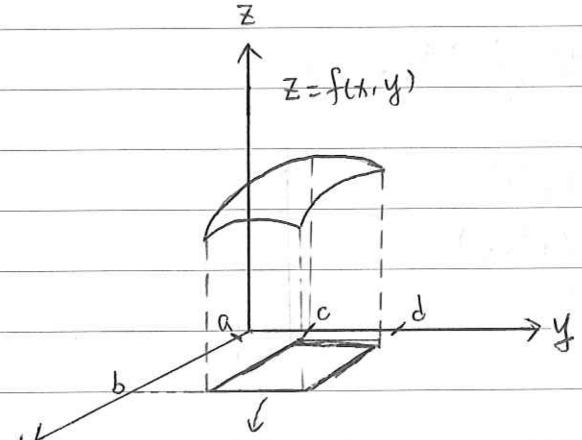
第八章 重積分

§8-1 二重積分

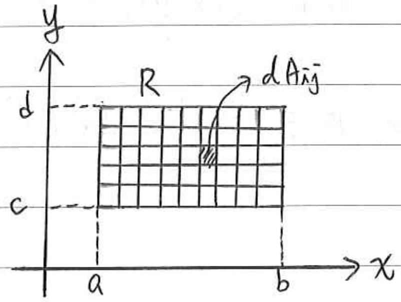
1、二重積分(二維積分)，其與一維積分相同，只要利用「積分八字」即可完成。

↳ 分割、逼近、加總、極限

2、選定在 $x-y$ 平面上一個方形區域 $R=\{(x,y)\mid a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$，函數 $f(x,y)$ 在 R 內為連續函數，其幾何意義為空間中之曲面，如下圖所示：



R(表 $z=f(x,y)$ 在 $x-y$ 平面之投影)



※定義：二重積分

函數 $f(x,y)$ 在區域 R 上之黎曼和積分為 $\iint_R f(x,y)\,dx\,dy$，利用積分八字訣(分割、逼近、加總、極限)而得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_j)\,dx\,dy=\iint_R f(x,y)\,dx\,dy$$

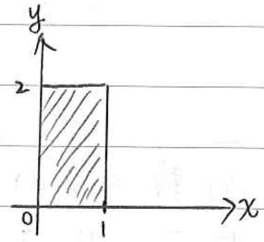
例 1：若 $R = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1，0 \le y \le 2\}$，求 $\iint_R xy^2 \, dx\,dy = ?$

解：$\iint_R xy^2 \, dx\,dy = \iint_R xy^2 \, dA$，即 $dx\,dy = dA$（另一種表示式）

原式 $= \int_0^1 x \, dx \cdot \int_0^2 y^2 \, dy = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 \cdot \left[\frac{1}{3}y^3\right]_0^2$

$= \frac{1}{2} - \frac{8}{3}$

$= \frac{4}{3}$ ※

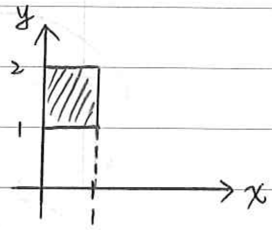


類 1：若 $R = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1，1 \le y \le 2\}$，求 $\iint_R e^{x+y} \, dx\,dy = ?$

解：原式 $= \int_0^1 e^x \, dx \cdot \int_1^2 e^y \, dy = [e^x]_0^1 \cdot [e^y]_1^2$

$= (e-1) \cdot (e^2 - e)$

$= e(e-1)^2$



※定理：傅比尼定理

設 $f(x,y)$ 為連續函數，區域 $R = \{(x,y) \mid a \le x \le b，c \le y \le d\}$，

則傅比尼定理為 $\iint_R f(x,y) \, dx\,dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y) \, dy\right] dx$

$= \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y) \, dx\right] dy$

例 2：若 $R=\{(x,y)\mid 1\le x\le 2,\ 0\le y\le 2\}$，求 $\iint_R \frac{1}{(x+y)^2}\,dx\,dy=?$

