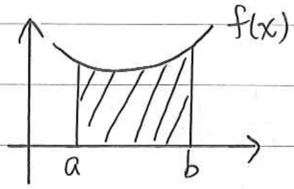
第六章 積分應用

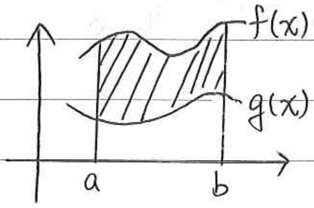
§6-1 面積

1、



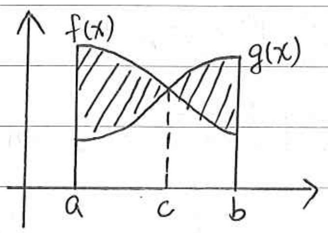
$$= \int_a^b f(x)\,dx$$

2、



$$= \int_a^b f(x) - g(x)\,dx$$

3、



$$= \int_a^c [f(x) - g(x)]\,dx + \int_c^b [g(x) - f(x)]\,dx$$

例1：求 $x^2 = y$ 及其在點(1,1)之切線與 y 軸所圍成的面積？

解：先算切線方程式之斜率：$y' = 2x\big|_{(1,1)} = 2$

點斜式

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

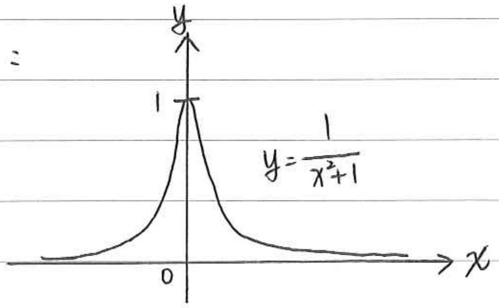
$$\Rightarrow y - 1 = 2(x - 1)$$

$$\Rightarrow y = 2x - 1$$

面積 $= \int_0^1 x^2 - (2x-1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right]\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$ #

例2：求 $y=\frac{1}{x^2+1}$ 與 x 軸所圍的面積？

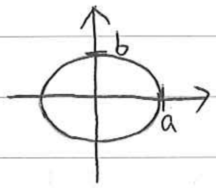
解：



$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+1}\,dx = 2\int_0^{\infty}\frac{1}{x^2+1}\,dx$$
$$=\lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{1}{x^2+1}\,dx$$
$$=2\left[\tan^{-1}x\right]_0^{\infty} = \pi \quad ※$$

例3：求橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所圍之面積？

解：



對稱性 $b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$

面積 $=4\int_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx = \frac{4b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

$$=\frac{4b}{a}\left[\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a$$

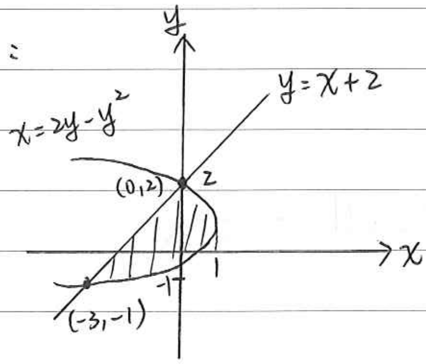
*公式：

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}$$

$$=\frac{4b}{a}\left[\cancel{\frac{1}{2}a\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}1\right]-\left[\cancel{\frac{a^2}{2}\sin 0}\right]$$
$$=\frac{4b}{a}\cdot\frac{a^2}{2}\sin^{-1}1$$
$$=\frac{4b}{a}\cdot\frac{a^2}{4}\pi = ab\pi \quad ※$$

例4：求 $x=2y-y^2$ 與 $y=x+2$ 所圍的面積？

解：



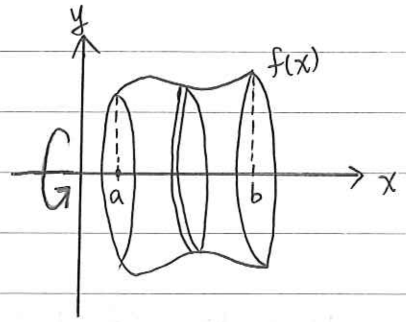
$\begin{cases} y=x+2 \\ x=2y-y^2 \end{cases}$ 解得 $(-3,-1)$、$(0,2)$

