plot2d([expr，x_range，options])，plot2d 是 Maxima 的繪圖指令，maxima 執行到這時，會去呼叫 gunplot 來繪製圖形。

expr：是你要繪製的函數，這例是$\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$函數圖形

x_range：是 x 軸的顯示範圍，當然可以指定 x 軸的顯示範圍，我們也可以指定 y 軸的顯示範圍，如果不指定 y 軸，系統也會自動設定適當的大小，不過一定要指定 x 軸，這裡我們給定 y 軸的範圍-5~5，另外函數中的變數要與範圍指定的變數相同。

options：指其它的繪圖選項，如線的顏色，圖形背景色，線的大小，線型‧‧‧‧等等。

```
plot2d: expression evaluates to non-numeric value somewhere in plott
(%o2)
```



By factoring the denominator as $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=\dfrac{x^2+1}{(x-1)(x+1)}$ you can see that the denominator is 0 at $x=-1$ and $x=1$. Moreover, because the numerator is not 0 at these two points, you can apply Theorem 1.14 to conclude that the graph of f has two vertical asymptotes, as shown in Figure 1.42(b).

c. (%i1) f:cot(x); //定義一函數 cot(x) ，函數名稱叫做 f

```
(%o1)  cot(x)
```

(%i2) plot2d([f],[x,-2*(%pi),2*(%pi)],[y,-7,7]); 繪圖指令解說：plot2d([expr，x_range，options])， plot2d 是 Maxima 的繪圖指令，maxima 執行到這時，會去呼叫 gunplot 來繪製圖形。

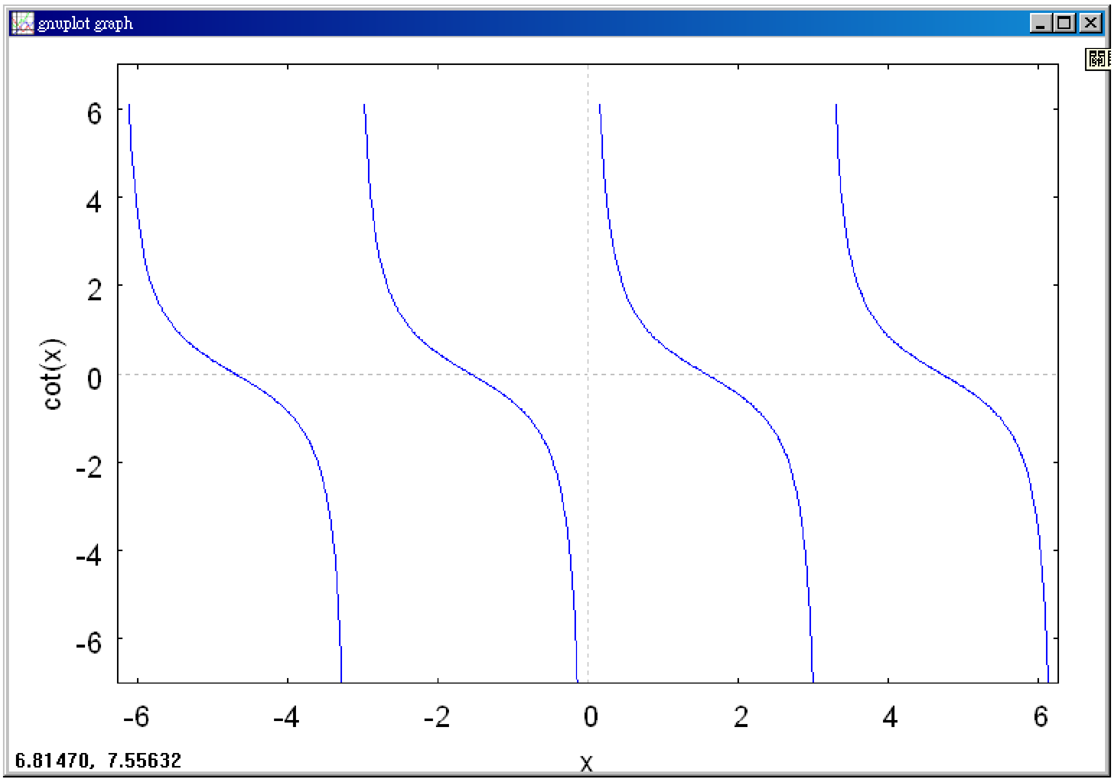
expr：是你要繪製的函數，這例是 cot(x) 函數圖形

x_range：是 x 軸的顯示範圍，當然可以指定 x 軸的顯示範圍，我們也可以指定 y 軸的顯示範圍，如果不指定 y 軸，系統也會自動設定適當的大小，不過一定要指

