第四章 不定積分

※定義：不定積分

若 $\frac{d}{dx}[F(x)]=f(x)$，則 $F(x)$ 為 $f(x)$ 的不定積分（反導數），

以符號 $\int f(x)\,dx=F(x)$ 表示

註：1. 微分與不定積分可看成互逆運算

2. $\frac{d}{dx}[F(x)+c]=f(x)$ ［常數 c，微分 = 0］

因此公式 $\int f(x)\,dx=F(x)+c$ （積分公式必加 c）

例如：

$\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$，$\int \sin x\,dx=-\cos x+c$

$\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x$，$\int \cos x\,dx=\sin x+c$

§4-1 由微分得到的積分公式

1. $\int 0\,dx=c$，$[c]'=0$

2. $\int cf(x)\,dx=c\int f(x)\,dx$，$[cf(x)]'=cf'(x)$

3. $\int [f(x)\pm g(x)]\,dx=\int f(x)\,dx\pm\int g(x)\,dx$

4. $\int x^n\,dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+c$，$(x^n)'=nx^{n-1}$，$(x^{n+1})'=(n+1)x^n$

5. $\int \frac{1}{x}\,dx=\ln|x|+c$，$(\ln x)'=\frac{1}{x}$

6. $\int e^x\,dx=e^x+c$

Date NO.

(三角函數積分公式)

7. $\int \cos x \, dx = \sin x + c$

8. $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$

9. $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + c$

10. $\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + c$

11. $\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + c$

12. $\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + c$

反三角函數

13. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \, dx = \sin^{-1}\frac{x}{a} + c \quad , |x| < a$

14. $\int \frac{1}{a^2+x^2} \, dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + c \quad , x \in \mathbb{R}$

15. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}} \, dx = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{x}{a} + c \quad , |x| > a$

例：1. 求 $[x^3-3x^2+6x]' = ?$

解：$3x^2-6x+6$ ※

2. 求 $\int 3x^2-6x+6 \, dx = ?$

解：$3 \cdot \frac{1}{2+1}x^{2+1} - 6 \cdot \frac{1}{1+1}x^{1+1} + 6x + c$

$= x^3-3x^2+6x+c$ ※

公式：$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$

例：1、求 $[y = 2\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}]' = ?$

解：$y' = 2 \cdot \frac{1}{2} x^{-1/2} - (-\frac{1}{2})(\frac{1}{2}) x^{-3/2}$

$= \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{x^3}}$ ※

2、$\int \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{4\sqrt{x^3}} \, dx = ?$

解：原式 $= \int (x^{-1/2} + \frac{1}{4} x^{-3/2}) \, dx = \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} x^{-1/2+1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{-\frac{3}{2}+1} x^{-3/2+1}$

$= 2x^{1/2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} + C$

$= 2\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} + C$ ※

例：1、$\frac{d}{dx}(\sin 2x) = ?$ （鏈鎖律）

解：原式 $= \cos 2x \cdot 2 = 2\cos 2x$ ※

2、$\int 2\cos 2x \, dx = ?$

解：$\int 2\cos 2x \, dx = \sin 2x + C$ ※ 驗算：$[\sin 2x + C]' = 2\cos 2x$

複習：微分 ⇔ 不定積分（加常數 c）

1、$[c]' = 0$ ，$\int 0 \, dx = c$ ，c 是常數

2、$[x]' = 1$ ，$\int 1 \, dx = x + c$ （$\int 1 \, dx = \int dx$）

3、$\begin{cases} [x^n]' = n x^{n-1} \\ [x^{n+1}]' = (n+1) x^n \end{cases}$ ，$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$

4、$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + c$ ，$[\ln x]' = \frac{1}{x}$

5、$\int e^x \, dx = e^x + c$ ，$[e^x]' = e^x$

6、$\int \cos x \, dx = \sin x + c$ ，$[\sin x]' = \cos x$

7、$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$ ，$[\cos x]' = -\sin x$

8、$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx = \sin^{-1} \frac{x}{a} + c$ ，$|x| < a$

9、$\int \frac{1}{a^2 + x^2} \, dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + c$

Date　　NO.