面積 $=\int_{-1}^{2}(2y-y^2)-(y-2)\,dx$

$$=\int_{-1}^{2}(-y^2+y+2)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{2}y^2+2y\right]_{-1}^{2}$$
$$=\left[-\frac{8}{3}+2+4\right]-\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right]=\frac{9}{2} \quad ※$$

§6-2 旋轉體體積

*圓盤法



程序：1、分割—圓盤

2、逼近 $\pi(f(x))^2(\frac{b-a}{n})$

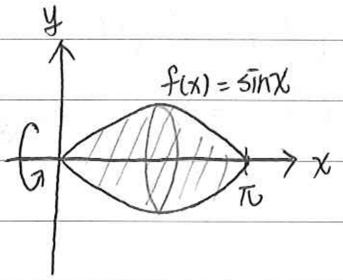
3、加總 $\sum_{i=1}^{n}\pi(f(x))^2\,dx$

4、極限 $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\pi(f(x))^2\,dx$

體積 $=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$

例1：曲線 $y=\sin x\ (0\le x\le\pi)$ 與 x 軸圍成之區域繞 x 軸旋轉的體積？

解：

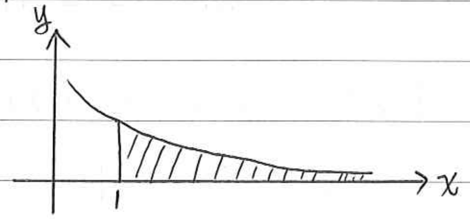


$$
\begin{aligned}
\text{體積} &= \pi\int_a^b f^2(x)\,dx \\
&= \pi\int_0^{\pi}(\sin x)^2\,dx \\
&= \pi\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx \\
&= \pi\int_0^{\pi}\frac{1}{2}-\frac{\cos 2x}{2}\,dx \\
&= \pi\left[\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\pi} \\
&= \pi\left[\frac{\pi}{2}-\frac{\sin 2\pi}{4}\right]-\pi\left[\frac{0}{2}-\frac{\sin 0}{4}\right] = \frac{\pi^2}{2}
\end{aligned}
$$

※

類1：曲線 $y=\frac{1}{x}$，$1\le x<\infty$ 與 x 軸圍成之區域繞 x 軸旋轉之體積？

解：

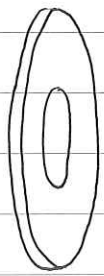


$$
\begin{aligned}
\text{體積} &= \pi\int_1^{\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^2 dx \\
&= \pi\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx \\
&= \pi\left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\infty} \\
&= \pi
\end{aligned}
$$

※

Date　　NO.

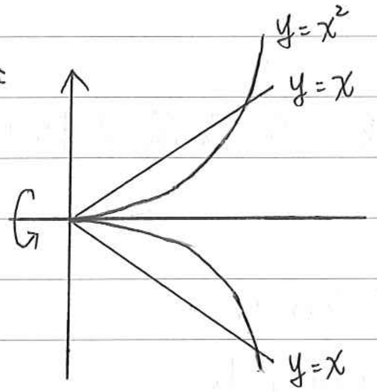
※墊片法



$$體積 = \pi \int_a^b f^2(x) - g^2(x)\, dx$$

例 2：求 $y=x$ 與 $y=x^2$ 在 $[0,1]$ 之交集區域繞 x 軸旋轉之體積？

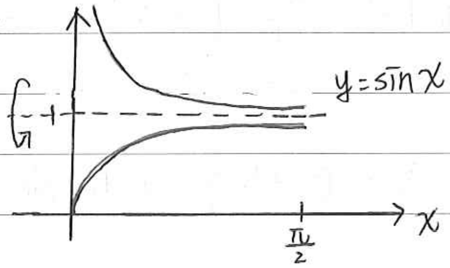
解：



$$體積 = \pi \int_0^1 [x^2 - (x^2)^2]\, dx$$
$$= \pi \int_0^1 (x^2 - x^4)\, dx$$
$$= \pi \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^1$$
$$= \pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{2}{15}\pi \quad ※$$

