第二章 微分

§2-1 微分：瞬間改變的比率

$f(x)$ 函數

$$\text{定義域} \xrightarrow{f} \text{值域}$$

x：自變數　　$y=f(x)$ 因變數

改變

$$\underbrace{\lim_{h\to 0}}_{\text{瞬間}} \underbrace{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}_{\text{比率}} = \underbrace{f'(a)}_{\text{導數}}$$

固定 a 點

改變：$a+h$ ($h=\Delta x$，一點點)

$\Delta y = f(a+h)-f(a)$

比率：$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ (差分商)

瞬間：$h\to 0$，$\Delta x \to 0$

*定義：$f(x)$ 在 $x=a$ 的導數，$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ 存在，則稱 $f(x)$ 在 $x=a$ 可微分。

☆註：若導數極限不存在，則 $f(x)$ 在 a 不可微分

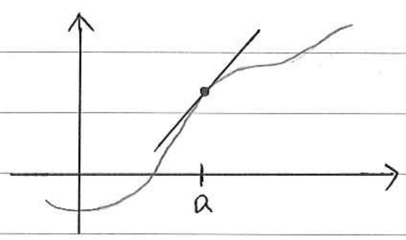
*定義：導函數存在的 $f'(x)=\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 為 $f(x)$ 的導函數

又記為 $\dfrac{dy}{dx} = y' = f' = \dfrac{d f(x)}{dx}$

變形 $f'(a) = \displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ (同義式)

*導數的幾何意義

函數圖形切線的斜率



☆註：「特殊點」：分點左極限、右極限的討論

例如：絕對值、高斯函數、指數函數、根號函數

☆註：導數 $f'(a)$ 存在，代表 1、$\displaystyle\lim_{x\to a^+}f(x) = \lim_{x\to a^-}f(x) = \lim_{x\to a}f(x)$

2、$\displaystyle\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$

*定理：可微必定連續

設 $f(x)$ 在 $x=a$ 可微，則 $f(x)$ 在 a 連續

證明：∵ $f(x)$ 在 $x=a$ 可微

∴ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 存在

則 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}[f(x)-f(a)+f(a)]=\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)+f(a)\right]$

$=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\lim\limits_{x\to a}(x-a)+f(a)$

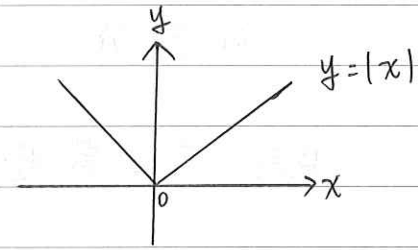
$=f(a)$

*註：連續不一定可微的3個例子

1、$f(x)=|x|$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-0}{x}=1$

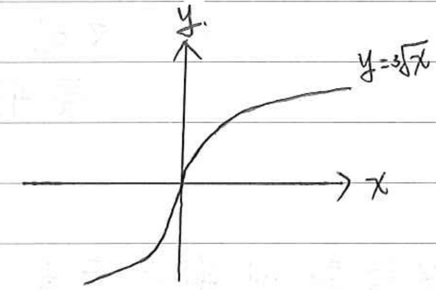
$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x-0}{x}=-1$



2、$y=\sqrt[3]{x}$ 鉛直切線

$x=0$，$f'(0^+)=f'(0^-)=\infty$（極限不存在）

不可微



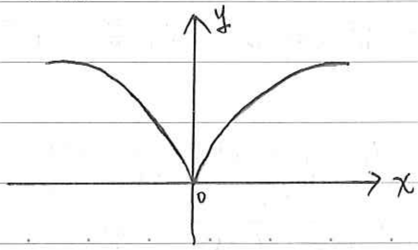
3、$y=x^{\frac{2}{3}}$ 尖點

$f'(0^+)=\infty$

$f'(0^-)=-\infty$

極限不存在，不可微

*應用：曲線 $f(x)$，則點 $(a,f(a))$ 的切線為 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$



複習：

*微分：瞬間改變的比率

$$\underset{x}{(A)} \xrightarrow{f} \underset{y=f(x)}{(B)}$$

定義式：$f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

同義式：令 $h = x-a$ 的變形

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

例1：若 $f(x) = x^2$，依微分之定義式與同義式，求 $f'(2) = ?$

解：定義式 $f'(2) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = \dfrac{\cancel{4}+4h+h^2-\cancel{4}}{h} = \dfrac{h(h+4)}{\cancel{h}} = h+4$

$= 4$ ※ $(\because h \to 0)$

同義式 $f'(2) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-2^2}{x-2} = \dfrac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = 4$ ※

類1：設 $f(x) = x^2+2x$，依微分的定義式與同義式，求 $f'(1) = ?$

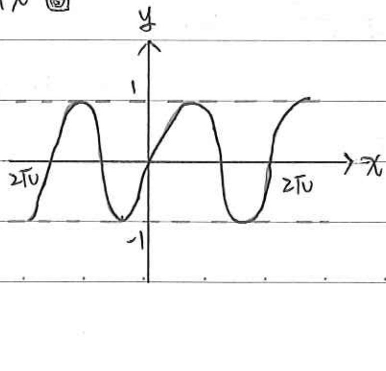
解：定義式 $f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(1+h)^2+2(1+h)-(1^2+2)}{h} = \dfrac{h^2+4h}{h} = \dfrac{h(h+4)}{\cancel{h}} = 4$ ※

同義式 $f'(1) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+2x-(1+2)}{x-1} = \dfrac{x^2+2x-3}{x-1} = \dfrac{\cancel{(x-1)}(x+3)}{\cancel{x-1}} = 4$

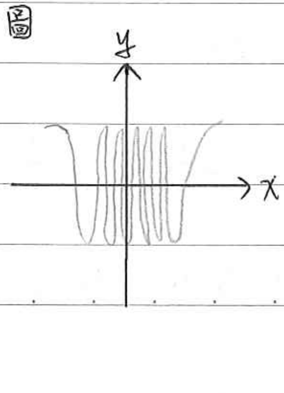
例2：若 $f(x) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ 求 $f'(0) = ?$

