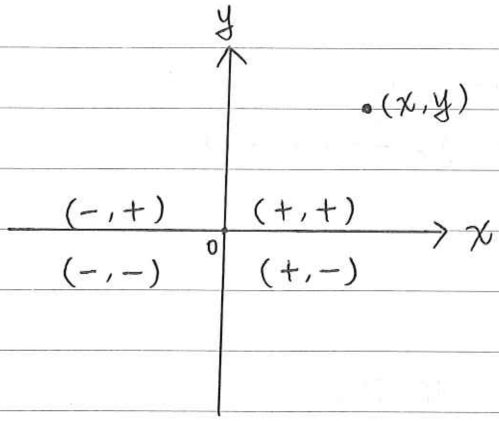
第0章 函數與圖形

§0-1 直角坐標

象限



定理：(x_1, y_1)、(x_2, y_2)

距離：$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

*斜率：$m = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

*性質：

1、$m > 0$ ／

2、$m < 0$ ＼

3. $m = 0$ —— 水平

4、$m = \pm\infty$ | 鉛直

*直線方程式：$Ax + By + C = 0$

1、點斜式 $y - y_1 = m(x - x_1)$

2、斜截式 $y = mx + b$ ，截距是一個點 $(0,b)$

3、二點式 $(x_2-x_1)(y-y_1) = (y_2-y_1)(x-x_1)$

4、截距式 $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$

$(a,0)$、$(0,b)$

*圓：(a,b)為圓心，半徑為 r

標準式 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

展開 ⇒ $x^2+y^2+Ax+By+C=0$

配方法 ⇒ $(x+\frac{A}{2})^2-\frac{A^2}{4}+(y+\frac{B}{2})^2-\frac{B^2}{4}+C=0$

*圓錐曲線

1、拋物線 $y=ax^2$ $\begin{cases} a>0 & \text{開口上} \\ a<0 & \text{開口下} \end{cases}$

2、橢圓 $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$

面積 $A=ab\pi$

3、雙曲線 $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 & \text{漸近線：} y=\pm\frac{b}{a}x \\ \frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1 & \text{漸近線：} y=\pm\frac{b}{a}x \end{cases}$

§0-2 函數

$$x \xrightarrow{f} y=f(x)$$

定義域　　　　值域

x：自變數　　y：因變數

*費率

*不是函數：平方根

例如：4的平方根可能 $\begin{cases} 2 \\ -2 \end{cases}$ ⇒ 違背唯一

例1：1、$y=x^2-1$，定義域 $x \in \mathbb{R}$(實數)，問值域？

解：x 由 0 代入 $\Rightarrow y \geq -1$

2、$y=\frac{1}{x-1}$，定義域為 $x \neq 1$，問值域？

解：$y \neq 0$

*口訣：分母永不為0

*合成函數

$$u=g(x)\ ,\ y=f(u)$$

$$(f \circ g)(x)=f(g(x))$$

例2：$\begin{cases} f(x)=3x-1 \\ g(x)=x^2 \end{cases}$ 求 $f(g(x))=?$ 及 $g(f(x))=?$

解：$f(g(x))=3x^2-1$

$g(f(x))=(3x-1)^2=9x^2-6x+1$ ※

類2：$\begin{cases} f(x)=x^2-1 \\ g(x)=\sqrt{x} \end{cases}$ 求 $f(g(x))=?$ 及 $g(f(x))=?$

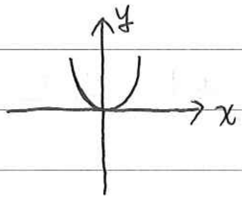
解：$f(g(x))=(\sqrt{x})^2-1=x-1$

$g(f(x))=\sqrt{x^2-1}$ ※

*定義：偶函數 & 奇函數

1、$f(x)=f(-x)$ 偶函數，圖形對稱 y 軸。

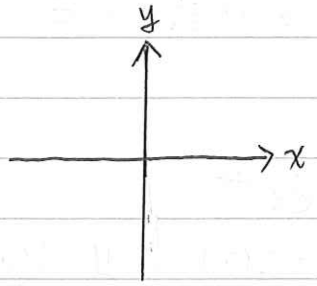
例如： $y=x^2$



2、$f(x)=-f(x)$ 奇函數，圖形對稱原點。

例如： $f(x)=x^3$

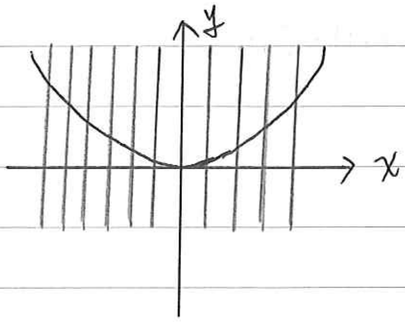
$g(x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$



例3：1、$f(x)=\sin x$、$f(x)=\sin(2x)$、$f(x)=\tan x$、$f(x)=x$、$f(x)=x^3$ 都是奇函數。

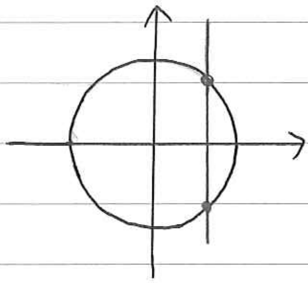
2、$f(x)=\cos x$、$f(x)=\cos(2x)$、$f(x)=x^2$、$f(x)=x^4$、$f(x)=|x|$ 都是偶函數。