§4-2 變數代換法

註：第16個公式

註：微分鏈鎖律 ⟺ 不定積分

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = F'(g(x))\,g'(x)$$

$$\int \frac{d}{dx}F(g(x))\,dx = \int F'g(x)\frac{d}{dx}g(x)\,dx + C$$

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$$

驗算：

$$F(g(x)) = \int f(g(x))\,g'(x)\,dx$$
$$= \int f(g(x))\,dg(x)$$

※鏈鎖律 ⟷ 變數代換法（積分代換法）

若 $\int f(x)\,dx = F(x) + C$，則

$$\int f(g(t))\,g'(t)\,dx = F(g(t)) + C$$

例1：$\int 2(x^2+1)^3\cdot x\,dx = ?$

解：第1~15公式不好算 ⇒ 變數代換法

令 $u = x^2+1$　（$\int u^3\,du = \frac{1}{4}u^4 + c$）

則 $du = 2x\,dx$

原式：$\int u^3\,du = \frac{1}{4}u^4 + C = \frac{1}{4}(x^2+1)^4 + C$ ※

驗算：$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4}(x^2+1)^4 + c\right) = \frac{1}{4}\cdot 4(x^2+1)^3\cdot 2x + 0$

$= 2(x^2+1)^3\cdot x$

例2：$\int \frac{1-3x}{\sqrt{2x-3x^2}}\,dx = ?$

解：1~15公式不好算 ⇒ 變數代換法

令 $u = 2x-3x^2$

$du = (2-6x)\,dx = 2(1-3x)\,dx$

$$\int \frac{1-3x}{\sqrt{2x-3x^2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1-3x}{\sqrt{2x-3x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\int u^{-1/2}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}\right]u^{-1/2+1} + C$$

$$= u^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{2x-3x^2} + C \quad \#$$

驗算：$\frac{d}{dx}(\sqrt{2x-3x^2} + C)$

$$= \frac{d}{dx}\left((2x-3x^2)^{1/2} + C\right) = \frac{1}{2}(2x-3x^2)^{-1/2} \cdot (2-6x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2x-3x^2}} \cdot (1-3x)$$

例3：$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = ?$

解：令 $u = x^2+1$

$du = 2x\,dx$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{u}}\,dx = \int \frac{2x}{\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = \frac{1}{2}\int u^{-1/2}\,du = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}\right)u^{-1/2+1} + C$$

$$= u^{1/2} + C = (x^2+1)^{1/2} + C = \sqrt{x^2+1} + C \quad \#$$

公式：$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$

Date NO.

例4：$\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx = ?$

解：令 $u=\sqrt{x} \Rightarrow u^2 = x$

$\Rightarrow 2u\,du = dx$

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{1}{u^2+u}\cdot 2u\,du = \int \frac{2}{u+1}\,du$$

令 $v = u+1$

$dv = du$ （换2次）

$$\int \frac{2}{u+1}\,du = \int \frac{2}{v}\,dv = 2\ln|v| + C = 2\ln|u+1| + C$$
$$= 2\ln|\sqrt{x}+1| + C \quad \#$$

例5：$\int \frac{x}{\sqrt{4-x^4}}\,dx = ?$ （一直代换，直到成功）

解：令 $u = x^2$

$du = 2x\,dx$ ， $x = \frac{du}{2dx}$

$$\int \frac{x}{\sqrt{4-x^4}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{4-u^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{4-u^2}}\,du$$
$$= \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{u}{2}\right) + C$$
$$= \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x^2}{2}\right) + C \quad \#$$

公式：$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \sin^{-1}\frac{x}{a} + C$