解：$f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \sin\frac{1}{x} - 0}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} \sin\frac{1}{x}$ 不存在 ※

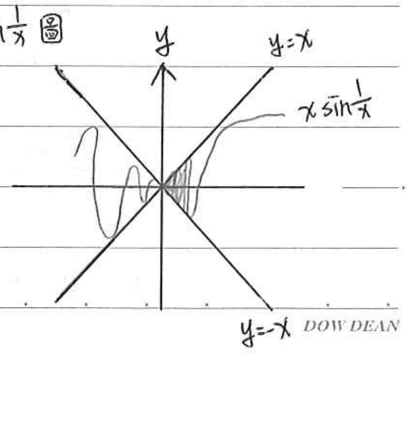
$\sin x$ 圖



$\sin\frac{1}{x}$ 圖



$x\sin\frac{1}{x}$ 圖



Date　　NO.

類 2：$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 求 $f'(0) = ?$

解：$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\sin\frac{1}{x} - 0}{x-0} = \lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$ ※

例 3：$f(x) = \begin{cases} x^2+3, & x > 0 \\ mx+b, & x \le 0 \end{cases}$ 為可微分函數，求 m 與 b 的值？

解：可微必連續 ← 極限存在且等於 f 值

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2+3 = 3 \\ &\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} mx+b = b \end{aligned}\right\} b = 3 \text{ ※}$$

可微代表極限式存在

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+\cancel{3}-\cancel{3}}{x} = \lim_{x\to 0^+} x = 0 \\ &\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{mx+\cancel{b}-\cancel{b}}{x} = m \end{aligned}\right\} m = 0 \text{ ※}$$

類 3：$f(x) = \begin{cases} x^2 - a, & x \ge 2 \\ mx+6, & x < 2 \end{cases}$ 可微，求 m、a = ?

解：

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 2^+} x^2 - a = 4 - a \\ &\lim_{x\to 2^-} mx+6 = 2m+6 \end{aligned}\right\} 2m+6 = 4-a \text{ — ①}$$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-\cancel{a}-4+\cancel{a}}{x-2} = \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}} = 4 \\ &\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{mx+\cancel{6}-2m-\cancel{6}}{x-2} = \frac{m\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = m \end{aligned}\right\} m = 4 \text{ ※}$$

$m = 4$ 代回 ① 得 $a = -10$ ※

例4：$f(x)=|x^2-1|$，則 $f(x)$ 在 $x=1$ 是否可微？

解：找出絕對值為0的點 $\Rightarrow x=1$

依據同義式
$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{(x^2-1)-0}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}x+1=2\\ \lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{-(x^2-1)-0}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{-(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}=-2\end{cases}$$

$\therefore f(x)$ 在 $x=1$ 不可微 ※

類4：$f(x)=|x^2-4|$，則 $f(x)$ 在 $x=2$ 是否可微？

解：
$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x^2-4-0}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^+}x+2=4\\ \lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{-(x^2-4)-0}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{-\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}}=-4\end{cases}$$

$\therefore f(x)$ 在 $x=2$ 不可微 ※

習題 2-1

1、$f(x)=\begin{cases}x^3\sin\frac{1}{x} & ,\ x\neq0\\ 0 & ,\ x=0\end{cases}$ 求 $f'(0)=?$

解：$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cancel{x^3}^{\,2}\sin\frac{1}{x}-0}{\cancel{x-0}}=\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\frac{1}{x}=0$ ※

2、$f(x)=\begin{cases}x^2+5 & ,\ x<2\\ 7x-5 & ,\ x\geq2\end{cases}$ 則 $f(x)$ 在 $x=2$ 是否可微？

解：
$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to2^-}x^2+5=9\\ \lim\limits_{x\to2^+}7x-5=9\end{cases}$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x^2+5-9}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{(x+2)(x-2)}{x-2}=4\\ \lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{7x-5-9}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{7\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}}=7\end{cases}$$

$\because 4\neq7$

$\therefore f(x)$ 在 $x=2$ 不可微 ※

§2-2 基本微分公式

＊微分：瞬間改變的比率

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

上一節利用這公式算 $f(x)=x^2$，$f'(2)$ 太繁鎖，因此整理許多公式應用。

＊公式：設 $f(x)$、$g(x)$ 可微、c 常數

1、$(c)'=0$　　例如：$(\sqrt{2})'=0$、$(\pi)'=0$

2、$[cf(x)]'=cf'(x)$

3、$[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$

4、$[f(x)g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$　乘法微分公式

5、$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

6、$[x^n]'=nx^{n-1}$　　例如：$[x^1]'=1\cdot x^0=1$

例1：$f(x)=x^3-3x^2+6x$，則 $f'(x)=?$

解：$f'(x)=3x^2-6x+6$ ※

類1：$f(x)=3x^5-4x^4$，則 $f'(x)=?$

解：$f'(x)=15x^4-16x^3$ ※

＊數學符號原則

1、最簡分數　$\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

2、乘冪不可有分數、負數　$x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$、$x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{x}}$（變形）

例 2：$f(x) = 2\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$，則 $f'(x) = ?$

解：遇到不會的，先"變形"

$$f(x) = 2x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x^{\frac{1}{2}-1} - (-\frac{1}{2}) \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}-1}$$

$$= x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{4\sqrt{x^3}} \quad ※$$

類 2：$f(x) = 3\sqrt[3]{x^2} - 4\sqrt{x}$，求 $f'(x) = ?$

解：$f(x) = 3x^{\frac{2}{3}} - 4x^{\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = 3 \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} - 4 \cdot \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1}$$

$$= 2x^{-1/3} - 2x^{-1/2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt[3]{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} \quad ※$$

例 3：$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$，求 $f'(x) = ?$

解：$(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2+1) - x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} \quad ※$$

※額外（變形）

1、$y = \frac{5}{2x^3}$

解：$f'(x) = \frac{0 \cdot 2x^3 - 5 \cdot 6x^2}{(2x^3)^2}$

$$= \frac{-30x^2}{4x^6}$$

$$= -\frac{15x^2}{2x^6} \quad ※$$

2、$y = \frac{5}{(2x)^3}$

解：$f'(x) = \frac{0 \cdot 8x^3 - 5 \cdot 24x^2}{(8x^3)^2}$

$$= \frac{-120x^2}{64x^6}$$

$$= \frac{-15x^2}{8x^6} \quad ※$$

Date NO.