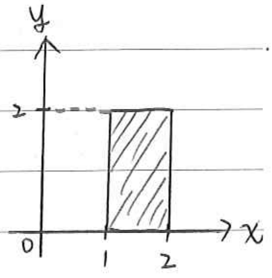
解 1：先積 y 方向，再積 x 方向

$$原式=\int_1^2\left[\int_0^2 \frac{1}{(x+y)^2}dy\right]dx=\int_1^2\left[\frac{-1}{x+y}\right]_0^2 dx$$

$$=\int_1^2\left[\frac{-1}{x+2}+\frac{1}{x}\right]dx$$

$$=\left[-\ln(x+2)+\ln x\right]_1^2$$

$$=\ln 3-\ln 2 \quad ※$$



解 2：先積 x 方向，再積 y 方向

$$原式=\int_0^2\left[\int_1^2 \frac{1}{(x+y)^2}dx\right]dy=\int_0^2\left[\frac{-1}{x+y}\right]_1^2 dy$$

$$=\int_0^2\left[-\frac{1}{y+2}+\frac{1}{y+1}\right]dy$$

$$=\left[-\ln(y+2)+\ln(y+1)\right]_0^2$$

$$=\ln 3-\ln 2 \quad ※$$

類 2：若 $R=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\}$，求 $\iint_R ye^{xy}\,dA=?$

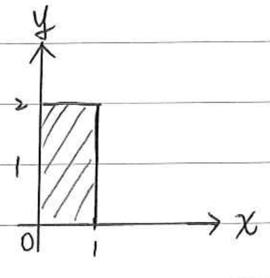
解：觀察發現先積 y 不好積分！故先積 x

$$原式=\int_0^2\left[\int_0^1 ye^{xy}dx\right]dy=\int_0^2\left[e^{xy}\right]_0^1 dy$$

$$=\int_0^2 (e^y-1)\,dy$$

$$=\left[e^y-y\right]_0^2$$

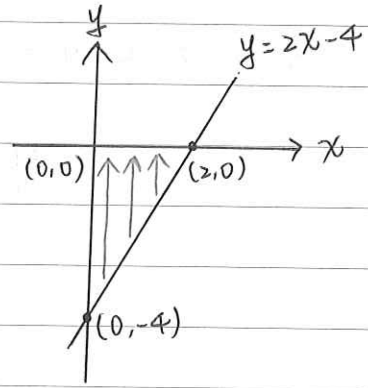
$$=e^2-3 \quad ※$$



Date　　NO.