例6：$\int \frac{\cos x}{1+\sin x}\,dx = ?$

解：令 $u = 1+\sin x$ ， $du = \cos x\,dx$

$$\int \frac{\cos x}{1+\sin x}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C = \ln|1+\sin x| + C \quad \#$$

例7：$\int \tan x \, dx = ?$ （公式）

解：變裝到可以代換（變形）

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

令 $u = \cos x$ ， $du = -\sin x \, dx$

$$-\int \frac{1}{u} du = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C \quad ※$$

※複習：三角函數公式

1、$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ （半角）　　2、$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ （半角）

3、$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ （倍角）　　4、$\sin 2x = 2\sin x \cos x$ （倍角）

5、$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

例8：$\int \cos^2 x \, dx = ?$

解：

$$\int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \int \frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2} dx$$

令 $u = 2x$ ， $du = 2\,dx$

$\frac{1}{2} du = dx$

$$\int \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \cos u \, du = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin u + C$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C \quad ※$$

Date　　　NO.

例 9：$\int \cos^3 x \, dx = ?$

解：$\int \cos^3 x \, dx = \int \cos x \cdot \cos^2 x \, dx = \int \cos x \cdot (1-\sin^2 x) \, dx$

令 $u = \sin x$ ， $du = \cos x$

$$\int (1-\sin^2 x) \cos x \, dx = \int (1-u^2) \, du = u - \frac{1}{3}u^3 + c$$
$$= \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + c \quad \#$$

驗算：$g(x) = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + c$

$g'(x) = \cos x - \sin^2 x \cdot \cos x$

$= \cos x - (1-\cos^2 x) \cdot \cos x = \cos^3 x$

例 10：$\int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \, dx = ?$

解：令 $u = e^x - e^{-x}$ ， $du = (e^x + e^{-x}) \, dx$

原式 $= \int \frac{1}{u} \, du = \ln|u| + c = \ln|e^x + e^{-x}| + c \quad \#$

例 11：$\int x \cdot 10^{x^2} \, dx = ?$

解：換底 $10^{x^2} = e^{x^2 \ln 10}$

令 $u = x^2 \ln 10$

$du = 2x \ln 10 \, dx$

原式 $= \int \frac{1}{2\ln 10} e^u \, du = \frac{1}{2\ln 10} e^u + c = \frac{10^{x^2}}{2\ln 10} + c \quad \#$

例 12：$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = ?$

解：令 $u = \ln x$，$du = \frac{1}{x}\,dx$

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int u\,du = \frac{1}{2}u^2 + C = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C$$

例 13：$\int \frac{1}{x\ln x}\,dx = ?$

解：令 $u = \ln x$，$du = \frac{1}{x}\,dx$

$$\int \frac{1}{x\ln x}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C = \ln|\ln x| + C \quad \#$$

§4-3 分部積分法

微分 $\Leftrightarrow$ 不定積分 (互逆 & 驗算)
(一定可以答對)

$(uv)' = u'v + uv'$，$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

[乘法微分公式]　　[分部積分法]

選擇適當(易積分) $\int u\,dv$

選 u，微分變簡單

選 dv，容易積分

(抽象 → 舉例幫助理解)

Date NO.

例1：$\int \tan^{-1}x \, dx = ?$ （反三角公式）

解：令 $u = \tan^{-1}x$ ， $dv = dx$

$du = \frac{1}{x^2+1} dx$ ， $\int dv = \int dx = x$

$\int u \, dv = \int \tan^{-1}x \, dx = uv - \int v \, du$

$= (\tan^{-1}x)(x) - \int x \cdot \frac{1}{x^2+1} dx$

$= x \cdot \tan^{-1}x - \int \frac{x}{x^2+1} dx$

令 $u = x^2+1$ ， $du = 2x \, dx$

$x \tan^{-1}x - \int \frac{x}{x^2+1} dx = x \tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{u} du$