3. $y=\dfrac{9}{3x^{-2}}$

解：$f'(x)=\dfrac{0\cdot 3x^{-2}-9\cdot(-6x^{-3})}{(3x^{-2})^{2}}$

$=\dfrac{54x^{-3}}{9x^{-4}}$

$=\dfrac{6x^{4}}{x^{3}}$ ※

4. $y=\dfrac{7}{(3x)^{-2}}$

解：$f'(x)=\dfrac{0\cdot(3x)^{-2}-7\cdot(-2)\cdot\frac{1}{27x^{3}}\cdot 3}{[(3x)^{-2}]^{2}}$

$=\dfrac{\frac{42}{27x^{3}}}{\frac{1}{81x^{4}}}=126x$ ※

5. $y=\dfrac{3x^{2}-x+1}{x}$

解：$f'(x)=\dfrac{(6x-1)\cdot x-(3x^{2}-x+1)}{x^{2}}=\dfrac{3x^{2}-1}{x^{2}}$ ※

6. $y=(3x-2x^{2})(5+4x)$

解：$f'(x)=(-4x+3)(5+4x)+(3x-2x^{2})\cdot 4=-24x^{2}+4x+15$ ※

7. $y=\dfrac{5x-2}{x^{2}+1}$

解：$\dfrac{5(x^{2}+1)-(5x-2)\cdot 2x}{(x^{2}+1)^{2}}=\dfrac{-5x^{2}+4x+5}{(x^{2}+1)^{2}}$ ※

8. $y=\dfrac{3-\frac{1}{x}}{x+5}$

$\frac{1}{x}=x^{-1}$

解：$f'(x)=\dfrac{[(0-(-1)\cdot x^{-2}](x+5)-(3-x^{-1})\cdot 1}{(x+5)^{2}}$

$=\dfrac{x^{-2}(x+5)-(3-x^{-1})}{(x+5)^{2}}$

*微分的幾何意義

1、函數圖形切線斜率

2、曲線 $y=f(x)$ 切點 $(a,f(a))$ 的切線方程式 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$

例4：求 $y=3x^5-4x^2+1$ 在 $(1,0)$ 的切線方程式？

解：$y'=15x^4-8x$ $y'(1)=7$（斜率）

切線方程式 $y=7(x-1) \Rightarrow y=7x-7$ #

類4：求 $y=x^4-1$ 在 $(1,0)$ 之切線方程式？

解：$y'=4x^3$ $y'(1)=4$（斜率）

切線方程式 $y=4(x-1) \Rightarrow y=4x-4$ #

§2-3 三角函數、指數、對數微分（導數：瞬間改變的比率）

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$\cos h=1$

例如：$f'(x)=[\sin x]'=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cos x\sin h}{h}=\cos x$$

*基本公式

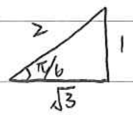
1、$[\sin x]'=\cos x$ 4、$[\cot x]'=-\csc^2 x$

2、$[\cos x]'=-\sin x$ 5、$[\sec x]'=\tan x\sec x$

3、$[\tan x]'=\sec^2 x$ 6、$[\csc x]'=-\cot x\csc x$

例 1：$f(x) = \sin x$，求 $f'(\frac{\pi}{6}) = ?$

解：$\pi = 180°$，$\frac{\pi}{6} = 30°$



$f'(30°) = [\sin 30°]' = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ※

類 1：$f(x) = \cos x$，求 $f'(30°) = ?$

解：$f'(30°) = [\cos 30°]' = -\sin 30° = -\frac{1}{2}$ ※

＊定義：自然指數 e

$e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$，當 $n \to \infty$，e 為無理數（$e \approx 2.71828$）

定理：$[e^x]' = e^x$

＊定義：對數

$\ln x = \log_e x$

定理：$[\ln x]' = \frac{1}{x}$

例 2：$e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$，求 ① $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{a}{n})^n = ?$ ② $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{bn} = ?$

解：① $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{a}{n})^n \overset{\text{令 } n=am}{=} \lim_{m\to\infty}(1+\frac{1}{m})^{am} = \lim_{m\to\infty}[(1+\frac{1}{m})^m]^a = e^a$ ※

② $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{bn} = \lim_{n\to\infty}[(1+\frac{1}{n})^n]^b = e^b$ ※

補 例3：$h(x)=(3x-2x^2)(5+4x)$，求 $h'(x)=?$

解：$h'(x)=(3-4x)(5+4x)+(3x-2x^2)(4)$

$=-16x^2-8x+15+12x-8\cdot x^2$

$=-24x^2+4x+15$ ※

解2：先展開

$h(x)=15x+12x^2-10x^2-8x^3$

$=-8x^3+2x^2+15x$

$h'(x)=-24x^2+4x+15$

補 例4：$y=2x\cos x-2\sin x$，求 $y'=?$

解：$y'=2\cdot\cos x+2x\cdot(-\sin x)-2(\cos x)$

$=2\cos x-2x\sin x-2\cos x$

$=-2x\sin x$ ※

補 求導數

1. $g(x)=(x^2+3)^3$
2. $f(x)=(2x^3+5x)(x-3)(x+2)$
3. $h(x)=\dfrac{c^2-x^2}{c^2+x^2}$
4. $f(t)=t^2\sin t$
5. $y=\dfrac{1-\sin x}{\cos x}$
6. $y=\dfrac{\sec x}{x}$
7. $f(x)=\sin x\cos x+2x\sin x+x^2\cos x$
8. $h(\theta)=5\theta\sec\theta+\theta\tan\theta$

§2-4 連鎖律（合成函數的微分）

$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x))$ $[g\circ f](x)=g(f(x))$

＊定理：連鎖律

$y=f(u)$，$u=g(x)$ 可微函數，則 $[g\circ f]'(x)=[g(f(x))]'=g'[f(x)]\cdot f'(x)$

Date NO.