定 x 軸，在這裡我們是給定 y 軸的範圍-7~7，另外函數中的變數要與範圍指定的變數相同。

options：指其它的繪圖選項，如線的顏色，圖形背景色，線的大小，線型‧‧‧‧等等。

```
The number 0.0 isn't in the domain of cot
plot2d: expression evaluates to non-numeric value somewhere in plott
(%o2)
```



By writing the cotangent function in the form $f(x) = \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

You can apply Theorem 1.14 to conclude that vertical asymptotes occur at all values of x such that $\sin x = 0$ and $\cos x \neq 0$, as shown in Figure 1.42(c). So, the graph of this function has infinitely many vertical asymptotes. These asymptotes occur when $x = n\pi$, where n is an integer.

Example 3. A Rational Function with Common Factors

Determine all vertical asymptotes of the graph of $f(x)=\dfrac{x^2+2x-8}{x^2-4}$.

Solution：(%i1) f:(x^2+2*x-8)/(x^2-4);　//定義一函數$\dfrac{x^2+2x-8}{x^2-4}$.，函數名稱叫做 f

(%o1) $\dfrac{x^2+2x-8}{x^2-4}$

(%i2) plot2d([f],[x,-4,3],[y,-3,5]);　繪圖指令解說：plot2d([expr，x_range，options])，plot2d 是 Maxima 的繪圖指令，maxima 執行到這時，會去呼叫 gunplot 來繪製圖形。

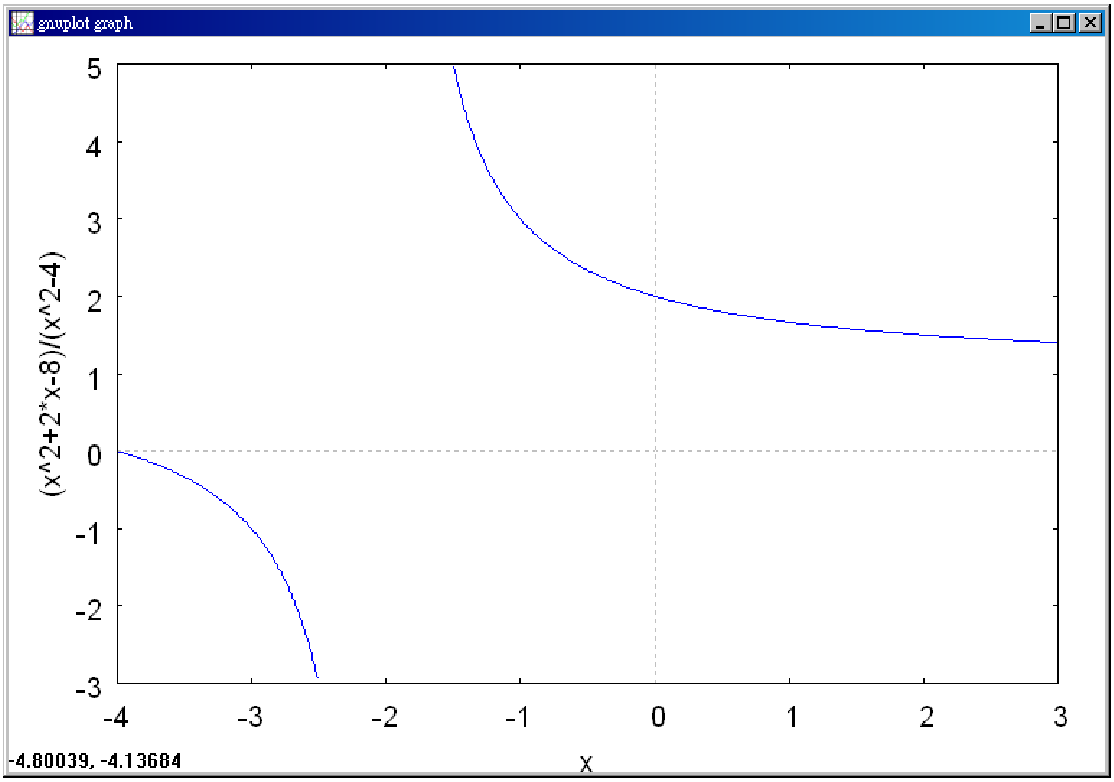
expr：是你要繪製的函數，這例是$\dfrac{x^2+2x-8}{x^2-4}$.函數圖形

x_range：是 x 軸的顯示範圍，當然可以指定 x 軸的顯示範圍，我們也可以指定 y 軸的顯示範圍，如果不指定 y 軸，系統也會自動設定適當的大小，不過一定要指定 x 軸，這裡我們給定 y 軸的範圍-3~5，另外函數中的變數要與範圍指定的變數相同。

options：指其它的繪圖選項，如線的顏色，圖形背景色，線的大小，線型‧‧‧‧等等。

```
plot2d: expression evaluates to non-numeric value somewhere in plot
```