*函數判斷：鉛直線判斷法



只對一點為函數

例如：

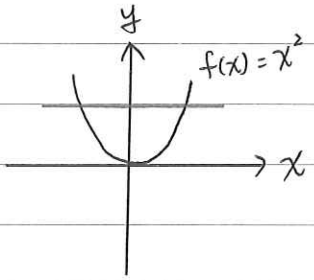


不是函數

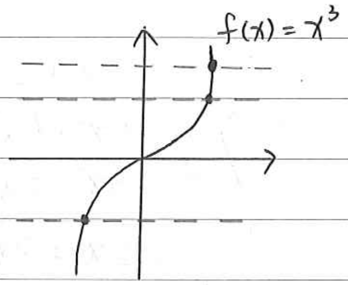
*定義：一對一函數

對一個 x，僅得到一個輸出 y，且輸了一個 y，僅得到一個 x，則 f 為一對一函數。

*水平線判別法



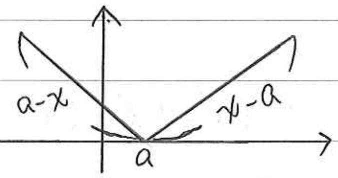
非一对一（有2個交點）



一對一（只有一個焦點）

*特殊函數

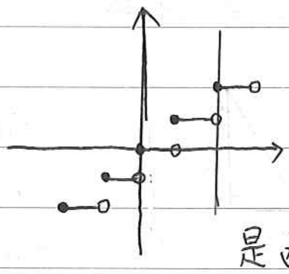
1、$|x-a| = \begin{cases} x-a, & x \geq a \\ a-x, & x < a \end{cases}$



2、高斯函數 $f(x)=[x]$，表示不大於本身之最大整數

例如：$[2.5]=2$　$[-0.2]=-1$

$[-2.5]=-3$　$[0.4]=0$



是函數但非一对一

*定義：多項式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots\cdots + a_1 x + a_0$$

*定義：有理式

$f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ，$P(x)$、$Q(x)$ 為多項式。

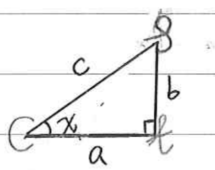
例：長除法 $(x^4-5x^3+6x^2+2x-8)\div(x^2-3x-2)=?$

解：

$$
\begin{array}{r}
x^2-2x+2 \\
x^2-3x-2\,\big)\; x^4-5x^3+6x^2+2x-8 \\
x^4-3x^3-2x^2 \\
\hline
-2x^3+8x^2+2x \\
-2x^3+6x^2+4x \\
\hline
2x^2-2x-8 \\
2x^2-6x-4 \\
\hline
4x-4
\end{array}
$$

$$\therefore (x^4-5x^3+6x^2+2x-8)\div(x^2-3x-2)=\underbrace{x^2-2x+2}_{(\text{商})}+\frac{\overset{(\text{餘})}{4x-4}}{x^2-3x-2}$$

*定義：三角函數

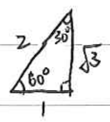


$\sin x=\dfrac{b}{c}$ $\qquad \csc x=\dfrac{1}{\sin x}$

$\cos x=\dfrac{a}{c}$ $\qquad \sec x=\dfrac{1}{\cos x}$

$\tan x=\dfrac{b}{a}$ $\qquad \cot x=\dfrac{1}{\tan x}$

例：



$\sin 30^\circ=\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$ $\quad(\pi=180^\circ)$

*平方關係

1、$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

2、$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$

3、$\cot^2 x + 1 = \csc^2 x = (\csc x)^2$

*加法公式

1、$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

2、$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \pm \sin\alpha\sin\beta$

*半角公式

1、$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

2、$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

*倍角公式

1、$\sin 2x = 2\sin x\cos x$

2、$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

*特別角：$\pi = 180°$ ，$\frac{\pi}{3} = 60°$

$\frac{\pi}{2} = 90°$ ，$\frac{\pi}{4} = 45°$

*指數 & 對數

1、指數：$a^0 = 1$

$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

$(a^x)^y = a^{xy}$

$(\frac{a}{b})^x = \frac{a^x}{b^x}$

2、對數：$\log_a x$ $a > 0$ $(a \neq 1)$

$\log_a 1 = 0$

$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

$\log_a x^r = r\log_a x$

$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

3. 換底：$a^r = 10^{r\log a}$ $(\log a = \log_{10} a)$

*等差數列（級數）：a_1 , a_1+d , a_1+2d , ... （a_1為首項，d為公差）

1、第 n 項：$a_n = a_1 + (n-1)d$

2、前 n 項和：$S_n = \frac{(a_1+a_n)n}{2}$

$= \sum_{i=1}^{n} a_i$

Date NO.

*等比數列(級數)：$a_1, a_1r, a_1r^2, a_1r^3, \ldots\ldots$ (r 為公比)

1、第 n 項：$a_n = a_1r^{n-1}$

2、前 n 項和：$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$

3、無窮等比級數和：$S_\infty = \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{a_1}{1-r}$, $|r| < 1$

第一章 極限

§1-1 什麼是極限

微分：瞬間改變的比率

極限可能不存在

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$

如果 x 趨近 a（但 $x \neq a$），則 $f(x)$ 會趨近 b（能多近就多近）

*型態

1、常數型 $\lim\limits_{x\to a} (c) = c$

2、多項式型 $\lim\limits_{x\to a} (b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0) = b_n a^n + \cdots + b_1 a + b_0$

3、$\lim\limits_{x\to a} |x| = |a|$

4、$\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$ （但 $a \neq 0$）

5、$\lim\limits_{x\to a} \sin x = \sin a$

*極限運算性質：$\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ ， $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$

1、$\lim\limits_{x\to a} k f(x) = k \lim\limits_{x\to a} f(x) = kA$

2、$\lim\limits_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x) = A \pm B$

3、$\lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = A \cdot B$

「先求積，再求極限」與「先求極限，再求積」相同

4、$\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \frac{A}{B}$ （但 $B \neq 0$）

「推理：先求商，再求極限與先求極限，再求商相同」

Date NO.