$= x \tan^{-1}x - \frac{1}{2} \ln|u| + C$

$= x \tan^{-1}x - \frac{1}{2} \ln|x^2+1| + C$ #

例2：$\int \ln x \, dx = ?$

解：令 $u = \ln x$ ， $dv = dx$

$du = \frac{1}{x}$ ， $v = \int dx = x$

原式 $= \int u \, dv = uv - \int v \, du$

$= x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx$

$= x \ln x - x + C$ #

驗算：$g(x) = x \ln x - x + C$

$g'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1$

$= \ln x$

例3：$\int x\ln x\,dx = ?$

解：令 $u=\ln x$ ， $dv = x\,dx$

$du = \frac{1}{x}dx$ ， $v=\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2$

$$\int u\,dv = \int x\ln x\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \int \frac{1}{2}x\cdot dx$$
$$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + c \quad \#$$

驗算：$g(x) = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + c$

$$g'(x) = x\ln x + \frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x} - \frac{1}{2}x$$
$$= x\ln x \quad \#$$

例4：$\int x^2e^x\,dx = ?$

解：令 $u=x^2$ （微分後變簡單）

$v = e^x\,dx$ （容易積分）

$\Rightarrow du = 2x\,dx$

$v = \int e^x\,dx = e^x$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - \int e^x\cdot 2x\,dx = x^2e^x - \underline{2\int xe^x\,dx}$$

使用2次分部積分

令 $u=x$ ， $du=dx$

$v=e^x\,dx$ ， $v=\int e^x\,dx = e^x$

$$x^2e^x - 2\int xe^x\,dx = x^2e^x - 2\left[xe^x - \int e^x\,dx\right]$$
$$= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + c \quad \#$$

§4-4 有理式積分

＊有理式：分數的形式 $\frac{\text{分子}}{\text{分母}}$，$\frac{\text{多項式}P(x)}{\text{多項式}Q(x)}$

＊假分式：若分子 $P(x)$ 最高次大於分母 $Q(x)$ 最高次，稱為假分式。
($\frac{5}{3}$ 假分數)

＊真分式：長除法 商 $+\frac{R(x)}{Q(x)}$，$R(x)$ 的次數小於 $Q(x)$ 的次數。
($\frac{5}{3}=1+\frac{2}{3}$)

註：假分式變形真分式再積分

例 1：$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = ?$ (公式)

解：令 $\begin{cases} x = a\tan\theta \\ \theta = \tan^{-1}\frac{x}{a} \end{cases}$，$dx = a\sec^2\theta\, d\theta$

原式 $=\int \frac{a\sec^2\theta}{a^2\sec^2\theta}\,d\theta = \frac{1}{a}\int d\theta = \frac{1}{a}\theta + c = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + c$ #

類 1：$\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = ?$

解：原式 $=\int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\,dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{3}} + c$ #

例 2： $\int \frac{x+2}{(x+3)(x+1)^2}\,dx = ?$

解：分解真分式 部份分式

令 $\frac{x+2}{(x+3)(x+1)^2} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$

$$= \frac{A(x+1)^2 + B(x+3)(x+1) + C(x+3)}{(x+3)(x+1)^2}$$

$$= \frac{(A+B)x^2 + (2A+4B+C)x + (A+3B+3C)}{(x+3)(x+1)^2}$$

$$A = -\frac{1}{4},\ B = \frac{1}{4},\ C = \frac{1}{2}$$

原式 $= \int \frac{-\frac{1}{4}}{x+3}\,dx + \int \frac{\frac{1}{4}}{x+1}\,dx + \int \frac{\frac{1}{2}}{(x+1)^2}\,dx$

$$= -\frac{1}{4}\ln|x+3| + \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{2(x+1)} + C \quad \#$$

類 2： $\int \frac{4x^2+5x+6}{(x+2)x^2}\,dx = ?$

解：化為部份分式

令 $\frac{4x^2+5x+6}{(x+2)x^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2}$

$$= \frac{Ax^2 + Bx(x+2) + C(x+2)}{(x+2)x^2}$$

$$= \frac{(A+B)x^2 + (2B+C)x + 2C}{(x+2)x^2}$$

$$A = 3,\ B = 1,\ C = 3$$

原式 $= \int \frac{3}{x+2}\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{3}{x^2}\,dx$

$$= 3\ln|x+2| + \ln|x| - \frac{3}{x} + C \quad \#$$

Date　　NO.