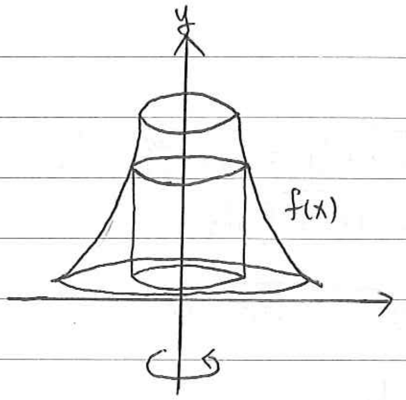
例 3：求 $y=\sin x$ $(0 \le x \le \frac{\pi}{2})$ 與 $y=1$ 所圍之區域繞 $y=1$ 旋軸體積？

解：



$$體積 = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin x)^2\, dx$$
$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - 2\sin x + \sin^2 x\, dx$$
$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - 2\sin x + \frac{1-\cos 2x}{2}\, dx$$
$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{2} - 2\sin x - \frac{\cos 2x}{2}\, dx$$
$$= \pi \left[\frac{3}{2}x + 2\cos x - \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \pi\left[\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + 0 - 0\right] - \pi[0+2-0]$$
$$= \pi\left(\frac{3}{4}\pi - 2\right)$$
$$= \frac{3}{8}\pi^2 - 2\pi \quad ※$$

※圓殼法



程序：1、分割

2、逼近 $2\pi \cdot x \cdot f(x)\,dx$

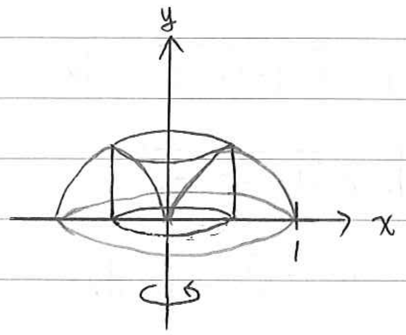
3、加總 $\sum_{i=1}^{n} 2\pi x f(x)\,dx$

4、極限 $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 2\pi x f(x)\,dx$

體積 $= 2\pi\int_a^b x f(x)\,dx$

例1：求 $y=x-x^3$ 與 x 軸所圍區域繞 y 軸旋轉之體積？

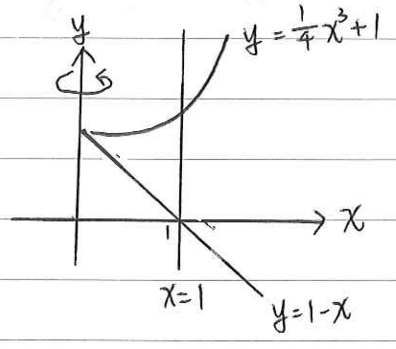
解：



$$
\begin{aligned}
\text{體積} &= 2\pi\int_0^1 x(x-x^3)\,dx \\
&= 2\pi\int_0^1 (-x^4+x^2)\,dx \\
&= 2\pi\left[-\frac{x^5}{5}+\frac{x}{3}\right]_0^1 \\
&= 2\pi\left(-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{15}\pi \quad ※
\end{aligned}
$$

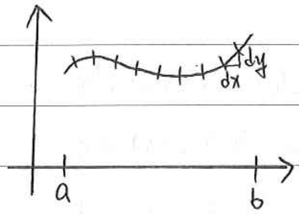
類1：求 $y=\frac{1}{4}x^3+1$，$y=1-x$ 與 $x=1$ 所圍區域繞 y 軸旋轉的體積？

解：



$$
\begin{aligned}
\text{體積} &= 2\pi\int_0^1 x\left[\frac{1}{4}x^3+1-(1-x)\right]dx \\
&= 2\pi\int_0^1 \left(\frac{1}{4}x^4+x^2\right)dx \\
&= 2\pi\left[\frac{1}{20}x^5+\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 \\
&= 2\pi\left[\frac{1}{20}+\frac{1}{3}\right] \\
&= \frac{23}{30}\pi \quad ※
\end{aligned}
$$