＊延伸公式

1、$\{\sin[f(x)]\}' = \cos[f(x)] \cdot f'(x)$

2、$\{\cos[f(x)]\}' = -\sin[f(x)] \cdot f'(x)$

3、$\{e^{f(x)}\}' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$

4、$\{\ln[f(x)]\}' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$

例 1：1、$\frac{d}{dx}(\sin 2x) = ?$　2、$\frac{d}{dx}(\sin(x^2)) = ?$　3、$\frac{d}{dx}[(\sin x)^2] = ?$

解：1、$\frac{d}{dx}(\sin 2x) = \cos 2x \cdot 2 = 2\cos 2x$ ※

2、$\frac{d}{dx}(\sin(x^2)) = \cos(x^2) \cdot 2x = 2x\cos(x^2)$ ※

3、$\frac{d}{dx}[(\sin x)^2] = 2\sin x \cdot \cos x = 2\sin x \cos x$ ※

類 1：$\frac{d}{dx}(\sec(x^2)) = ?$

解：$\frac{d}{dx}(\sec(x^2)) = \tan(x^2)\sec(x^2) \cdot 2x$ ※

例 2：1、$\frac{d}{dx}(e^{x^2}) = ?$　2、$\frac{d}{dx}(e^{(-x^2-x)}) = ?$

解：1、$\frac{d}{dx}(e^{x^2}) = e^{x^2} \cdot 2x = 2xe^{x^2}$ ※

2、$\frac{d}{dx}(e^{(-x^2-x)}) = e^{-x^2-x} \cdot (-2x-1) = -(2x+1)e^{-x^2-x}$ ※

例3：1、$\frac{d}{dx}(a^x)=?$　　2、$\frac{d}{dx}(\log_a x)=?$

解：1、$\frac{d}{dx}(a^x)=\frac{d}{dx}(e^{x\ln a})=e^{x\ln a}\cdot\ln a=\ln a\cdot a^x$ ※

2、$\frac{d}{dx}(\log_a x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)=\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{\ln a\cdot x}$ ※

* 換底：$a^x=e^{x\ln a}$ 、$\log_a x=\frac{\ln x}{\ln a}$

類3：$\frac{d}{dx}(n^{\frac{x}{a}})=?$

解：$\frac{d}{dx}(n^{\frac{x}{a}})=\frac{d}{dx}(e^{\frac{x}{a}\ln n})=e^{\frac{x}{a}\ln n}\cdot\frac{\ln n}{a}=n^{\frac{x}{a}}\cdot\frac{\ln n}{a}$ ※

例4：$\frac{d}{dx}2^{\tan x}\Big|_{\frac{\pi}{4}}=?$

解：$\frac{d}{dx}2^{\tan x}=[\ln 2\cdot 2^{\tan x}]\cdot(\sec^2 x)=\ln 2\cdot 2^{\tan x}\sec^2 x$

$\frac{d}{dx}2^{\tan x}\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\ln 2\cdot 2^{\tan\frac{\pi}{4}}\cdot\sec^2\frac{\pi}{4}=4\cdot\ln 2$ ※

類4：$f(x)=3^{3x}$，求 $f'(x)=?$

解：$\frac{d}{dx}(3^{3x})=\frac{d}{dx}(e^{3x\ln 3})=e^{3x\ln 3}\cdot 3\ln 3=(3\ln 3)\cdot 3^{3x}$ ※

例5：$\frac{d}{dx}[\ln(x^2+1)]=?$

解：$\frac{d}{dx}[\ln(x^2+1)]=\frac{2x}{x^2+1}$ ※

Date　　NO.

類 5. $\frac{d}{dx}[\ln(x+\sqrt{x^2+1})]=?$

解：$\frac{d}{dx}[\ln(x+\sqrt{x^2+1})] = \frac{1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ ※

例 6：$y=u^6$，$u=3x^4+5$　求 $\frac{dy}{dx}=?$（以 x 表示）

解：$y=(3x^4+5)^6$，$y'=6(3x^4+5)^5\cdot 3\cdot 4x^3 = 72x^3(3x^4+5)^5$

類 6：$y=t^2+1$，$t=e^x$　求 $\frac{dy}{dx}=?$（以 x 表示）

解：$y=(e^x)^2+1$，$y'=e^{2x}\cdot 2 = 2e^{2x}$ ※

例 7：$\frac{d}{dx}[\cos(\cos x^2)]=?$

解：$\frac{d}{dx}[\cos(\cos x^2)] = -\sin(\cos x^2)\cdot[(-\sin x^2)\cdot 2x] = 2x\sin(\cos x^2)\sin x^2$ ※

類 7：$\frac{d}{dx}[\sin(\sin x^2)]=?$

解：$\frac{d}{dx}[\sin(\sin x^2)] = \cos(\sin x^2)\cdot(\cos x^2)\cdot 2x = 2x\cos(\sin x^2)\cos x^2$ ※

例 8：$\frac{d}{dx}(\sqrt{3x+7})=?$

解：$\frac{d}{dx}(\sqrt{3x+7}) = \frac{d}{dx}[(3x+7)^{1/2}] = \frac{1}{2}(3x+7)^{-1/2}\cdot 3 = \frac{3}{2\sqrt{3x+7}}$ ※