(%o2)



(%i3) f:(x^2+2*x-8)/(x^2-4); //建立一方程式 $\frac{x^2+2x-8}{x^2-4}$.，方程式名稱叫做 f

(%o3) $\frac{x^2+2x-8}{x^2-4}$

(%i4) limit(f,x,-2); 極限指令：limit(方程式，極限變數，範圍) //此例 f 爲前所定義之方程式 $\frac{x^2+2x-8}{x^2-4}$.，極限變數爲 x，範圍爲 x 趨近於-2

(%o4) infinity

Begin by simplifying the expression, as shown.

$$f(x)=\frac{x^2+2x-8}{x^2-4}=\frac{(x+4)(x-2)}{(x+2)(x-2)}=\frac{x+4}{x+2},\quad x\neq 2$$

At all x-values other than $x=2$, the graph of f coincides with the graph of

$g(x)=(x+4)/(x+2)$. So, you can apply Theorem 1.14 to g to conclude that there is a vertical asymptote at $x=-2$, as shown in Figure 1.43. From the graph, you can see that

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{x^2+2x-8}{x^2-4} = -\infty \quad \text{and} \quad \lim_{x\to -2^+} \frac{x^2+2x-8}{x^2-4} = \infty.$$

Note that $x = 2$ is not a vertical asymptote.

Example 4. Determining Infinite Limits

Find each limit.

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-3x}{x-1} \quad \text{and} \quad \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-3x}{x-1}$$

Solution：(%i1) f:(x^2-3*x)/(x-1); //定義一函數 $\dfrac{x^2-3x}{x-1}$ ，函數名稱叫做 f

(%o1) $\dfrac{x^2 - 3\,x}{x - 1}$

(%i2) plot2d([f],[x,-4,6],[y,-6,6]); 繪圖指令解說：plot2d([expr，x_range，options])，plot2d 是 Maxima 的繪圖指令，maxima 執行到這時，會去呼叫 gunplot 來繪製圖形。

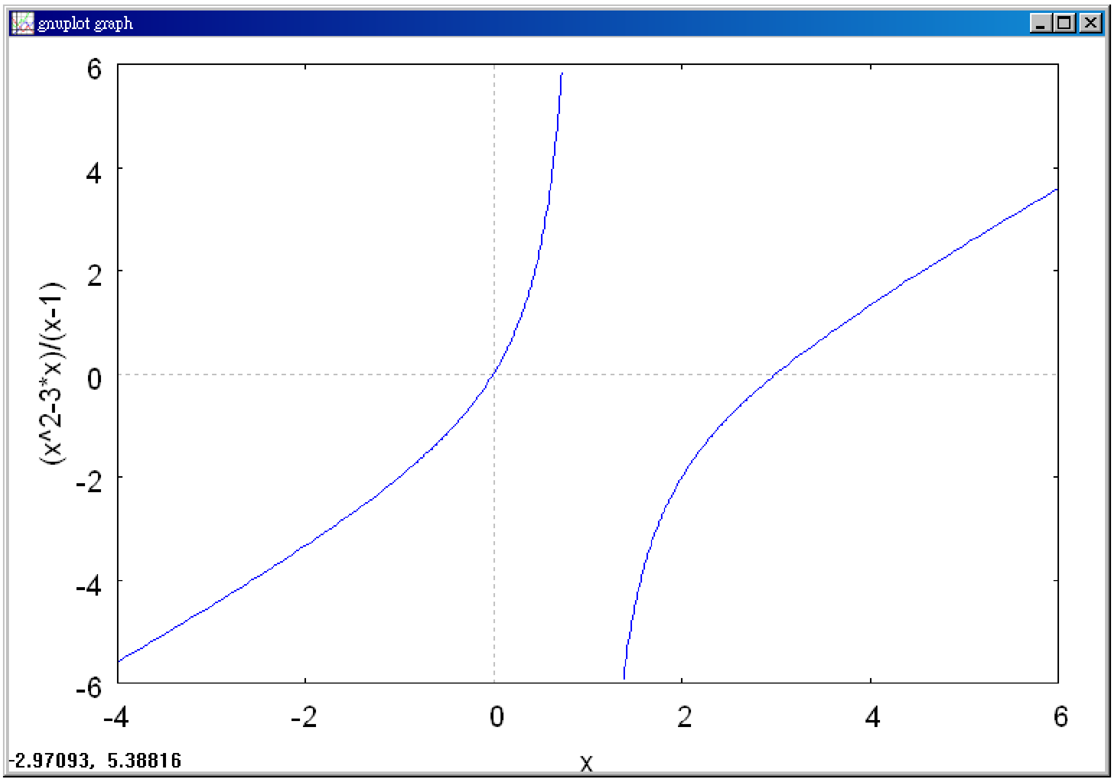
expr：是你要繪製的函數，這例是 $\dfrac{x^2-3x}{x-1}$ 函數圖形