5、 $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim_{x\to a}f(x)]^n = A^n$

6、 $\lim_{x\to a}[f(x)]^{1/n} = [\lim_{x\to a}f(x)]^{1/n} = A^{1/n}$

☆注意：個別極限值均應先存在後才可計算。

例1：$\lim_{x\to 2}[x^2+(-x)] = \lim_{x\to 2}x^2 + \lim_{x\to 2}(-x)$ 是否成立？

解：∵ $\lim_{x\to 2}x^2 = 4$ 且 $\lim_{x\to 2}(-x) = -2$ 存在

∴ $\lim_{x\to 2}[x^2+(-x)] = 4-2 = 2$ 存在 ※

類1：$\lim_{x\to 3}(x^2+2x) = \lim_{x\to 3}x^2 + \lim_{x\to 3}2x$ 是否成立？

解：∵ $\lim_{x\to 3}x^2 = 9$ 且 $\lim_{x\to 3}2x = 6$ 存在

∴ $\lim_{x\to 3}(x^2+2x) = 9+6 = 15$ 存在 ※

例2：$\lim_{x\to 0}[\frac{1}{x}+(-\frac{1}{x})] = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x} + \lim_{x\to 0}(-\frac{1}{x})$ 是否成立？

解：否 ※

∵ $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ 不存在（分母永不為0），$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = \infty^2$ 概念〈不是數字〉

類2：$\lim_{x\to 0}(x\cdot\frac{1}{x}) = \lim_{x\to 0}x \cdot \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ 是否成立？

解：否 ※ ∵ $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ 不存在。

例3：若 $\lim_{x\to 0}f(x) = 3$，$\lim_{x\to 0}g(x) = -7$，求 $\lim_{x\to 0}[3+f(x)]g(x)$ 之值？

解：原式 $\Rightarrow \lim_{x\to 0}3g(x) + \lim_{x\to 0}f(x)\cdot\lim_{x\to 0}g(x) = 3\cdot(-7) + 3\cdot(-7) = -42$ ※

類3：若 $\lim_{x\to 0} f(x)=5$，求 $\lim_{x\to 0}[3x^2+f(x)]=?$

解：原式 $\Rightarrow \lim_{x\to 0} 3x^2+\lim_{x\to 0} f(x)=0+5=5$ ※

習題1-1：1. $\lim_{x\to 2}[\frac{1}{x-2}+(-\frac{1}{x-2})]=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}+\lim_{x\to 2}(-\frac{1}{x-2})$ 是否成立？

解：否 ※ ∵ $\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}$ 不存在（分母永不為0）

2. 已知 $\lim_{x\to 0} f(x)=5$，$\lim_{x\to 0} g(x)=7$，則 $\lim_{x\to 0}[f(x)-2g(x)]=?$

解：$\lim_{x\to 0} f(x)-\lim_{x\to 0} 2g(x)=5-14=-9$ ※

§1-2 極限求法

☆注意：$\lim_{x\to a} f(x)$ 可能不存在

*連續型式

1. 連續（不破洞）函數：直接代入
2. 分式分母不為0：直接代入

例1：1. $\lim_{x\to 1} x^2=?$ 2. $\lim_{x\to 1}\sin x=?$

解：1 ※ 解：$\sin 1$ ※

類1：1. $\lim_{x\to 2}(2x+3)=?$ 2. $\lim_{x\to \frac{\pi}{3}}\cos x=?$

解：7 ※ 解：$\pi=180^\circ$，$\frac{\pi}{3}=60^\circ \Rightarrow \cos 60^\circ=\frac{1}{2}$ ※

例 2：$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-6}{x^2+3x+4}=?$

解：先觀察分母用 $x=1$ 代入是否不為0

$\because\ 1+3+4=8\neq 0$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-6}{x^2+3x+4}=\dfrac{-5}{8}$ ※

類 2：$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x+5}{x^2-15}=?$

解：$\dfrac{10}{10}=1$ ※

※分子分母同時趨近 0 $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\sim\dfrac{0}{0}\right)$

1. 若 $f(a)\neq 0$，極限不存在
2. 若 $f(a)=0$，則可能存在，需進一步計算

※策略：設法因式分解，將為0的因素清除(使分母不為0)

例 3：$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-x-2}=?$ （$\dfrac{0}{0}$ 型態）

解：原式 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\cancel{(x-2)}(x-1)}{\cancel{(x-2)}(x+1)}=\dfrac{1}{3}$ ※

類 3：$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{x^2+x-6}=?$

解：原式 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+5)\cancel{(x-2)}}{(x+3)\cancel{(x-2)}}=\dfrac{7}{5}$ ※

例 4：$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x(x-2)}{x^2-4x+4}=?$

解：原式 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x\cancel{(x-2)}}{(x-2)^{\cancel{2}1}}$ 不存在 ※ （$\dfrac{2}{0}$ 不存在）