類 8：$\frac{d}{dx}(\sqrt{x^2+3x+5})=?$

解：$\frac{d}{dx}(\sqrt{x^2+3x+5}) = \frac{d}{dx}[(x^2+3x+5)^{1/2}] = \frac{1}{2}(x^2+3x+5)^{-1/2}\cdot(2x+3)$

$= \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x+5}}$ ※

§2-5 高階微分

$$y'(x)=\frac{dy}{dx}\ ,\ y''(x)=\frac{dy}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)\ \ldots\ldots\ y^{n}(x)=\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)=\frac{d^{n}y}{dx^{n}}$$

例1：$f(x)=\ln x$，求 $f'''(x)=?$

解：$f'(x)=\frac{1}{x}$，$f''(x)=-\frac{1}{x^2}$，$f'''(x)=2x^{-3}=\frac{2}{x^3}$ ※

類1：$f(x)=\ln(1+x)$，求 $f'''(x)=?$

解：$f'(x)=\frac{1}{1+x}$，$f''(x)=\frac{-1}{(1+x)^2}$，$f'''(x)=\frac{2}{(1+x)^3}$ ※

例2：$f(x)=2x^{3/2}$，求 $f''(4)=?$

解：$f'(x)=3x^{1/2}$，$f''(x)=\frac{3}{2}x^{-1/2}$ $\therefore f''(4)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$ ※

類2：$f(x)=e^{x}(x-1)$，求 $f''(0)=?$

解：$f'(x)=e^{x}(x-1)+e^{x}=e^{x}x$，$f''(x)=e^{x}x+e^{x}=e^{x}(x+1)$

$\therefore f''(0)=1\cdot(0+1)=1$ ※

§2-6 隱函數微分

$y=f(x)$ 數學關係式明顯函數，隱藏函數 $y=f(x)$ 在 $F(x,y)=0$ 中，有時無法解出如何微分。

※註：視 y 為 x 函數，將 $F(x,y)=0$ 對 x 微分，得到 $G(x,y,\frac{dy}{dx})=0$ 的新的方程式，求出 $\frac{dy}{dx}$。

例1：$y^3+y^2-5y-x^2=-4$，求 $\frac{dy}{dx}=?$

解：直接對方程式左右邊微分

$$3y^2\frac{dy}{dx}+2y\frac{dy}{dx}-5\frac{dy}{dx}-2x=0$$

$$\frac{dy}{dx}(3y^2+2y-5)=2x \quad , \quad \frac{dy}{dx}=\frac{2x}{3y^2+2y-5}$$ ※

例2：求 $2x^3-x^2y^2+4y^3=16$ 在(2,1)的切線斜率？

解：$6x^2-2xy^2-2x^2yy'+12y^2y'=0 \quad (y'=\frac{dy}{dx})$

$$y'=\frac{2xy^2-6x^2}{12y^2-2x^2y} \qquad y'\Big|_{(2,1)}=-5$$ ※

類2：求 $y^2-2y+x^2=3$ 在(2,1)的切線方程式？

解：$2yy'-2y'+2x=0$

$$y'=\frac{-x}{y-2} \quad , \quad y'\Big|_{(2,1)}=2$$ (斜率) 方程式：$y-1=2(x-2)$ ※

例3：$2x^2-y^2=-1$，求 $\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{(2,3)}=?$

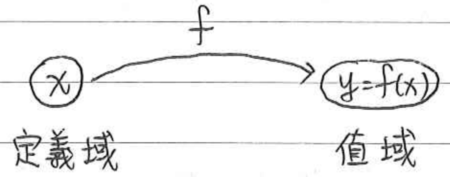
解：先求 $y'(=\frac{dy}{dx})$

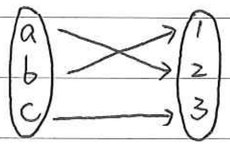
$$4x-2yy'=0 \quad , \quad y'=\frac{2x}{y} \quad , \quad y'\Big|_{(2,3)}=\frac{4}{3}$$

$$y''=\frac{2y-2xy'}{y^2} \quad , \quad y''\Big|_{(2,3)}=\frac{6-4\cdot\frac{4}{3}}{9}=\frac{2}{27}$$ ※

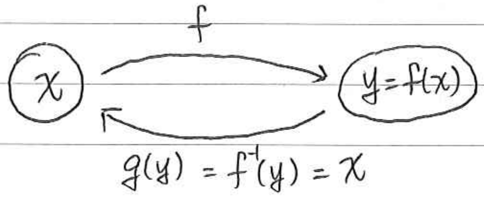
§2-7 反函數微分

函數：貴牢單一價錢　　　　函數 f 是一對一（連連看）





※定義：$y=f(x)$ 是一對一函數，則存在逆映射 $g(y)=x$，g 為 f 之反函數，記為 $g=f^{-1}$。　$f^{-1}(y)=x$



※反函數性質

1. $(f^{-1})^{-1}=f$
2. $f^{-1}(f(x))=x$　；　$f^{-1}(f(y))=y$
3. 給定 $y=f(x)$ 求反函數工具：將 $y=f(x)$ 之 x 以 $f^{-1}(y)$ 代入，得 $f(f^{-1}(y))=y$，此式僅含 y，試著將 $f^{-1}(y)$ 解出，解出後再按照正規函數換回 $y=g(x)$ 型式。

補類1：$y=\sqrt{x-1}$，求反函數？

解：偶次開根內非負（≥ 0），對函數 y，$x-1\geq 0$，定義域 $x\geq 1$
y 在 $x\geq 1$ 是一對一函數，存在反函數，由 y 表示 x（解 x，單獨解 x 在等式左邊）