例3：求 $\int_0^2\int_{2x-4}^0 xy\,dy\,dx=?$

解：先把積分區域畫在 x-y 平面上！



y 方向：從直線 $y=2x-4$ 積到 $y=0$

x 方向：從點 $x=0$ 積到點 $x=2$

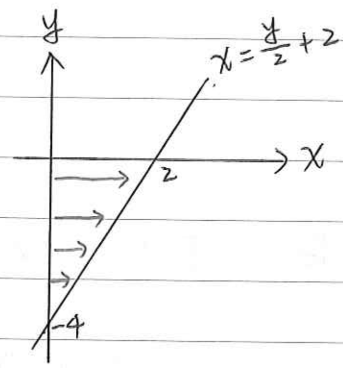
〈法一〉先積 y 再積 x，積分方向如右圖

$$原式=\int_{x=0}^{x=2}\int_{y=2x-4}^{y=0} xy\,dy\,dx$$

$$=\int_{x=0}^{x=2}\left[\frac{xy^2}{2}\right]_{y=2x-4}^{y=0}dx$$

$$=-\int_0^2(2x^3-8x^2+8x)\,dx=-\frac{8}{3}\quad\#$$

〈法二〉先積 x 再積 y，積分方向如右圖



x 方向：從直線 $x=0$ 積到 $x=\frac{y}{2}+2$

y 方向：從點 $y=-4$ 積到點 $y=0$

$$原式=\int_{y=-4}^{y=0}\left[\int_{x=0}^{x=\frac{y}{2}+2} xy\,dx\right]dy$$

$$=\int_{y=-4}^{y=0}\left[\frac{yx^2}{2}\right]_{x=0}^{x=\frac{y}{2}+2}dy$$

$$=\int_{-4}^0\left[\frac{1}{8}y^3+y^2+2y\right]dy=-\frac{8}{3}\quad\#$$

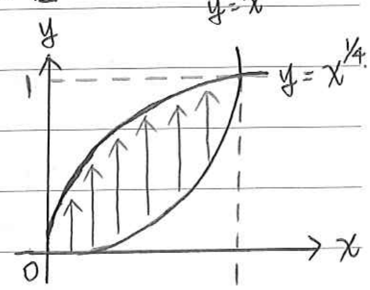
類3：R為由 $y=x^2$ 及 $x=y^4$ 在第一象限之圖形所圍成區域，求 $\iint_R (\sqrt{x}-y^2)\,dx\,dy=?$

解1：先積 y 再積 x，積分區域及積分方向如圖

$$原式=\int_{x=0}^{x=1}\left[\int_{y=x^2}^{y=x^{1/4}}(\sqrt{x}-y^2)\,dy\right]dx$$

$$=\int_{x=0}^{x=1}\left[\sqrt{x}\,y-\frac{1}{3}y^3\right]_{y=x^2}^{y=x^{1/4}}dx$$

$$=\int_0^1\left[\frac{2}{3}x^{3/4}-x^{5/2}+\frac{1}{3}x^6\right]dx=\frac{1}{7}\ \#$$

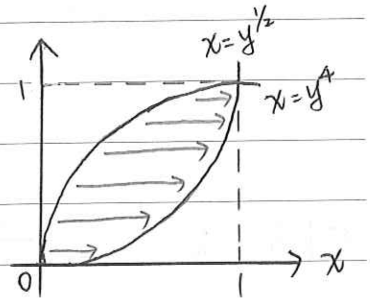


解2：先積 x 再積 y，積分方向如右圖

$$原式=\int_{y=0}^{y=1}\left[\int_{x=y^4}^{x=y^{1/2}}(\sqrt{x}-y^2)\,dx\right]dy$$

$$=\int_{y=0}^{y=1}\left[\frac{2}{3}x^{3/2}-xy^2\right]_{x=y^4}^{x=y^{1/2}}dy$$

$$=\int_0^1\left[\frac{1}{3}y^6+\frac{2}{3}y^{3/4}-y^{5/2}\right]dy=\frac{1}{7}\ \#$$



※故知變換積分順序其結果是不變的！

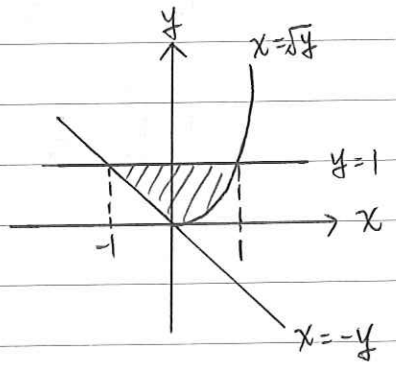
例4：若R是由 $x=\sqrt{y}$、$x=-y$ 與 $y=1$ 所圍成之區域，求 $\iint_R 3x^2y\,dx\,dy$？