例 3：$\int \frac{2x+2}{(x-1)(x^2+1)^2}\,dx = ?$

解：真分式（分子 1 次，分母 5 次）

令 $\frac{2x+2}{(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$

$= \frac{A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x-1)(x^2+1) + (Dx+E)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)(x^2+1)^2}$

比較 x^4 係數　$A+B=0$　　$B=-A=-1$

比較 x^3 係數　$-B+C=0$　　$C=B=-1$

比較 x^2 係數　$2A+B-C+D=0$　　$D=2A-B+C=-2$

$A-C-E=2$　　$E=A-C-2=0$

原式 $= \int \frac{1}{x-1}\,dx - \int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx - \int \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx$

$= \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|(x^2+1)| - \tan^{-1}x + \frac{1}{x^2+1} + C$

類 3：$\int \frac{1-x-2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2}\,dx = ?$

解：化部份分式得 $\frac{1-x-2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{x+1}{x^2+1} + \frac{x}{(x^2+1)^2}$

$\int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx + \int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx$

$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| - \tan^{-1}x - \frac{1}{2(x^2+1)^2} + C$

#

§4-5 根式積分查表法

※積分公式表

1、$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \sin^{-1}\frac{x}{a} + C$

2、$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + C$

3、$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C$

4、$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C$

5、$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$

6、$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right| + C$

例1：$\int \frac{1}{x\sqrt{4x^2-1}}\,dx = ?$

解：第6個公式

變形令 $u=2x$，$du=2dx$

原式 $= \int \frac{1}{\frac{u}{2}\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{2} = \int \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\,du = \sec^{-1}u + C$

$= \sec^{-1}(2x) + C$ #

類1：$\int \frac{1}{x\sqrt{9x^2-25}}\,dx = ?$

解：令 $u=\frac{3}{5}x$，$du=\frac{3}{5}dx$

原式 $= \int \frac{1}{\frac{5}{3}u\cdot 5\sqrt{u^2-1}}\cdot\frac{5du}{3} = \frac{1}{5}\int \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\,du = \frac{1}{5}\sec^{-1}u + C$

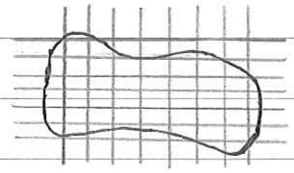
$= \frac{1}{5}\sec^{-1}\left(\frac{3}{5}x\right) + C$ #

Date NO.

第五章 定積分

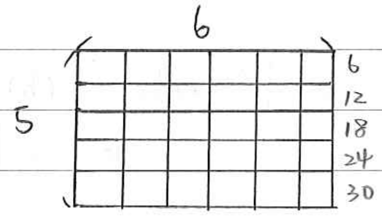
微分 $\xleftrightarrow[\text{互逆}]{}$ 不定積分

- 微分公式 — 不定積分公式
- 定積分
- 不規則形狀面積
- 面積是什麼？測量的結果
  封閉表面區域的大小



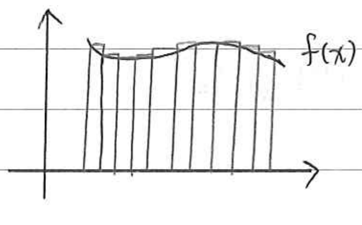
分割不規則形狀成小正方形，再點數多少正方形。標準單位：平方公分（公尺）

*長方形面積為什麼是長乘寬？



點數有多少個正方形，
長個寬個那麼多個正方形，
剛好符合乘法原理。

*黎曼和



面積是多少？

1. 分割 — 將 x 軸分 n 段 $i=1,2,\dots, i=n$
2. 逼近 — 長方形逼近 $\left(\frac{a-b}{n}\right)\cdot f(x_i)$
3. 加總 — $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a-b}{n}\right)\cdot f(x_i)$
4. 極限 — 割愈細愈精準 $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a-b}{n}\right)f(x_i)$