$y=\sqrt{x-1} \Rightarrow y^2=x-1 \Rightarrow x=y^2+1$

使用正規 x, y 表示法：$f^{-1}(x)=x^2+1$

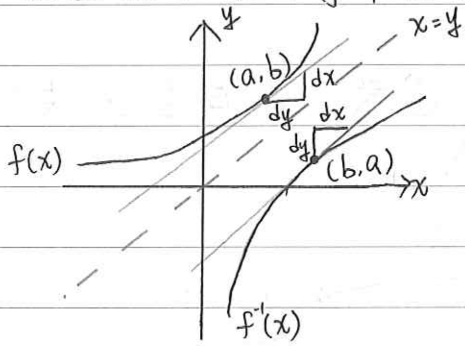
這個型式 y-自變，x-因變
不符一般函數型式 $(x, f(x))$
變換 $y=x^2+1$
$f^{-1}(x)=x^2+1$

※註：解 x 有時做不到 隱函數

類1：$y=\sqrt{-x-1}$，求反函數？

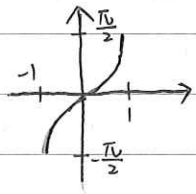
解：$y^2=-x-1$ ，$x=-1-y^2=f^{-1}(y)$ ，$\therefore f^{-1}(x)=-1-x^2$ ※

※定理：函數 f 與反函數 f^{-1} 在 xy 平面上圖形對稱於 $x=y$ 之直線



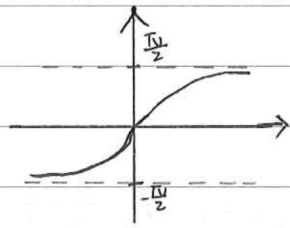
※定理：$y=f(x)$ 為可逆函數，且 $g(y)$ 為反函數，則 $g'(y)=\frac{1}{f'(x)}$ 「倒數」

※定義：反三角函數



1、$y=\sin^{-1}x=\arcsin x$ ，定義域：$-1\le x\le 1$

值域：$-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$



2、$y=\cos^{-1}x=\arccos x$ ，定義域：$-1\le x\le 1$

值域：$0\le y\le\pi$

3、$y=\tan^{-1}x=\arctan x$ ，定義域：$-\infty<x<\infty$

值域：$-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$

4、$y=\cot^{-1}x=\operatorname{arccot}x$ ，定義域：$-\infty<x<\infty$

值域：$0<y<\pi$

5、$y=\sec^{-1}x=\operatorname{arcsec}x$ ，定義域：$|x|\ge 1$

值域：$(0,\frac{\pi}{2})\cup(\pi,\frac{3}{2}\pi)$

6、$y=\csc^{-1}x=\operatorname{arccsc}x$ ，定義域：$|x|\ge 1$

值域：$(0,\frac{\pi}{2})\cup(\pi,\frac{3}{2}\pi)$

※反三角函數的微分

例：$\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)=?$

解：令 $y=\sin x$ ， $x=\sin^{-1}y$

依據反函數微分理論

$$\frac{d}{dy}(\sin^{-1}y)=\frac{1}{\frac{d}{dx}(\sin x)}=\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

合乎 $(x,f(x))$ 符號

$\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 且 $|x|<1$ $\begin{cases}1.\text{偶根內非負}(\geq 0)\\2.\text{分母不為}0\end{cases}\Rightarrow |x|<1$

1. $\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
2. $\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
3. $\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)=\frac{1}{1+x^2}$
4. $\frac{d}{dx}(\cot^{-1}x)=\frac{-1}{1+x^2}$
5. $\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x)=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
6. $\frac{d}{dx}(\csc^{-1}x)=\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

例1：求 $\frac{d}{dx}\sin^{-1}(x^2)=?$

解：合成函數，先 x^2 再 $\sin^{-1}(x^2)$

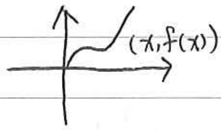
微分連鎖律 $\frac{d}{dx}\sin^{-1}(x^2)=\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\cdot 2x=\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$ ※

類1：求 $\frac{dy}{dx}\tan^{-1}(x^2)=?$

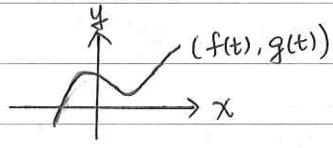
解：$\frac{1}{1+x^4}\cdot 2x=\frac{2x}{1+x^4}$ ※

§2-8 參數式微分

函數式 $x \in [0,1]$



參數式 $t \in [0,1]$



$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ 自變數 t

※ 微分

1、$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt} = \dfrac{g'(t)}{f'(t)}$ （結果是 t 函數）

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt} \cdot \dfrac{dt}{dx} = \dfrac{dt}{dx} \cdot \dfrac{dy}{dt}$

2、高階微分

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\underbrace{\left(\frac{dy}{dx}\right)}_{t\text{函數}} = \frac{dt}{dx}\underbrace{\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right]}_{t\text{函數}}$$

例 1：$\begin{cases} x(t) = t^4 + t \\ y(t) = t^3 - t \end{cases}$ 求 $\dfrac{dy}{dx}$、$\dfrac{d^2y}{dx^2} = ?$ （以 t 回答）

解：$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt} = \dfrac{3t^2-1}{4t^3+1}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dt}{dx} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{4t^3+1} \cdot \frac{6t(4t^3+1)-(3t^2-1)\cdot 12t^2}{(4t^3+1)^2}$$

$$= \frac{-12t^4+12t^2+6t}{(4t^3+1)^3} \quad ※$$

例 2：曲線 $\begin{cases} x = t^2 - 2 \\ y = t^3 - 2t + 1 \end{cases}$，求 $t=2$ 時的切線方程式？

解：$t=2$ 時，曲線通過 $(2,5)$

斜率 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(2,5)} = \left.\dfrac{3t^2-2}{2t}\right|_{(2,5)} = \dfrac{5}{2}$

點斜式 $\Rightarrow (y-5) = \dfrac{5}{2}(x-2) \Rightarrow y - \dfrac{5}{2}x = 0$ ※

第三章 微分應用

§3-1 羅必達法則（LH）

極限問題 $\frac{0}{0}$，$\frac{\infty}{\infty}$

※定理：$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ 為 $[\frac{0}{0}]$ 及 $[\frac{\infty}{\infty}]$ 形式

1. 若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$ 且 $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在，則

$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 依此類推至分母不為 0

2. 若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$ 且 $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在，則

$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 依此類推至分母不為 0

例 1：求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=?$

解：原式 $\overset{LH}{\underset{\frac{x}{x}}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x\cdot 2}{1}=2$ ※

例 2：求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}=?$

解：原式 $\overset{LH}{\underset{\frac{0}{0}}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}\overset{LH}{\underset{\frac{0}{0}}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}$ ※

例 3：求 ① $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=?$ ② $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=?$

解：① $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{LH}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$ ※

② $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}\overset{LH}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=0$ ※

※註：當 $x\to\infty$ 時，則 $\ln x<x<x^n<e^x<x^x$

Date NO.