類 4：$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x(x-3)}{x^2-6x+9}=?$

解：原式 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x(x-3)}{(x-3)^2}$ 不存在 ※

*逼近∞極限：$x \to \infty$ 極限，當 $x \to \infty$ 分子分母可能趨近∞，化函數成分式型式，比較分子分母 x 的乘冪。

1、分母次方 n > 分子次方 m，0
2、分母次方 n = 分子次方 m，$\frac{a_m}{b_n}$
3、分母次方 n < 分子次方 m，$\pm\infty$

例 5：$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+x+2}{2x^3+4x^2+x+1} = 0$

類 5：$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{8x^2-4x+5}{(5x-1)^2} = ?$

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3+4x^2+x+1}{x^2+x+2} = \infty$

解：$\dfrac{8}{5^2} = \dfrac{8}{25}$ ※

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+x+1}{x^2+x+2} = \dfrac{2}{1} = 2$

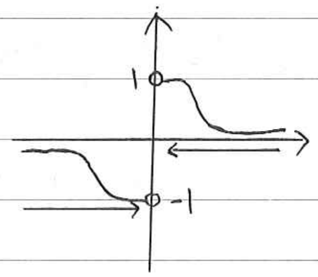
*左右極限：函數在某些點的左、右附近會有變號、跳動或振盪情形。

$$f(x) = \frac{|x|}{x}\,\frac{1}{x^2+1}$$

單邊極限

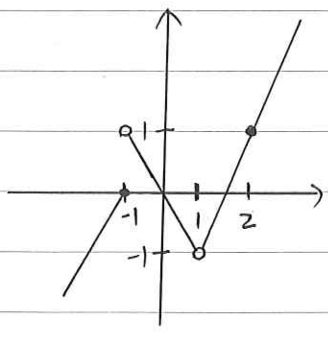
$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{|x|}{x}\,\dfrac{1}{x^2+1} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|x|}{x}\,\dfrac{1}{x^2+1} = -1$



1、條件函數

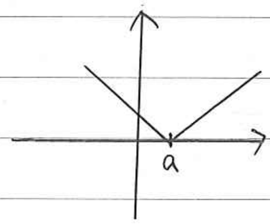
例如：$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \le -1 \\ -x, & -1 < x < 1 \\ 2x-3, & x \ge 1 \end{cases}$



$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = 0$ $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = 1$ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -1$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -1$ $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 1$

2、絕對值函數 $f(x)=|x-a|=\begin{cases} x-a & , x\ge a \\ a-x & , x<a \end{cases}$



$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = x-a$

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = a-x$

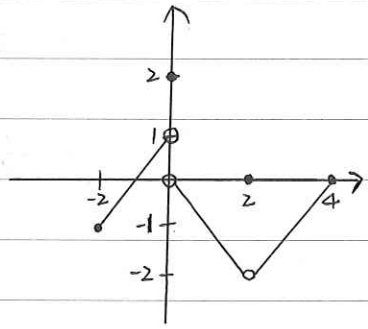
3、高斯函數 $f(x)=[x]$（不大於本身之最大整數）

例如：$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = ?$ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = ?$

例6：

$f(x)=\begin{cases} x+1 & , -2\le x<0 \\ 2 & , x=0 \\ -x & , 0<x<2 \\ 0 & , x=2 \\ x-4 & , 2<x\le 4 \end{cases}$，求 ① $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = ?$ ② $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = ?$

解：（畫圖 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$、$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$、$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$、$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$）



① $\because \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在 #

② $\because \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -2$

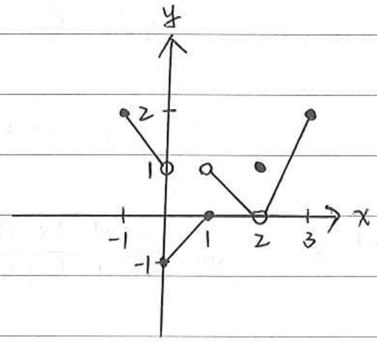
$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -2$

$\therefore \lim\limits_{x\to 2} f(x) = 2$ #

類 6：

$$f(x)=\begin{cases}1-x &, -1\le x<0\\ x^2-1 &, 0\le x\le 1\\ -x+2 &, 1<x<2\\ 1 &, x=2\\ 2x-4 &, 2<x\le 3\end{cases}$$

，求 ① $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=?$ ② $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=?$ ③ $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=?$



解：① ∵ $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=1$

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-1$

∴ $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在 ※

② ∵ $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=0$

$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=1$

∴ $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 不存在 ※

③ ∵ $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=0\\ \lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=0\end{array}\right\}$ ∴ $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=0$ ※

※ 微分：瞬間改變的比率

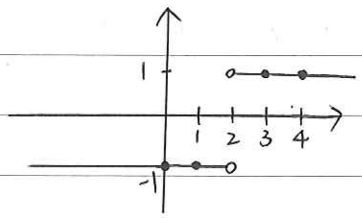
$\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 極限不一定存在 $\begin{cases}\lim\limits_{x\to a^+}f(x) \text{ 右極限不一定存在}\\ \lim\limits_{x\to a^-}f(x) \text{ 左極限不一定存在}\end{cases}$

若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$ 存在，必 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=b$

例 7：$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{|x-2|}=?$

解 1：圖、描點法

x	0	1	2	3	4
y	-1	-1	不存在	1	1



解 2：拆解絕對值

$$|x-2|=\begin{cases}x-2 &, x\ge 2\\ -(x-2) &, x<2\end{cases}$$

∵ $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-2}{|x-2|}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-2}{x-2}=1$

$\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x-2}{|x-2|}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x-2}{-(x-2)}=-1$

∴ 極限不存在 ※ （左極 ≠ 右極）

Date NO.