假如收斂 — 黎曼和 $\int_a^b f(x)\,dx$

*定積分

1. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ 線不佔面積
2. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$ 定積分有方向性（跟面積不同）

Date　　NO.

*定理：積分均值定理

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 連續則存在一數 $c\in[a,b]$，

使得 $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\,(b-a)$

*定義：積分平均值

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 之平均值

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

§5-1 微積分基本定理

*定理：微積分基本定理一

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 連續，且 $F'(x) = f(x)$，則 $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$

$= F(x)\Big|_a^b$

註：1、$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

2、$\int_a^b f(x) \pm g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

3、$a<c<b$　$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

*定理：微積分基本定理二

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 連續，且 $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$，$x\in[a,b]$ 則 $F'(x) = f(x)$

註：注意 $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ 的 t 變數。

例：$\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx = ?$

解：原式 $= \ln|x+1|\Big|_0^1 = \ln|1+1| - \ln|0+1| = \ln 2 - \ln 1$

$= \ln 2 - 0 = \ln 2$ ※

例：$\int_1^{16} \left(3\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = ?$

解：原式 $= \int_1^{16} 3x^{1/2} + x^{-1/2}\,dx = \left[3\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1} + \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1}\right]\Big|_1^{16}$

$= \left[2x^{3/2} + 2x^{1/2}\right]\Big|_1^{16}$

$= \left[2\sqrt{x^3} + 2\sqrt{x}\right]\Big|_1^{16}$

$= \left[2\sqrt{16^3} + 2\sqrt{16}\right] - \left[2\sqrt{1} + 2\sqrt{1}\right]$

$= (2\cdot 64 + 2\cdot 4) - 4 = 132$ ※

例：$\int_{1/2}^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = ?$

解：查公式表 ⇒ 原式 $= \sin^{-1}x\Big|_{1/2}^{1/\sqrt{2}} = \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \sin^{-1}\frac{1}{2}$

$= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$ ※

例：$\int_2^3 \frac{-2x^2 - x + 7}{(x-1)^2(x^2+x+2)}\,dx = ?$

解：部份分式

$$\frac{-2x^2-x+7}{(x-1)^2(x^2+x+2)} = \frac{-2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2x+1}{x^2+x+2}$$

原式 $= \left[-2\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \ln|x^2+x+2|\right]\Big|_2^3$

$= (-2\ln 2 - \frac{1}{2} + \ln 14) - (0 - 1 + \ln 8)$

$= \frac{1}{2} + \ln\frac{7}{16}$ ※

Date　　NO.