解：判斷可知，先積 x 方向較方便！

$$I=\int_0^1\int_{-y}^{\sqrt{y}}3x^2y\,dx\,dy$$

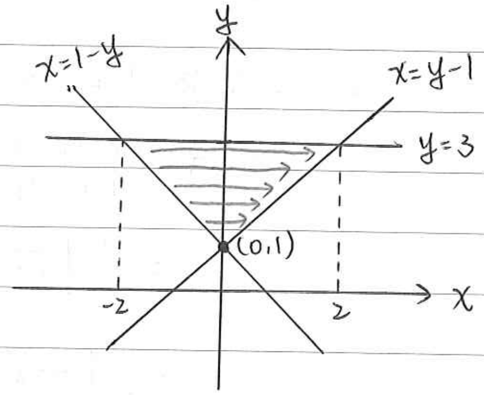
$$=\int_0^1\left[x^3y\right]_{x=-y}^{x=\sqrt{y}}dy$$

$$=\int_0^1(y^{5/2}+y^4)\,dy=\frac{17}{35}\ \#$$



類4：求由直線 $y=-x+1$、$y=x+1$ 與 $y=3$ 所圍成之三角形區域 R 的二重積分 $\iint_R (2x-y^2)\,dx\,dy = ?$

解：積分區域如右



$$\text{原式} = \iint_R (2x-y^2)\,dx\,dy$$

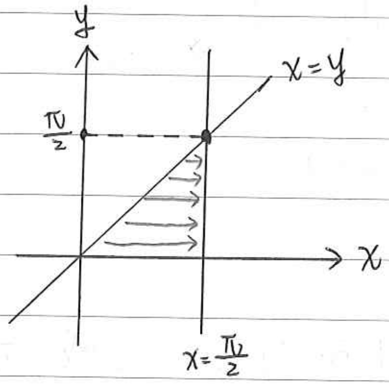
$$= \int_1^3 \int_{x=1-y}^{x=y-1} (2x-y^2)\,dx\,dy$$

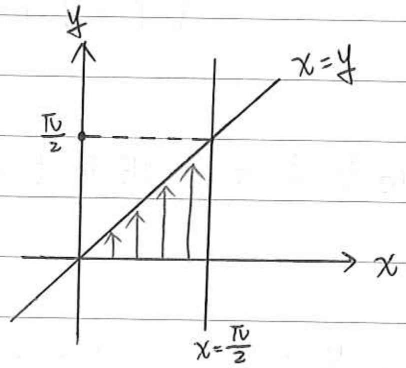
$$= \int_1^3 \left[x^2 - xy^2\right]_{x=1-y}^{x=y-1} dy$$

$$= \int_1^3 (-2y^3+2y^2)\,dy = \left[-\frac{1}{2}y^4 + \frac{2}{3}y^3\right]_1^3 = -\frac{68}{3} \quad ※$$

例5：求 $\int_0^{\pi/2}\int_y^{\pi/2} \frac{\sin x}{2x}\,dx\,dy = ?$

解：





觀察可知原式若先積 x 將不易成功，因此變換積分順序

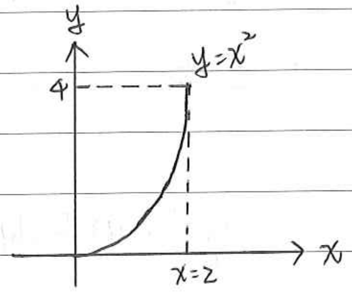
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_y^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{2x}\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{y=0}^{y=x} \frac{\sin x}{2x}\,dy\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{y\sin x}{2x}\right]_{y=0}^{y=x} dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{2}\,dx$$

$$= \left[-\frac{\cos x}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} \quad ※$$

類 5：求 $\int_0^4\int_{\sqrt{y}}^2 y\cos(x^5)\,dx\,dy = ?$



解：原式 $= \int_0^4\int_{\sqrt{y}}^2 y\cos(x^5)\,dx\,dy$

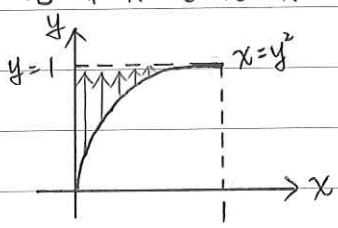
$$= \int_0^2\int_{y=0}^{y=x^2} y\cos(x^5)\,dy\,dx$$