類7： $\lim_{x\to 0}\left(\frac{|x|}{x}+x\right)=?$

解：∵ $\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}+x=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}+x=-1$

$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}+x=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}+x=1$

∴ $\lim_{x\to 0}\left(\frac{|x|}{x}+x\right)$ 不存在 ※

例8： $\lim_{x\to 3}\frac{|5-2x|-|x-2|}{|x-5|-|3x-7|}=?$

解：絕對值轉折點：$x=\frac{5}{2}, 2, 5, \frac{7}{3}$（3不是轉折點，直接打開）

原式 ⇒ $\lim_{x\to 3}\frac{-(5-2x)-(x-2)}{-(x-5)-(3x-7)}=\lim_{x\to 3}\frac{2x-5-x+2}{5-x-3x+7}=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{-4x+12}=\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}}{-4\cancel{(x-3)}}$

$=-\frac{1}{4}$ ※

類8： $\lim_{x\to 0}\frac{|2x-1|-|2x+1|}{x}=?$

解：原式 ⇒ $\frac{-(2x-1)-(2x+1)}{x}=\frac{-2x+\cancel{1}-2x-\cancel{1}}{x}=\frac{-4\cancel{x}}{\cancel{x}}=-4$ ※

例9： $\lim_{x\to 1}(1+[x]+[1-x])=?$

↳ 高斯函數（不大於本身之最大整數）

解：$x\to 1$ 趨近1代表2個方向

$\begin{cases}(左)\ 0.9、0.99、0.999 \cdots\cdots \longrightarrow 1\\(右)\ 1 \longleftarrow 1.001、1.01 \cdots\end{cases}$

右極限 $=\lim_{x\to 1^+}(1+1-1)=1$

（x用1.001代入） $1-1.001=-0.001 \Rightarrow [1-x]=-1$

左極限 $=\lim_{x\to 1^-}(1+0+0)=1$

（x用0.9代入）

∵左極限＝右極限

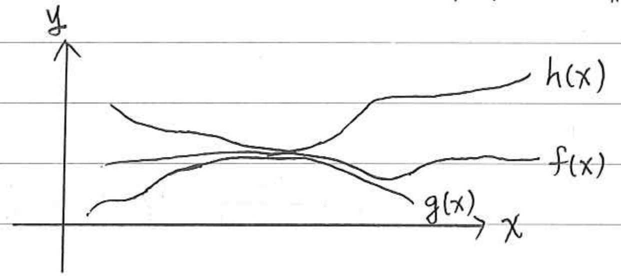
∴ $\lim_{x\to 1}(1+[x]+[1-x])=1$ ※

類 9：$\lim_{x\to 0}([1-x]+[x+2])=?$

解：
$$\begin{cases}\lim_{x\to 0^-}([1-x]+[x+2])=\lim_{x\to 0^-}(1+1)=2\\ \quad (x\text{ 用 }-0.1\text{ 代入}) \qquad [1-(-0.1)]=1\ ,\ [-0.1+2]=1\\ \lim_{x\to 0^+}([1-x]+[x+2])=\lim_{x\to 0^+}(0+2)=2\\ \quad (x\text{ 用 }0.1\text{ 代入}) \qquad [1-0.1]=0\ ,\ [0.1+2]=2\end{cases}$$

$\therefore \lim_{x\to 0}([1-x]+[x+2])=2$ ※

* 三明治定理：若 $g(x)\le f(x)\le h(x)$ 且 $\lim_{x\to a}g(x)=\lim_{x\to a}h(x)=L$，則 $\lim_{x\to a}f(x)=L$
（夾擠定理）



* 三角函數極限

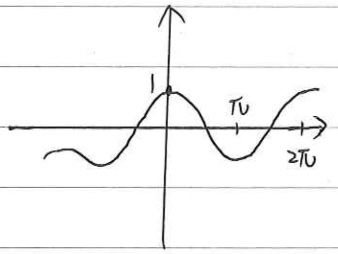
通式：$\lim_{\square\to 0}\frac{\sin\square}{\square}=1$

推論：1、$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin a\theta}{\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin a\theta}{a\theta}\cdot\frac{a}{1}=1\cdot a=a$

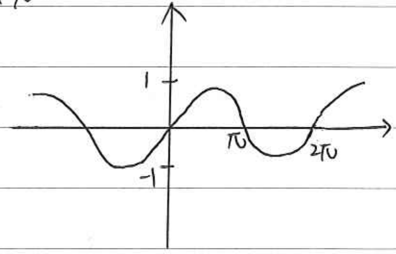
(變形)

2、$\lim_{\theta\to 0}\frac{\tan\theta}{\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\cos\theta}{\theta\cdot\cos\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta}=1\cdot\frac{1}{\cos 0^\circ}=1$

$\cos x$：



$\sin x$：



例題

Date NO.