§6-3 弧長



程序：1. 分割

2. 逼近 $\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\ dx$

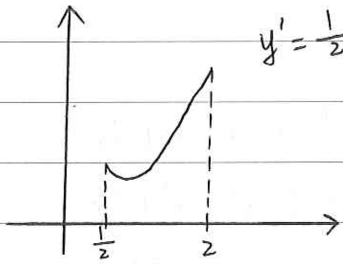
3. 加總 $\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\ dx$

4. 極限 $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\ dx$

$$弧長=\int_a^b\sqrt{1+(f(x))^2}\ dx$$

例1：求 $y=\frac{x^3}{6}+\frac{1}{2x}$ 在 $[\frac{1}{2},2]$ 的弧長？

解：



$y'=\frac{1}{2}(x^2-\frac{1}{x^2})$

$$弧長=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\sqrt{1+[\frac{1}{2}(x^2-\frac{1}{x^2})]^2}\ dx$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\sqrt{\frac{1}{4}(x^4+2+\frac{1}{x^4})}\ dx$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\sqrt{(\frac{1}{2})^2(x^2+\frac{1}{x^2})^2}\ dx$$

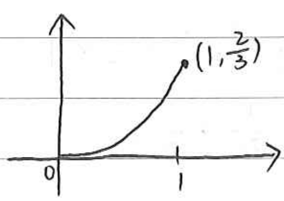
$$=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{1}{2}(x^2+\frac{1}{x^2})\ dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}-\frac{1}{x}\right]_{\frac{1}{2}}^{2}$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{13}{6}+\frac{47}{24})=\frac{33}{16}$$ ※

例2：求 $y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ 在 $[0,1]$ 間的弧長？

解：



$y'=\sqrt{x}$

$$弧長=\int_0^1\sqrt{1+(y')^2}\ dx$$

$$=\int_0^1\sqrt{1+x}\ dx$$

$$=\left[\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$=\frac{2}{3}(\sqrt{8}-1)$$ ※

第七章 偏微分及其應用

§7-1 雙變數函數之極限與連續

✱定義：極限

若雙變數函數 $z=f(x,y)$ 在點 $P(x_0,y_0)$ 之鄰域內均有定義

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=L$，則稱 L 為 $f(x,y)$ 在 $x\to x_0$ 及 $y\to y_0$ 之極限。

✱定義：連續

若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$，則稱 $f(x,y)$ 在 $P(x_0,y_0)$ 點為連續。

例1：求 $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-1)} \dfrac{3xy}{x^2+y^2}=?$

解：以 $x=2$ 及 $y=-1$ 代入

$$\lim_{(x,y)\to(2,-1)} \frac{3xy}{x^2+y^2}=-\frac{6}{5} \quad ✱$$

類1：求 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}=?$

解：以 $x=1$ 及 $y=1$ 代入

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{2xy}{x^2+y^2}=\frac{2}{2}=1 \quad ✱$$

例2：求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{5x^2y}{x^2+y^2}=?$

解：令 $y=mx$（斜率表示法）代入

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^2y}{x^2+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{5x^2mx}{x^2+m^2x^2}=\frac{5m}{1+m^2}\lim_{x\to0}x=0 \quad ✱$$

Date NO.

類 2：求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}=?$

解：令 $y=mx$ 代入

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^4+m^4x^4}{x^2+m^2x^2} = \frac{1+m^4}{1+m^2}\lim_{x\to 0} x^2 = 0$$ ※

例 3：$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & ，當 (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ，當 (x,y)=(0,0) \end{cases}$，求 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 是否連續？

解：令 $y=mx$ 代入

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{mx^2(x^2-m^2x^2)}{x^2+m^2x^2} = \frac{m(1-m^2)}{1+m^2}\lim_{x\to 0} x^2 = 0$$

且 $f(0,0)=0$，∴ 連續 ※

類 3：$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{2x^2+y^2} & ，當 (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ，當 (x,y)=(0,0) \end{cases}$，則 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 是否連續？