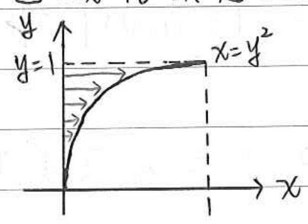
$$= \int_0^2 \left[\frac{y^2}{2}\cos(x^5)\right]_0^{x^2} dx$$

$$= \int_0^2 \frac{x^4}{2}\cos(x^5)\,dx = \left[\frac{1}{10}\sin(x^5)\right]_0^2 = \frac{1}{10}\sin(32) \text{ ※}$$

例 6：求 $\int_0^1\int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3}\,dy\,dx = ?$

解：一看即知要先積 x 方向，積分區域先決定





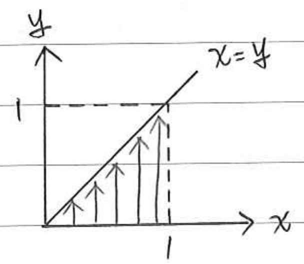
$$I = \int_0^1\int_{x=0}^{x=y^2} e^{y^3}\,dy\,dx = \int_0^1 \left[xe^{y^3}\right]_0^{y^2} dy$$

$$= \int_0^1 y^2e^{y^3}\,dy$$

$$= \left[\frac{1}{3}e^{y^3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}(e-1) \text{ ※}$$

類 6：求 $\int_0^1\int_y^1 x\sqrt{x^3+1}\,dx\,dy = ?$

解：



$$I = \int_0^1\int_{y=0}^{y=x} x\sqrt{x^3+1}\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \left[yx\sqrt{x^3+1}\right]_{y=0}^{y=x} dx$$

$$= \int_0^1 x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$$

$$= \left[\frac{2}{9}(x^3+1)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{9}(2^{3/2}-1) \text{ ※}$$

Date NO.

§8-2 二重積分之坐標變換

二重積分中,令其坐標變換為 $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ 則應有

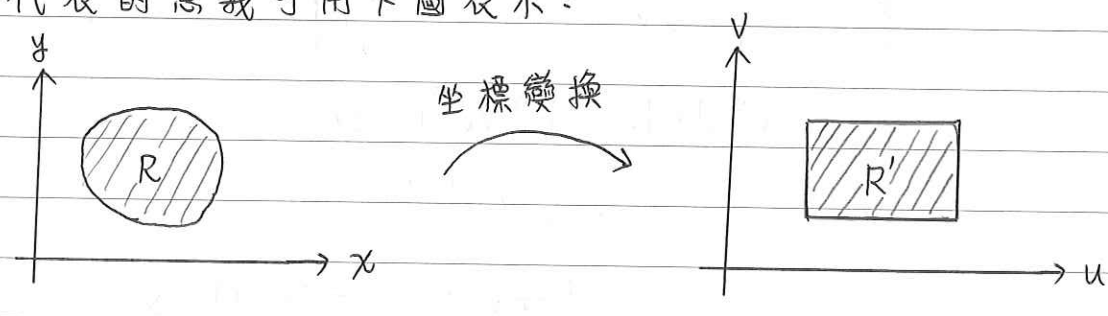
$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_R f[x(u,v),\, y(u,v)]\,\square\,du\,dv$$,其中□代

表什麼意義呢?即為 $dx\,dy = \square\,du\,dv$ 為調整轉換量
(修正量)

(Jacobian)
※定義:賈可比行列式
賈可比表示為 $|J|$,其算式如下:

$$|J| = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left\|\begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{matrix}\right\|$$

$|J|$ 所代表的意義可用下圖表示:



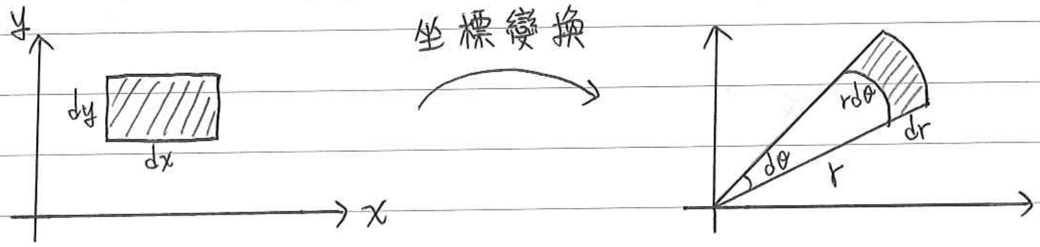
$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{R'} f[x(u,v),\, y(u,v)]\,|J|\,du\,dv$$

即 $dx\,dy = |J|\,du\,dv$

例1：求二維直角坐標與極坐標間之 Jacobian = ?

解：$\because \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $\therefore J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$

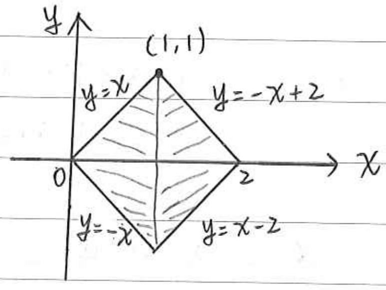
※如果利用二維坐標與極坐標間之「微小面積」比較後，如下圖所示：



則有 $dxdy = r\,dr\,d\theta$，即得 $\iint_{R_{xy}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{R_{r\theta}} f(r,\theta)\,r\,dr\,d\theta$

此式是直角坐標化為極坐標之計算式。

例2：若R之區域如圖所示，求 $\iint_R (x^2+y^2)\,dx\,dy = ?$



解1：直接在 $x-y$ 平面上積分

此處先積 y，再積 x

$$\iint_R (x^2+y^2)\,dx\,dy$$

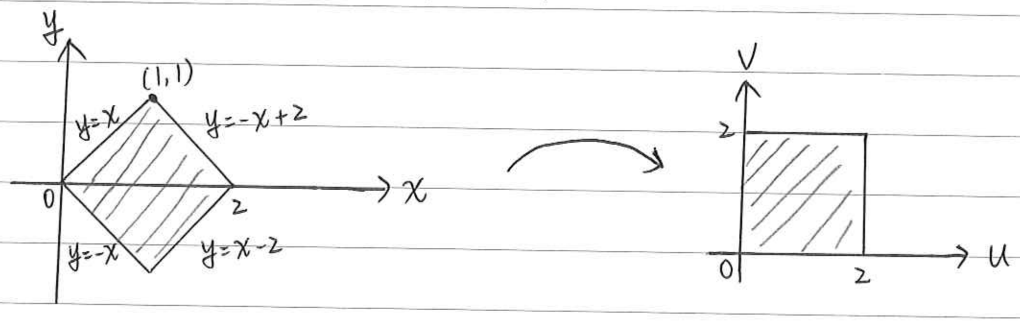
$$= \int_0^1 \left[\int_{y=-x}^{y=x} (x^2+y^2)\,dy \right] dx + \int_1^2 \left[\int_{y=x-2}^{y=-x+2} (x^2+y^2)\,dy \right] dx$$

$$= \frac{8}{3} \quad ※$$

解2：轉換至 $u-v$ 平面，觀察R之邊界線，有 $\begin{cases} x+y = \text{常數} \\ x-y = \text{常數} \end{cases}$

因此令 $\begin{cases} x+y = u \\ x-y = v \end{cases}$，即 $\begin{cases} x = \frac{1}{2}(u+v) \\ y = \frac{1}{2}(u-v) \end{cases}$

則 $|J| = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = \text{abs} \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$ （其中abs為絕對值）