1、$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2-7x}{x+5} = \dfrac{-12}{8} = -\dfrac{3}{2}$ ※

2、$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-4} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x+3)\cancel{(x-2)}}{(x+2)\cancel{(x-2)}} = \dfrac{5}{4}$ ※

3、$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-x}{x^2-2x+1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x\cancel{(x-1)}}{(x-1)^{\cancel{2}1}} =$ 極限不存在 ※

4、$\lim\limits_{x \to 0} x\left[\dfrac{1}{x}\right] = ?$

$\dfrac{1}{x} - 1 < \left[\dfrac{1}{x}\right] \le \dfrac{1}{x}$

$\times x$

$x\left(\dfrac{1}{x}-1\right) < x\left[\dfrac{1}{x}\right] \le x \cdot \dfrac{1}{x}$

$\Rightarrow 1 - x < x\left[\dfrac{1}{x}\right] \le 1$ $\therefore \lim\limits_{x \to 0} x\left[\dfrac{1}{x}\right] = 1$ ※

5、$\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x+3}{|x+3|} = ?$

$\because \lim\limits_{x \to -3^-} \dfrac{x+3}{-(x+3)} = -1$

$\lim\limits_{x \to -3^+} \dfrac{x+3}{x+3} = 1$ $\therefore \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x+3}{|x+3|}$ 極限不存在 ※

6、$\lim\limits_{x \to 0} x \sin\dfrac{1}{x} = ?$

$-1 \le \sin\dfrac{1}{x} \le 1$

$\cdot x$

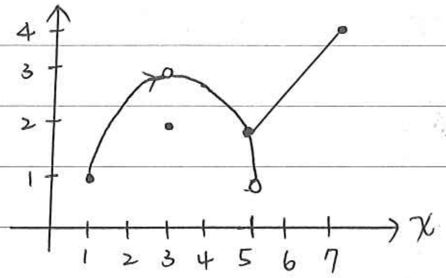
$-x \le x\sin\dfrac{1}{x} \le x$，$\lim\limits_{x \to 0} -x = 0$，$\lim\limits_{x \to 0} x = 0$ ∴由夾擠定理可得

$\lim\limits_{x \to 0} x \sin\dfrac{1}{x} = 0$ ※

7. 設 $f(x) = \begin{cases} x^2+3, & x \le 3 \\ 2x+a, & x > 3 \end{cases}$ 若 $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ 存在，求 $a = ?$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^+} (2x+a) = 6+a \\ \\ \lim\limits_{x \to 3^-} (x^2+3) = 12 \end{array}\right\} 6+a = 12, \ a = 6$$ ※

8. $y=f(x)$



(1) $\lim_{x\to 3^-} f(x) = ?$ 3 ※ (2) $\lim_{x\to 3^+} f(x) = ?$ 3 ※

(3) $f(3) = ?$ 2 ※ (4) $\lim_{x\to 5^-} f(x) = ?$ 1 ※

(5) $\lim_{x\to 5^+} f(x) = ?$ 2 ※ (6) $f(5) = ?$ 2 ※

§1-3 漸近線

※水平漸近線

1. 若 $\lim_{x\to\infty} y(x) = a$，則 $y=a$ 為水平漸近線 P.7 $x\to\infty$ ⇒ 分式型式

2. 若 $\lim_{x\to-\infty} y(x) = b$，則 $y=b$ 為水平漸近線

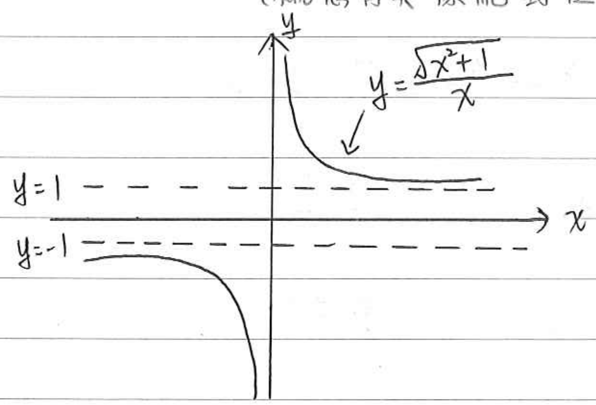
※註：當不懂數學內容時，使用例子輔助理解

例：$y=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ 水平漸近線

解：$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \overset{大概}{\approx} \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2}}{x} = 1$，則 $y=1$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \approx \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{x} = -1$，則 $y=-1$

(概念有點像絕對值)



Date NO.

*鉛直漸近線

找尋鉛直漸近線方法：令方程式分母為0，解出 $x=?$

1、若 $\lim\limits_{x\to a} y(x)=\infty$，則 $x=a$ 為鉛直漸近線

2、若 $\lim\limits_{x\to b} y(x)=-\infty$，則 $x=b$ 為鉛直漸近線

例：$y=\dfrac{1}{(x+1)(x-3)}$ 鉛直漸近線

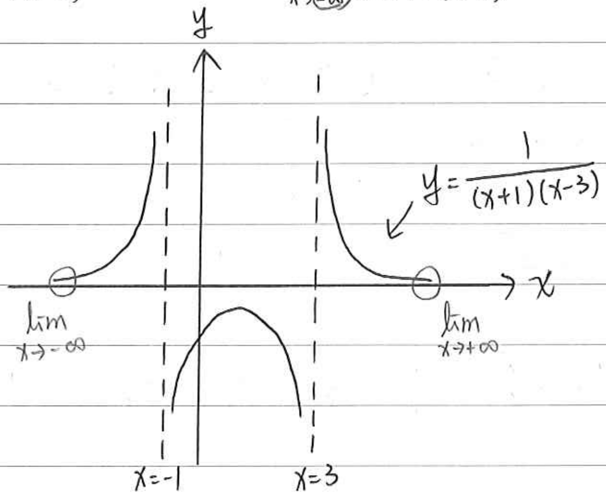
解：$\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{1}{(x+1)(x-3)}=+\infty$ $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{1}{\underset{\oplus}{(x+1)}\underset{\ominus}{(x-3)}}=-\infty$