例 4：求 $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\sin x)}{\ln(\tan x)}=?$

解：$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\sin x)}{\ln(\tan x)}\overset{LH}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{\sec^2 x}{\tan x}}=\lim_{x\to 0^+}\cos^2 x=1$ ※

例 5：求 $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=?$

解：$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\approx\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{e^x}=1$ ※

※註：羅必達法則好用但非萬能！若此題用羅必達法則會一直循環而解不出。

例 6：求 $\lim_{x\to 0^+}x\ln x=?$ $(0\cdot\infty)$ 型

解：$\lim_{x\to 0^+}x\ln x\overset{LH}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{LH}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0$ ※

類 6：求 $\lim_{x\to 0^+}(e^x-1)\cot x=?$

解：原式 $=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{\tan x}\overset{LH}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x}{\sec^2 x}=1$ ※

例 7：求 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=?$ $(\infty-\infty)$ 型

解：原式 $=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}\overset{LH}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{\sin x+x\cos x}\overset{LH}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x-x\cos x}{\cos x+\cos x-x\sin x}$

$=\frac{0}{2}=0$ ※

類 7：求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=?$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x-x}{x\sin x}\overset{LH}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\cos x-1}{\sin x+x\cos x}\overset{LH}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-\sin x}{2\cos x-x\sin x}$

$=\frac{0}{2}=0$ ※

例 8：求 $\lim\limits_{x\to\infty}x^{1/x}=?$ (∞^0) 型

解：原式 $=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}=e^0=1$ ※

$(\because x^{1/x}=e^{\frac{\ln x}{x}})$

類 8：求 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+2x)^{\frac{1}{3x}}=?$

解：$\because (1+2x)^{\frac{1}{3x}}=e^{\frac{1}{3x}\ln(1+2x)}$，$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1+2x)}{3x}\overset{LH}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{1+2x}}{3}=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to\infty}(1+2x)^{\frac{1}{3x}}=e^0=1$ ※

例 9：求 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x=?$ (0^0) 型

解：$\because x^x=e^{x\ln x}$，$\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{LH}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0^+}x^x=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x}=e^0=1$ ※

類 9：求 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\sin x)^{\frac{1}{\ln x}}=?$

解：$\because (\sin x)^{\frac{1}{\ln x}}=e^{\frac{\ln(\sin x)}{\ln x}}$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(\sin x)}{\ln x}\overset{LH}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\cos x\cdot\frac{x}{\sin x}\right)=1$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0^+}(\sin x)^{\frac{1}{\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(\sin x)}{\ln x}}=e^1=e$ ※

Date NO.

§3-2 微分均值定理

導數：瞬間改變的比率

$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 導數是 $x=a$ 附近的局部函數行為

問最大區域的變化?

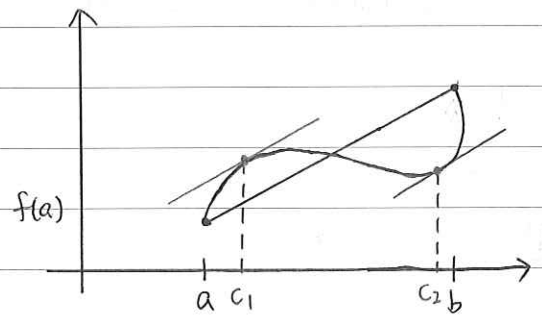
若 $f(t)$ 是車t時間的距離，時間 $[a,b]$ 的平均速率 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$[0,60]$ 分，從屏東到高雄（25km），「平均速度 $\frac{25}{1}=25$ km/hr

⇒儀表板上一定至少一次出現 25 km/hr」（其實好多次?）

※定理：微分均值定理

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 可微，則至少存在點 $c\in(a,b)$，使得 $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$。



切線斜率＝均值

例：$f(x)=x^2$，$x\in[1,5]$，求 $c\in[1,5]$ 且滿足微分均值定理

解：$f'(x)=2x$（微分）

由微分均值定理 $f'(c)=\frac{f(5)-f(1)}{5-1}=\frac{25-1}{4}=6=2c$

$c=3$ ※

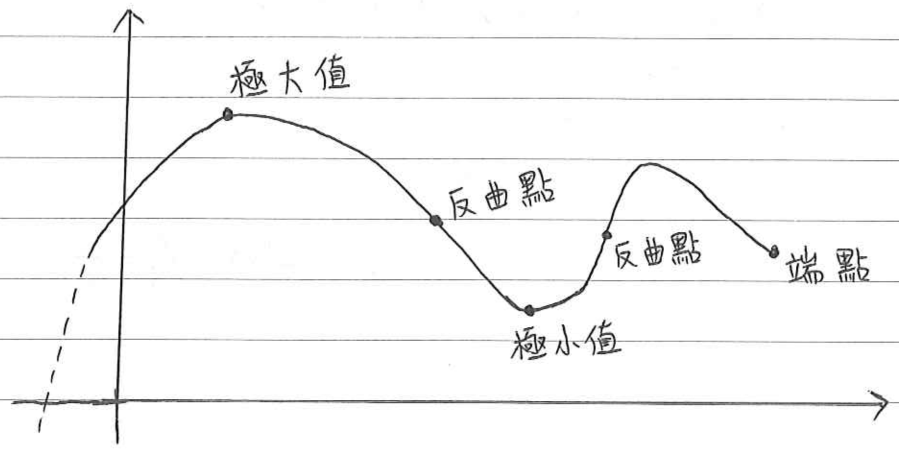
類：$f(x)=x^3$，$x\in[1,4]$，求一數 $c\in[1,4]$ 且滿足微分均值定理