x_range：是 x 軸的顯示範圍，當然可以指定 x 軸的顯示範圍，我們也可以指定 y 軸的顯示範圍，如果不指定 y 軸，系統也會自動設定適當的大小，不過一定要指定 x 軸，這裡我們給定 y 軸的範圍-6~6，另外函數中的變數要與範圍指定的變數相同。

options：指其它的繪圖選項，如線的顏色，圖形背景色，線的大小，線型‧‧‧‧等等。

```
plot2d: expression evaluates to non-numeric value somewhere in plot
```

(%o2)



(%i3) f:(x^2-3*x)/(x-1);　//建立一方程式 $\dfrac{x^2-3x}{x-1}$ ，方程式名稱叫做 f

(%o3) $\dfrac{x^2 - 3\,x}{x - 1}$

(%i4) 'limit(f,x,1);　有時我們會希望呈現未運算前的格式，在 maxima，我們只需要在方程式前面加上「 ' 」，maxima 就不會運算該程式

(%o4) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3\,x}{x - 1}$

(%i5) limit(f,x,1);　極限指令：limit(方程式，極限變數，範圍)　//此例 f 爲前所定義之方程式 $\dfrac{x^2-3x}{x-1}$ ，極限變數爲 x，範圍爲 x 趨近於 1

(%o5) *infinity*

Because the denominator is 0 when $x=1$ (and the numerator is not zero), you know that the graph of $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{x-1}$ has a vertical asymptote at $x=1$. This means that each of the given limits is either ∞ or $-\infty$. A graphing utility can help determine the result. From the graph of f shown in Figure 1.44, you can see that the graph approaches ∞ from the left of $x=1$ and approaches $-\infty$ from the right of $x=1$. So, you can conclude that $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-3x}{x-1}=\infty$ The limit from the left is infinity.

and $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-3x}{x-1}=-\infty.$ The limit from the right is negative infinity.

Example 5. Determining Limits

a. Because $\lim\limits_{x\to 0}1=1$ and $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=\infty$, you can write

$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)=\infty$. Property 1, Theorem 1.15

(%i1) limit(1+1/x^2,x,0); $\boxed{\text{極限指令：limit(方程式，極限變數，範圍)}}$ //此例 f 為前所定義之方程式$1+\dfrac{1}{x^2}$，極限變數為 x，範圍為 x 趨近於 0

(%o1) ∞

b. Because $\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+1)=2$ and $\lim\limits_{x\to 1^-}(\cot \pi x)=-\infty$, you can write

$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2+1}{\cot \pi x}=0.$ Property 3, Theorem 1.15

(%i1) limit((x^2+1)/cot((%pi)*x),x,1); $\boxed{\text{極限指令:limit(方程式,極限變數,範圍)}}$ //此例 f 為前所定義之方程式$\dfrac{x^2+1}{\cot \pi x}$，極限變數為 x，範圍為 x 趨近於 1

(%o1) 0

c. Because $\lim\limits_{x\to 0^+}3=3$ and $\lim\limits_{x\to 0^+}\cot x=\infty$, you can write

$\lim_{x \to 0^+} 3\cot x = \infty.$ Property 2, Theorem 1.15

(%i1) limit(3*cot(x),x,0); 極限指令：limit(方程式，極限變數，範圍) //此例 f 爲前所定義之方程式 $3\cot x$，極限變數爲 x，範圍爲 x 趨近於 0

(%o1) *infinity*