§5-2 特殊函數的定積分

1、$f(x)$ 奇函數，則 $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

$(f(x) = -f(-x))$

2、$f(x)$ 偶函數，則 $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$

$(f(x) = f(-x))$

3、絕對值函數、高斯函數、條件函數 分段積分

例1：$\int_{-2}^{2} x\sqrt{4+x^2}\,dx = ?$

解：令 $f(x) = x\sqrt{4+x^2}$

$f(-x) = -x\sqrt{4+x^2}$

故 $f(x) = -f(-x)$ 奇函數

$\int_{-2}^{2} x\sqrt{4+x^2}\,dx = 0$ ※

類1：$\int_{-r}^{r} x^3\sqrt{5x^6+7x}\,dx = ?$

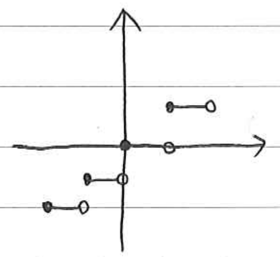
解：令 $f(x) = x^3\sqrt{5x^6+7x}$

$f(-x) = -x^3\sqrt{5x^6+7x}$

故 $f(x) = -f(-x)$ 奇函數，$\int_{-r}^{r} x^3\sqrt{5x^6+7x}\,dx = 0$ ※

例2：$\int_{-1}^{1} [x]\,dx = ?$ 高斯函數

解：



分段積分：原式 $= \int_{-1}^{0} (-1)\,dx + \int_{0}^{1} 0\,dx$

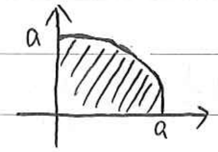
$= -1$ ※

類2：$\int_{-2}^{2}[x]\,dx=?$

解：分段積分：

例3：$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx=?$

解：連結 $\sqrt{a^2-x^2}$ $\frac{1}{4}$個圓



$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{\pi}{4}a^2$$

複習：定積分

$$\int_1^2 x^2\,dx=\left[\frac{1}{2+1}x^{2+1}\right]\Big|_1^2=\frac{1}{3}x^3\Big|_1^2=\left[\frac{1}{3}\cdot2^3\right]-\left[\frac{1}{3}\cdot1^3\right]=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}\ \#$$

*突破：$\int_1^{\infty}x^2\,dx$ ⇒ 無窮大是概念，不能直接計算，只能用極限討論，結果只有可能存在 or 不存在

§5-3 瑕積分 (發散 ⇒ 無窮大)

1、當 $\int_a^{\infty}f(x)\,dx=\lim\limits_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx$ 成立，則 $\int_a^{\infty}f(x)\,dx$ 是收斂 ⇒ 可以算出故值

2、當 $\int_{-\infty}^{b}f(x)\,dx=\lim\limits_{s\to\infty}\int_s^b f(x)\,dx$ 成立，則 $\int_{-\infty}^{b}f(x)\,dx$ 是收斂

3、當 $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx=\lim\limits_{s\to-\infty}\int_s^a f(x)\,dx+\int_a^t f(x)\,dx$，則 $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx$ 是收斂

4、不連續的點或無定義的點，為 $\boxed{\text{端點}}$ 時：使用 lim 極限討論

*瑕積分：

若 $f(x)$ 在 $x=a$ 不連續，$\int_a^b f(x)\,dx=\lim\limits_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\,dx$

$$\int_b^a f(x)\,dx=\lim_{t\to a^-}\int_b^t f(x)\,dx$$

Date NO.

例1：1、$\int_0^{\infty} e^{-x}dx = ?$

解：$\int_0^{\infty} e^{-x}dx = \lim\limits_{t\to\infty}\int_0^{t} e^{-x}dx = \lim\limits_{t\to\infty}[(-1)e^{-x}]\Big|_0^t = \lim\limits_{t\to\infty}[-e^{-t}] - \lim\limits_{t\to\infty}[-e^{0}]$

$= \lim\limits_{t\to\infty}(-\frac{1}{e^t}) + \lim\limits_{t\to\infty} 1$

$= 1$（收斂）#

2、$\int_0^{\infty} x\,dx = ?$（合理變形）

解：$\int_0^{\infty} x\,dx = \lim\limits_{t\to\infty}\int_0^{t} x\,dx = \lim\limits_{t\to\infty}[\frac{1}{2}x^2]\Big|_0^t = \lim\limits_{t\to\infty}[\frac{1}{2}t^2] - \lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{2}\cdot 0^2$

$= \infty$（發散）#

3、$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x}dx = ?$

（切在0為分界）

解：原式 $= \int_{-\infty}^{0} e^{-x}dx + \int_0^{\infty} e^{-x}dx = \lim\limits_{s\to-\infty}\int_s^0 e^{-x}dx + \lim\limits_{t\to\infty}\int_0^{\infty} e^{-x}dx$