解：$f'(x)=3x^2$

由微分均值定理 $f'(c)=\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=\frac{63}{3}=21=3c^2$

$c=\sqrt{7}$ ※

§3-3 極大值、極小值、反曲線



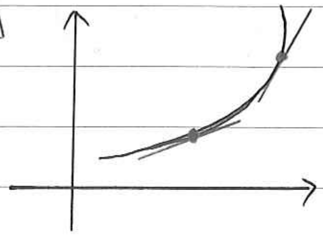
* 臨界點 $\begin{cases} \text{端點} \\ f'(x)=0 \text{ 的點} \\ f'(x) \text{ 不存在的點} \end{cases}$

☆臨界點上可能有極點

* 極點(極限的點):極大 or 極小的點
(找極大或極小的點)
1. 若 $f'(x)>0$,嚴格遞增
2. 若 $f'(x)<0$,嚴格遞減
3. 若 $f'(x)\geq 0$,遞增(可能相等)
4. 若 $f'(x)\leq 0$,遞減(可能不變)

* 上凹與下凹
1. 上凹的定義:$y=f(x)$ 在區間 $I=[a,b]$,若其切線都在曲線下方
則 $y=f(x)$ 在 I 為上凹

上凹

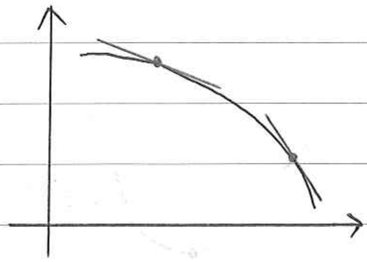


切線在下方

$$f''(c)=\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}>0$$

2.「下凹」的定義：$y=f(x)$ 在區間 $I=[a,b]$，若其切線都在曲線上方，則 $y=f(x)$ 在 I 為下凹

$\boxed{\text{下凹}}$



切線在上方

$$f''(c)=\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}<0$$

* 定義：反曲點（又稱拐點）

$x=c$ 的兩側，$f''(x)$ 的正負符號不同（上凹變下凹 or 下凹變上凹）則 $(c,f(c))$ 為 $f(x)$ 的反曲點。

註：判別法

1. 二階導數法：$\begin{cases} f'(a)=0\ ,\ f''(a)>0 \Rightarrow f(a) \text{ 極小點} \\ f'(a)=0\ ,\ f''(a)<0 \Rightarrow f(a) \text{ 極大點} \end{cases}$

2. $f''(c)=0$ 不一定是反曲點，需要測試 $f''(c)$ 前後有無正負變號

例：求 $y=x^2-4x+8$ 的遞增或遞減區間？

解：$y'=2x-4 \Rightarrow 2x-4=0$ 的點為 $x=2$（臨界點）

列表

x	$(-\infty,2)$	2	$(2,\infty)$
$f(x)$	遞減	4	遞增
$f'(x)$	$-$		$+$

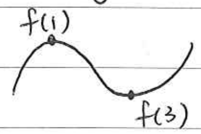
註：$x=2$ 是極小點

例：求 $y=x^3-6x^2+9x-2$ 的極小與極大值？

解：$y'=3x^2-6x+9=0$（找臨界點） $x=1$，$x=3$ ⇒ 沒有端點與微分不存在

列表

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f(x)$	增	$f(1)$ 極大值 $f(1)=2$	減	$f(3)$ 極小值 $f(3)=-2$	增
$f'(x)$	+	0	−	0	+



例（求反曲點）：求 $f(x)=x^4-4x^3$ 之反曲點坐標？

解：反曲點（二次微分）

$f'(x)=4x^3-12x^2$

$f''(x)=12x^2-24x$（反曲點） $f''(x)=0 \Rightarrow 12x(x-2)=0$，$x=2$ or 0

列表

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f''(x)$	+		−		

註：反曲點兩側 $f''(x)$ 正負變號，

因此，$(0,0)$、$(2,-16)$ 皆為反曲點 ※

Date　　NO.

§3-4 函數圖形

總結之前的極值、反曲點、上凹、下凹等描繪。

例：描繪 $f(x)=x^3-12x$ 之圖形，並求極點與反曲點

解：求臨界點 $f'(x)=3x^2-12=3(x^2-4)=3(x-2)(x+2)$

$f'(x)=0 \Rightarrow 3(x-2)(x+2)=0$， $x=2$、$x=-2$

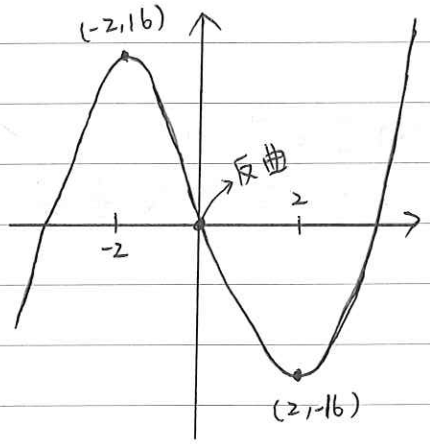
$f''(x)=6x=0 \Rightarrow x=0$ 反曲點（二次微分）

極大極小

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f(x)$	增	$f(-2)$ 極大 $f(-2)=16$	減	$f(2)$ 極小 $f(2)=-16$	增
$f'(x)$	$+$		$-$		$+$

反曲

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\infty)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
	下凹		上凹



極大 $(-2,16)$

極小 $(2,-16)$

反曲 $(0,0)$ ※