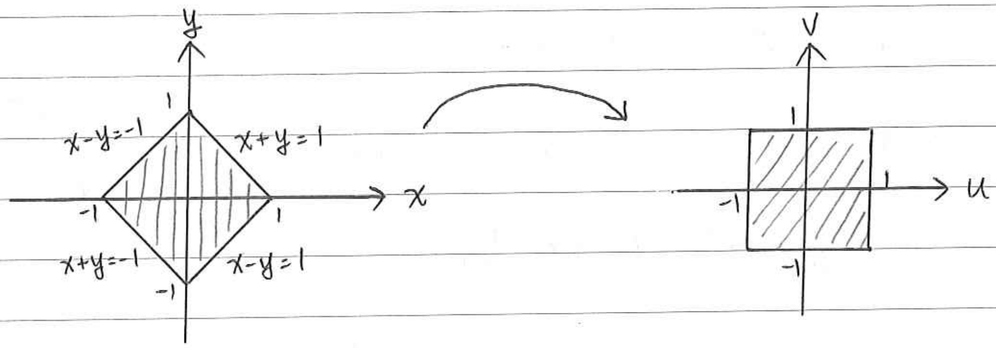
$$\iint_R (x^2+y^2)\,dx\,dy = \iint_{R_{uv}} \left[\left(\frac{u+v}{2}\right)^2 + \left(\frac{u-v}{2}\right)^2 \right] \frac{1}{2}\,du\,dv$$

$$= \int_0^2 \int_0^2 \left[\frac{u^2+v^2}{4} \right] du\,dv$$

$$= \frac{8}{3} \quad ※$$

類2：若區域 $R=\{(x,y):|x|+|y|\le 1\}$，求 $\iint_R e^{x+y}\,dx\,dy=?$

解：



轉換至u-v平面，令 $\begin{cases} x=\frac{u+v}{2} \\ y=\frac{u-v}{2} \end{cases}$，則

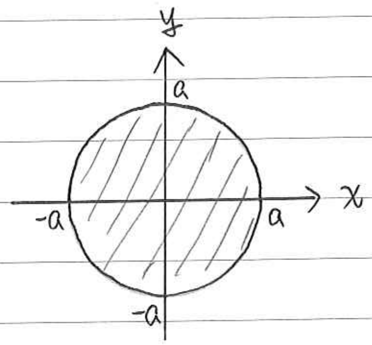
$$|J|=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\text{abs}\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \iint_R e^{x+y}\,dx\,dy=\iint_{R_{uv}}\left[e^{\frac{u+v}{2}+\frac{u-v}{2}}\right]\frac{1}{2}\,du\,dv=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}[e^u]\,du\,dv$$

$$=e-\frac{1}{e} \quad ※$$

例3：若區域 $R=\{(x,y)\mid 0\le x^2+y^2\le a^2\}$，求 $\iint_R (x^2+y^2)\,dA=?$

解：換成極坐標後，積分區域如右：



$$原式=\int_0^{2\pi}\int_0^a r^2\cdot r\,dr\,d\theta$$

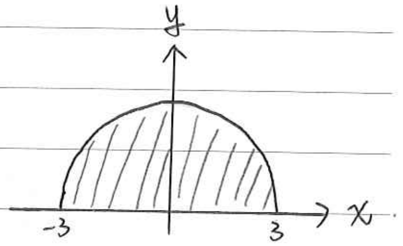
$$=\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^a d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}a^4\,d\theta$$

$$=\frac{\pi}{2}a^4 \quad ※$$

例4：若區域 $R=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 9,\ y\ge 0\}$，求 $\iint\limits_R x^2y\,dx\,dy=?$

解：積分區域如右圖所示：



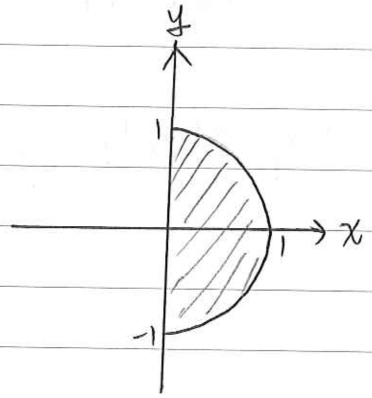
$$\text{原式}=\int_0^{\pi}\int_0^3 (r^2\cos^2\theta)(r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}\int_0^3 r^4\cos^2\theta\sin\theta\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{243}{5}\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta=\left[-\frac{81}{5}\cos^3\theta\right]_0^{\pi}=\frac{162}{5}\quad ※$$