解：令 $y=mx$ 代入

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3}{2x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot m^3x^3}{2x^2+m^2x^2} = \frac{m^3}{2+m^2}\lim_{x\to 0} x^3 = 0$$

且 $f(0,0)=0$，∴ 連續 ※

§7-2 偏導數

＊定義：偏導數

如果極限 $\frac{\partial f}{\partial x} \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$ 存在，則稱此極限值為 $f(x,y)$ 在點 (x_0, y_0) 處，對 x 之偏導數，記為 $\frac{\partial f}{\partial x}$、$f_x$ 或 f_1。同理，$f(x,y)$ 在點 (x_0, y_0) 處，對 y 之偏導數為 $\frac{\partial f}{\partial y} \equiv \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$，記為 $\frac{\partial f}{\partial y}$、$f_y$ 或 f_2。

＊定義：高階偏導數

定義 $z=f(x,y)$ 之高階偏導數有如下之符號：

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \equiv f_{xx} = f_{11}$ ……… 對 x 微分兩次

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \equiv f_{yy} = f_{22}$ ……… 對 y 微分兩次

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \equiv f_{yx} = f_{21}$ ……… 先對 y 微分，再對 x 微分

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \equiv f_{xy} = f_{12}$ ……… 先對 x 微分，再對 y 微分

例 1：$f(x,y) = 3x - x^2y^2 + 2x^3y$，求 $\frac{\partial f}{\partial x}$、$\frac{\partial f}{\partial y} = ?$

解：$\frac{\partial f}{\partial x} = 3 - 2xy^2 + 6x^2y$; $\frac{\partial f}{\partial y} = -2x^2y + 2x^3$ #

類 1：$w = (x^2y + xy)^2$，求 $\frac{\partial w}{\partial x} = ?$

解：視 y 為常數

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2(x^2y + xy)(2xy + y)$$ #

例 2：$f(x,y)=3x^3y+4xy^2-2x+4y-5$，求 (1) $\frac{\partial f}{\partial x}(2,3)=?$

(2) $\frac{\partial f}{\partial y}(2,3)=?$

解：(1) $\frac{\partial f}{\partial x}=9x^2y+4y^2-2$　　$\therefore \frac{\partial f}{\partial x}(2,3)=142$

(2) $\frac{\partial f}{\partial y}=3x^3+8xy+4$　　$\therefore \frac{\partial f}{\partial y}(2,3)=76$

#

類 2：$f(x,y)=\sin(x^2+y)$，求 $\frac{\partial f}{\partial x}(0,\pi)=?$ $\frac{\partial f}{\partial y}(0,\pi)=?$

解：$\frac{\partial f}{\partial x}=2x\cos(x^2+y)$　　$\therefore \frac{\partial f}{\partial x}(0,\pi)=0$

$\frac{\partial f}{\partial y}=\cos(x^2+y)$　　$\therefore \frac{\partial f}{\partial y}(0,\pi)=-1$

例 3：$f(x,y)=e^{ny}\cos nx$，求 $f_{xx}+f_{yy}=?$

解：$f_x=-ne^{ny}\sin nx$，$f_{xx}=-n^2e^{ny}\cos nx$

$f_y=ne^{ny}\cos nx$，$f_{yy}=n^2e^{ny}\cos nx$

$\therefore f_{xx}+f_{yy}=0$ #

類 3：若 $u=x^2-y^2$，試證 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

解：$\frac{\partial u}{\partial x}=2x$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2$

$\frac{\partial u}{\partial y}=-2y$，$\frac{\partial u}{\partial y^2}=-2$

$\therefore \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 得證 #

例4：設 $f(x,y)$ 滿足 $\frac{\partial f}{\partial x}=x^2+y^2$，$\frac{\partial f}{\partial y}=2xy$ 及 $f(0,0)=1$，求 $f(x,y)=?$

解：$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}=x^2+y^2 \Rightarrow f=\frac{1}{3}x^3+xy^2+c \\ \frac{\partial f}{\partial y}=2xy \Rightarrow f=xy^2+c \end{cases}$