（x用-0.9代）

$\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{1}{(x+1)(x-3)}=-\infty$ $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{1}{\underset{\ominus}{(x+1)}\underset{\ominus}{(x-3)}}=+\infty$

（x用-1.1代入）

$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{(x+1)(x-3)}=0$ $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1}{(x+1)(x-3)}=0$



例1：$f(x)=\dfrac{x+3}{(x-3)(x+1)}$ 水平與鉛直漸近線

解：$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+3}{\underset{\ominus}{(x-3)}\underset{\ominus}{(x+1)}}=+\infty$，$x=-1$（垂直）

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+3}{(x-3)(x+1)}=\infty$，$x=3$（垂直）

$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x+3}{(x-3)(x+1)}=0$，$y=0$（水平）

類1：$f(x)=\dfrac{4x+1}{x(x-2)}$ 之漸近線

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x+1}{x(x-2)}=\infty$ ，$x=0$（垂直）

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x+1}{x(x-2)}=\infty$ ，$x=2$（垂直）

$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{4x+1}{x(x-2)}=0$ ，$y=0$（水平）

例2：$y=\dfrac{x}{x^2+1}$ 的漸近線

解：$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x}{x^2+1}=0$ ，$y=0$ 為水平漸近線

$\uparrow$

（分母次方＞分子次方，0）

類2：$f(x)=\dfrac{2x}{3x^2+1}$ 之漸近線

解：$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x}{3x^2+1}=0$ ，$y=0$ 為水平漸近線

$\uparrow$

（分母次方＞分子次方，0）

例3：$f(x)=\dfrac{2x^2+3}{x^2+x+1}$ 之漸近線

解：$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^{2}+3}{x^{2}+x+1}=2$ ，$y=2$ 為水平漸近線

（分母次方＝分子次方）

類3：$f(x)=\dfrac{4x^2+3}{x^2+2x+4}$ 之漸近線

解：$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{4x^{2}+3}{x^{2}+2x+4}=4$ ，$y=4$ 為水平漸近線

Date　　　NO.

例 4：$f(x)=\dfrac{x^2-x+4}{x+1}$ 之漸近線

解 1：$f(x)=\dfrac{x^2-x+4}{x+1}=x-2+\dfrac{6}{x+1}$

$$\begin{array}{r} x-2 \\ x+1\overline{)x^2-x+4} \\ \underline{x^2+x} \\ -2x+4 \\ \underline{-2x-2} \\ 6 \end{array}$$

$y=x-2$（斜漸近線）　　$x=-1$ 為垂直漸近線

解 2：令 $mx+b=\dfrac{x^2-x+4}{x+1}$

$\Rightarrow mx^2+mx+bx+b=x^2-x+4$

$\Rightarrow (m-1)x^2+(m+b+1)x+(b-4)=0$

令 x 之最高次項與第二高次項係數皆為 0

$\Rightarrow \begin{cases} m-1=0 \\ m+b+1=0 \end{cases}$　$m=1$，$b=-2$ $\Rightarrow y=x-2$

類 4：$y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ 之所有漸近線

$$\begin{array}{r} x \\ x^2-1\overline{)x^3} \\ \underline{x^3-x} \\ x \end{array}$$

解：$y=x+\dfrac{x}{(x-1)(x+1)}$

$x=1$、$x=-1$（垂直），$y=x$（斜）※

習題 1-3

1、$y=\dfrac{2x^2+1}{x^3+x}$ 之漸近線

解：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+1}{x^3+x}=0$，$y=0$（水平）

$y=\dfrac{2x^2+1}{x(x^2+1)}$，$x=0$（垂直）

2、$y=\dfrac{2x^4+3x^2-2x-4}{(x-1)(x^2+x+1)}$

解：$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^4+3x^2-2x-4}{(x-1)(x^2+x+1)}=\infty$，$x=1$（垂直）

令 $mx+b=\dfrac{2x^4+3x^2-2x-4}{x^3-1}$ $\Rightarrow (m-2)x^4+bx^3-3x^2-(m-2)x-b+4=0$

$\begin{cases} m-2=0 \\ b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=2 \\ b=0 \end{cases} \Rightarrow y=2x$（斜）

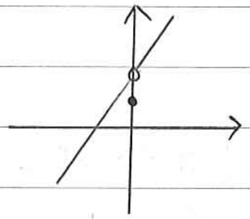
※

§1-4 連續

* 觀察：筆不離開表面留下的痕跡
* 定義：若 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$，則 $f(x)$ 在 $x=a$ 連續
  1. $f(a)$ 有定義
  2. $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 存在 （不一定 $=f(a)$）
  3. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

例1：若 $f(x)=\begin{cases} x+2 & , x\neq 0 \\ 1 & , x=0 \end{cases}$，問 $f(x)$ 在 $x=0$ 是否連續？

解：



$f(0)=1$ 有定義

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2$

$\because \lim\limits_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$

$\therefore$ 不連續 ※

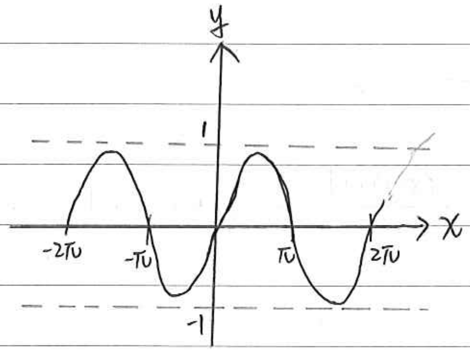
類1：若 $f(x)=\begin{cases} x+3 & , x\neq 0 \\ 0 & , x=0 \end{cases}$ 則 $f(x)$ 在 $x=0$ 是否連續？