類4：求 $\int_{-1}^{1}\int_0^{\sqrt{1-y^2}}\sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy=?$

解：積分區域如右圖所示：



$$\text{原式}=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^1\sqrt{1-r^2}\,r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[-\frac{1}{3}(1-r^2)^{3/2}\right]_0^1 d\theta$$

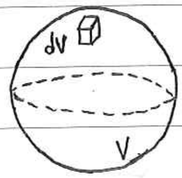
$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{3}\,d\theta=\frac{\pi}{3}\quad ※$$

§8-3 三重積分

✱定義：三重積分

設 $f(x,y,z)$ 為純量函數，且在空間中區域 V 之各點均有意義且連續，若將 V 分割為 n 個小體積 ΔV_k，$k=1,2,\dots n$ 如右圖所示，則

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dV = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k,z_k)\,\Delta V_k$$



稱為 $f(x,y,z)$ 在 V 上之三重積分（又稱體積分）。

✱因為 $dV=dx\,dy\,dz$，因此體積分在計算上可直接積分三次。

例1：若 $V=\{(x,y,z)\,|\,0<x<1,\ 0<y<1,\ 0<z<1\}$，求 $\iiint_V xy^2z^3\,dx\,dy\,dz=?$

解：
$$\iiint_V xy^2z^3\,dx\,dy\,dz = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 xy^2z^3\,dx\,dy\,dz$$
$$=\left(\int_0^1 x\,dx\right)\left(\int_0^1 y^2\,dy\right)\left(\int_0^1 z^3\,dz\right)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{24}\quad ※$$

類1：若 $V=\{(x,y,z)\,|\,0<x<1,\ 0<y<1,\ 0<z<1\}$，求 $\iiint_V yz^3\cos(xyz)\,dx\,dy\,dz=?$

解：
$$\iiint_V yz^3\cos(xyz)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1\int_0^1\left[z^2\sin(xyz)\right]_{x=0}^{x=1}dy\,dz$$
$$=\int_0^1\int_0^1 z^2\sin(yz)\,dy\,dz$$
$$=\int_0^1\left[-z\cos(yz)\right]_{y=0}^{y=1}dz$$
$$=\int_0^1(z-z\cos z)\,dz$$
$$=\left[\frac{1}{2}z^2-z\sin z-\cos z\right]_0^1=\frac{3}{2}-\sin 1-\cos 1\quad ※$$

Date NO.

例 2：求 $\int_0^2\int_0^{4z}\int_{y-z}^{y+z} x\,dx\,dy\,dz = ?$

解：$\int_0^2\int_0^{4z}\int_{y-z}^{y+z} x\,dx\,dy\,dz = \int_0^2\int_0^{4z}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=y-z}^{x=y+z} dy\,dz$

$$= \int_0^2\int_0^{4z} 2yz\,dy\,dz$$

$$= \int_0^2 \left[y^2 z\right]_{y=0}^{y=4z} dz$$

$$= \int_0^2 16z^3\,dz = \left[4z^4\right]_0^2 = 64 \quad ※$$

類 2：求 $\int_0^1\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\int_{2x-y}^{2x+y} z\,dz\,dy\,dx = ?$

解：$\int_0^1\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\int_{2x-y}^{2x+y} z\,dz\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\left[\frac{1}{2}z^2\right]_{z=2x-y}^{z=2x+y} dy\,dx$

$$= \int_0^1\int_0^{\sqrt{4-x^2}} 4xy\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \left[2xy^2\right]_{y=0}^{y=\sqrt{4-x^2}} dx$$

$$= \int_0^1 2x(4-x^2)\,dx$$

$$= \left[4x^2 - \frac{1}{2}x^4\right]_0^1 = \frac{7}{2} \quad ※$$