取聯集得 $f(x,y)=\frac{1}{3}x^3+xy^2+c$

又 $f(0,0)=1 \Rightarrow c=1$　$\therefore f(x,y)=\frac{1}{3}x^3+xy^2+1$ #

類4：設 $f(x,y)$ 滿足 $\frac{\partial f}{\partial x}=\ln x+1+2x\ln y$，且 $f(1,y)=-y^2$，求 $f(x,y)=?$

解：視 y 為常數，積分得 $f(x,y)=x\ln x+x^2\ln y+g(y)$

又 $f(1,y)=\ln y+g(y)=-y^2 \Rightarrow g(y)=-y^2-\ln y$

$\therefore f(x,y)=x\ln x+x^2\ln y-y^2-\ln y$ #

§7-3 可微分觀念與鏈鎖法則

＊定義：可微分

已知 $z=f(x,y)$，當 $\begin{cases} x \xrightarrow{\text{改變}} x+\Delta x \\ y \xrightarrow{\text{改變}} y+\Delta y \end{cases}$，使得 $z \xrightarrow{\text{變成}} z+\Delta z$

＊定理：可微分之數學表示式

$z=f(x,y)$ 在某一區域內 $\frac{\partial f}{\partial x}$、$\frac{\partial f}{\partial y}$ 均連續，則 $z=f(x,y)$ 可微分，且 $dz=df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$

Date NO.

＊定義：全微分

若函數 $f(x,y)$ 可微分，則 $df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$，由外型看出 df 可視為 $f(x,y)$ 隨 x、y 之變動量和，故稱 df 為全微分。

＊定理：鏈鎖律

1、若 $z=f(x,y)$，且 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ 時，則 $\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$。

2、若 $w=f(x,y,z)$，且 $x=x(u,v)$，$y=y(u,v)$，$z=z(u,v)$，路徑圖為

$$w \begin{cases} x < \begin{matrix} u \\ v \end{matrix} \\ y < \begin{matrix} u \\ v \end{matrix} \\ z < \begin{matrix} u \\ v \end{matrix} \end{cases}$$

，則 $\frac{\partial w}{\partial u}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}$，

$$\frac{\partial w}{\partial v}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}$$

例1：設 $f(x,y)=x^3+y^3$，且 $x=2\sin t$，$y=3\cos t$，求 $\frac{df}{dt}=?$

解：路徑圖為 $f < \begin{matrix} x - t \\ y - t \end{matrix}$

$$\therefore \frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}=3x^2\cdot 2\cos t+2y(-3\sin t)$$

$$=6x^2\cos t-6y\sin t \quad ＃$$

類 1：設 $f(x,y)=3x^2+y^2$，且 $x=r^2e^s$，$y=\sin(rs)$，求 $\frac{\partial f}{\partial r}$、$\frac{\partial f}{\partial s}=?$

解：路徑圖為 $f\begin{cases} x\begin{cases} r\\ s\end{cases}\\ y\begin{cases} r\\ s\end{cases}\end{cases}$，則

$$\frac{\partial f}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=6x\cdot 2re^s+2y\cdot s\cos(rs)$$
$$=12xre^s+2ys\cos(rs) \quad ※$$

$$\frac{\partial f}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}=6x\cdot r^2e^s+2y\cdot r\cos(rs)$$
$$=6xr^2e^s+2yr\cos(rs) \quad ※$$

§7-4 隱函數之微分理論

1、二變數之函數 $F(x,y)=0$，視 x 為自變數，y 為因變數，$F(x,y)=0$ 之全微分關係式為

$$dF=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$$

2、三變數的函數 $F(x,y,z)=0$ 之全微分關係式為

$$dF=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz=0$$

例 1：設 $x^2\cos y-y^2\sin x=0$，求 $\frac{dy}{dx}=?$

解：設 $F(x,y)=x^2\cos y-y^2\sin x=0$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{2x\cos y-y^2\cos x}{-x^2\sin y-2y\sin x} \quad ※$$

類 1：設 $F(x,y,z)=xye^z+yze^x+xze^y+1=0$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}=?$ $\frac{\partial z}{\partial y}=?$

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{ye^z+yze^x+ze^y}{xye^z+ye^x+xe^y}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{xe^z+ze^x+xze^y}{xye^z+ye^x+xe^y}$ ※

Date NO.