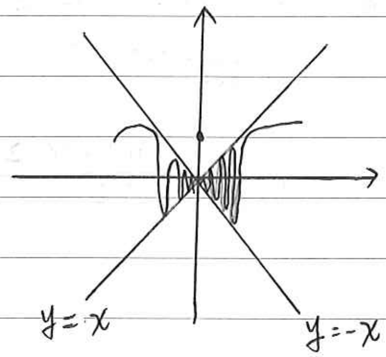
解：$\because f(0)=0$，且 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(x+3) = 3$

$\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 不連續 ※

例2：若 $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & , x\neq 0 \\ 1 & , x=0 \end{cases}$ 問 $f(x)$ 在 $x=0$ 是否連續？

解：





$f(0)=1$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$，$\lim\limits_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$ 不連續 ※

Date NO.

*註：連續函數極限一定存在，但極限存在函數不一定連續

*定理：多項式函數處處連續

$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

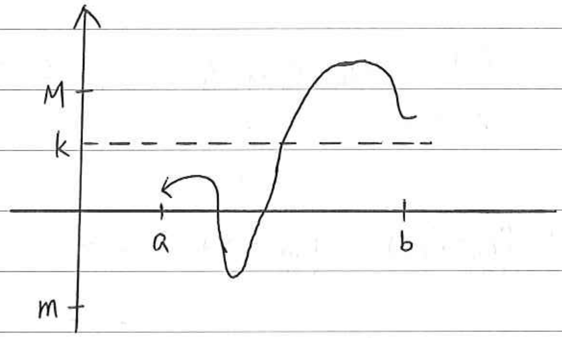
*定理：運算後的連續

$f(x)$、$g(x)$ 在 $x=a$ 連續，$g(a) \neq 0$ 則 $f(x) \pm g(x)$、$f(x) \cdot g(x)$、$\frac{f(x)}{g(x)}$ 在 $x=a$ 都連續。

註：連續函數的應用

*定理：中間值定理

若函數 $f(x)$ 在區間 $[a,b]$（中括號包含端點 a 與 b 稱閉區間）上連續，且最大值為 M，最小值為 m，則介於 M 與 m 之任意 K 值（$m < k < M$），必定存在一點 c 介於 a、b 之間，使得 $f(c)=k$



例3：若 $f(x) = \begin{cases} \frac{k(x^2-4)+x-2}{x-2} &, x \neq 2 \\ 3 &, x=2 \end{cases}$ 在 $x=2$ 連續，則 $k=$?

解：1. $f(2)=3$ 存在

2. $\lim_{x\to 2} f(x) = 3$，$\lim_{x\to 2}\frac{k(x^2-4)+x-2}{x-2} = 3$（代數運算，試著 $(x-2)$ 因式刪去）

$\lim_{x\to 2}\frac{k(x^2-4)+x-2}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}[k(x+2)+1]}{\cancel{x-2}} = 2k+kx+1 = 4k+1 = 3$

$k=\frac{1}{2}$ #

類3：若 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{k(x^2-1)-x+1}{x-1} & , x\neq 1 \\ 5 & , x=1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 為連續，則 $k=?$

解：1、$f(1)=5$ 存在

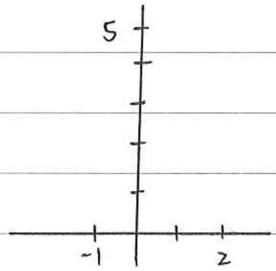
2、$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=5$ 即 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{k(x^2-1)-x+1}{x-1}=5$

$$\lim_{x\to 1}\frac{k(x^2-1)-x+1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}[k(x+1)-1]}{\cancel{x-1}}=2k-1=5$$

$k=3$ ※

例4：設 $f(x)=\begin{cases} ax & , x<-1 \\ 3x+b & , -1\le x<2 \\ x^2+1 & , x\ge 2 \end{cases}$ 為連續函數，求 a、$b=?$

解：分段函數



$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} x^2+1=5$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} 3x+b=6+b=5$ （∵連續）

$\therefore b=-1$ ※

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} 3x-1=-4$

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-} ax=-a=-4$ ，$a=4$ ※

Date NO.

類 4：若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}, & x<2\\ ax^2-bx+3, & 2\le x<3\\ 2x-a+b, & x\ge 3\end{cases}$ 為連續函數，則 a、b = ?

解：

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 2^-} f(x) &= \lim_{x\to 2^-}\frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}} = 4\\ \lim_{x\to 2^+} f(x) &= \lim_{x\to 2^+} ax^2-bx+3 = 4a-2b+3\end{aligned}\right\}\ \begin{aligned}4a-2b+3&=4\\4a-2b&=1\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 3^-} f(x) &= \lim_{x\to 3^-} ax^2-bx+3 = 9a-3b+3\\ \lim_{x\to 3^+} f(x) &= \lim_{x\to 3^+} 2x-a+b = 6-a+b\end{aligned}\right\}\ \begin{aligned}9a-3b+3&=6-a+b\\10a-4b&=3\end{aligned}$$

$$\begin{cases}4a-2b=1\\10a-4b=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}8a-4b=2\\10a-4b=3\end{cases}\quad a=\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{2}\ ※$$