$= \lim\limits_{s\to-\infty}\int_s^0 e^{-x}dx + \lim\limits_{t\to\infty}\int_0^{t} e^{-x}dx$

$= \lim\limits_{s\to-\infty}[-e^{-x}]\Big|_s^0 + \lim\limits_{t\to\infty}[-e^{-x}]\Big|_0^t$

$= \lim\limits_{s\to-\infty}[-e^{-0}] - \lim\limits_{s\to-\infty}(-e^{s}) + \lim\limits_{t\to\infty}[-e^{t}] - \lim\limits_{t\to\infty}[-e^{0}]$

$= (-1 + e^{\infty}) + (-\frac{1}{e^{\infty}} + 1)$

$= \infty$（發散）#

例 2：$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = ?$

解：$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} x^{-p} dx = \lim_{t\to\infty} [\frac{1}{-p+1} x^{-p+1}] \Big|_1^t$

$= \lim_{t\to\infty} [\frac{1}{1-p} t^{-p+1} - \frac{1}{p+1}]$

① 當 $p<1$ 時，$\frac{1}{1-p} t^{-p+1} \longrightarrow \infty$，當 $t\to\infty$ (發散)

② 當 $p>1$ 時，$\frac{1}{1-p} t^{-p+1} \longrightarrow 0$，當 $t\to\infty \ni -\frac{1}{p+1}$ 收斂

③ 當 $p=1$ 時，

$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{1}{x} dx = \lim_{t\to\infty} (\ln x)\Big|_1^t = \lim_{t\to\infty} \ln t - 0 = \infty$ (發散)

例 3：$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^p} dx = ?$

解：$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^p} dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{\ln x}{x^p} dx$

① 當 $p\neq 1$，利用分部積分

令 $u = \ln x$，$du = \frac{1}{x} dx$　　$\int u\,dv = uv - \int v\,du$ (公式)

$dv = x^{-p} dx$，$v = \frac{1}{-p+1} x^{-p+1}$

$\lim_{t\to\infty} [(\frac{1}{-p+1} x^{-p+1}) \ln x - \int \frac{1}{-p+1} x^{-p+1} \cdot \frac{1}{x} dx]$

$= \lim_{t\to\infty} [\frac{1}{-p+1} \times \frac{\ln x}{x^{p-1}} - \frac{1}{(-p+1)^2} \times \frac{1}{x^{p-1}}]_1^t$

② 當 $p<1$：原式 $= \infty$，故發散

③ 當 $p>1$：原式 $= \frac{1}{(p-1)^2}$ 收斂

④ 當 $p=1$：$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx = \lim_{t\to\infty} [\frac{1}{2}(\ln x)^2]\Big|_1^t = \infty$ 發散

Date NO.

例 4：$\int_0^{\infty} \frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}\,dx = ?$

解：$\int_0^{\infty} \frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^{t} (\tan^{-1}x)\,d(\tan^{-1}x) = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{2}(\tan^{-1}x)^2\right]_0^t$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{8}$ #

例 5：$\int_0^{3} \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,dx = ?$ (合法變形) 不連續點 ($x=1 \Rightarrow$ 分母 $=0$)

解：

$$\int_0^3 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,dx = \lim_{s\to1^-}\int_0^s \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,dx + \lim_{t\to1^+}\int_t^3 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,dx$$

$$= \lim_{s\to1^-}\left[\frac{1}{-\frac{2}{3}+1}(x-1)^{-\frac{2}{3}+1}\right]_0^s + \lim_{t\to1^+}\left[\frac{1}{-\frac{2}{3}+1}(x-1)^{-\frac{2}{3}+1}\right]_t^3$$

$$= \left[3(x-1)^{1/3}\right]_0^{1^-} + \left[3(x-1)^{1/3}\right]_{1^+}^3$$

$$= [0-(-3)] + [3\sqrt[3]{2} - 0] = 3 + 3\sqrt[3]{2}$$ #