例 2：設 $z+\ln z = xy$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}=?\ \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=?$

解：設 $F(x,y,z) = xy - z - \ln z = 0$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{y}{-1-\frac{1}{z}} = \frac{yz}{1+z} \quad \#$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{yz}{1+z}\right) = \frac{(z+y\frac{\partial z}{\partial y})(1+z) - yz\frac{\partial z}{\partial y}}{(1+z)^2}$$

$$= \frac{z+z^2+y\frac{\partial z}{\partial y}}{(1+z)^2} \quad \text{—— (a)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{x}{-1-\frac{1}{z}} = \frac{xz}{1+z} \quad \text{—— (b)}$$

將(b)代入(a) $\Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = \frac{z+2z^2+z^3+xyz}{(1+z)^3}$ #

※注意：欲求 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$，不可將 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 直接對 y 取偏微分，
因為 $z=z(x,y)$！

類 2：設 $x = yz + \ln y$，求 $\frac{\partial y}{\partial x}=?\ \frac{\partial^2 y}{\partial z\partial x}=?$

解：設 $F(x,y,z) = x - yz - \ln y = 0$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{1}{-z-\frac{1}{y}} = \frac{y}{yz+1}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z\partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{y}{yz+1}\right) = \frac{\frac{\partial y}{\partial z}(yz+1) - y(y+z\frac{\partial y}{\partial z})}{(yz+1)^2}$$

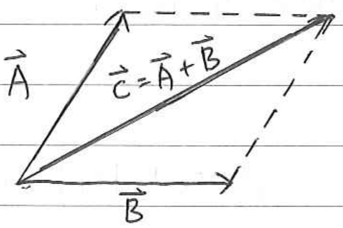
$$= \frac{\frac{\partial y}{\partial z} - y^2}{(yz+1)^2} = \frac{-2y^2-y^3z}{(yz+1)^3} \quad \#$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{F_z}{F_y} = -\frac{-y}{-z-\frac{1}{y}} = -\frac{y^2}{yz+1}$$

§7-5 向量分析

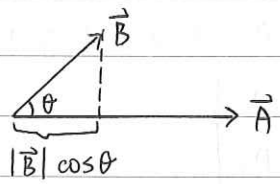
1. 向量指具「大小」與「方向」之量，記為 $\vec{v}$，其大小以 $|\vec{v}|$ 表之。

2. 向量的加法依據合力原則，遵守平行四邊形定理，
如圖所示，即 $\vec{A}+\vec{B}=\vec{C}$。



※內積

$\vec{A}$、$\vec{B}$ 二向量的內積定義為 $\vec{A}\cdot\vec{B}=|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$，其中 θ 為 $\vec{A}$、$\vec{B}$ 二向量的夾角。



例1：設 $\vec{A}=2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$，$\vec{B}=-\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$，求 $\vec{A}\cdot\vec{B}=?$

解：$\vec{A}\cdot\vec{B}=-2-1+6=3$ ※

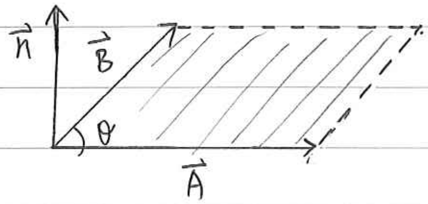
類1：設 $\vec{A}=-2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$，$\vec{B}=-\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$，求 $\vec{A}\cdot\vec{B}=?$

解：$\vec{A}\cdot\vec{B}=2-3+12=11$ ※

※定義：外積

1、$\vec{A}$與$\vec{B}$的外積定義為 $\vec{A}\times\vec{B}=(|\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta)\,\vec{n}$，其中$\theta$為$\vec{A}$、$\vec{B}$之夾角，$\vec{n}\perp\vec{A}$ 且 $\vec{n}\perp\vec{B}$ 的單位向量 $\vec{n}$，方向由右手定則決定。

2、幾何意義為：$\vec{A}\times\vec{B}$的大小等於$\vec{A}$、$\vec{B}$所決定的平行四邊形之面積，方向為垂直這個平行四邊形的向量，如圖所示。



面積為 $|\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta$

※性質

1、若 $\vec{A}\,/\!/\,\vec{B}$，則外積結果為 0

2、$\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$，即兩者大小相同，方向相反。

3、在三維空間中，若 $\vec{A}=A_1\vec{i}+A_2\vec{j}+A_3\vec{k}$，$\vec{B}=B_1\vec{i}+B_2\vec{j}+B_3\vec{k}$，

則 $\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\end{vmatrix}$

例 2：$\vec{A}=2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$，$\vec{B}=-\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$，求 $\vec{A}\times\vec{B}=?$

解：

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 1 & 3\\ -1 & -1 & 2\end{vmatrix}=5\vec{i}-7\vec{j}-\vec{k}$$ ※

類 2：設 $\vec{A}=-2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$，$\vec{B}=-\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}$，求 $\vec{A}\times\vec{B}=?$

解：

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & -1 & 3\\ -1 & -3 & 4\end{vmatrix}=5\vec{i}+5\vec{j}+5\vec{k}$$ ※

例3：設 $\vec{A}=\vec{i}-2\vec{j}-2\vec{k}$，$\vec{B}=6\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$，求 $\vec{A}$ 與 $\vec{B}$ 之夾角？

解：$\cos\theta=\dfrac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}=\dfrac{6-6-4}{3\cdot 7}=-\dfrac{4}{21}$

$\therefore \theta=\cos^{-1}(-\frac{4}{21})$ ※

類3：設 $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}$，$\vec{b}=3\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$，求 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 之夾角？

解：$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{6+3+8}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{14}}=-\dfrac{17}{\sqrt{406}}$

$\therefore \theta=\cos^{-1}\frac{17}{\sqrt{406}}$ ※

例4：有個三角形以 A(1,-1,0)、B(2,1,-1)、C(-1,1,2) 為三頂點，求面積？

解：$\overrightarrow{AB}=(1,2,-1)$，$\overrightarrow{AC}=(-2,2,2)$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&2&-1\\-2&2&2\end{vmatrix}=6\vec{i}+6\vec{k}$$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}\sqrt{6^2+6^2}=3\sqrt{2}$ ※

類4：有個三角形以 A(1,0,0)，B(2,0,-1)，C(1,4,3) 為三頂點，求面積？

解：$\overrightarrow{AB}=(1,0,-1)$，$\overrightarrow{AC}=(0,4,3)$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&0&-1\\0&4&3\end{vmatrix}=4\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}$$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}\sqrt{4^2+(-3)^2+4^2}=\frac{\sqrt{41}}{2}$ ※

Date NO.

§7-6 多變數函數之極值

*臨界點或靜止點

1. 極大點：從 x 方向或 y 方向看均為極大。
2. 極小點：從 x 方向或 y 方向看均為極小。
3. 鞍點：從 x 方向看為極小，但從 y 方向看為極大；或從 x 方向看為極大，但從 y 方向看為極小。

*定理：尋找臨界點

若 $z=f(x,y)$ 在點 (a,b) 為臨界點，則

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$$

*定理：雙變數函數極點判斷法

對函數 $f(x,y)$ 而言，已知在點 (a,b) 為臨界點，令

$$f_{xx}(a,b)\equiv A,\ f_{xy}(a,b)\equiv B,\ f_{yy}(a,b)\equiv C,\ H\equiv\begin{vmatrix}A & B\\ B & C\end{vmatrix}=AC-B^2$$

則：1. $A>0,\ H>0 \Rightarrow$ 極小點

2. $A<0,\ H>0 \Rightarrow$ 極大點

3. $H<0 \Rightarrow$ 鞍點

4. $H=0 \Rightarrow$ 不能判斷（極大點、極小點、鞍點皆有可能）

例1：求 $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$ 之極值與鞍點？

解：由 $\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2-3y=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=3y^2-3x=0\end{cases}$ 解得 $(0,0)$、$(1,1)$ 為臨界點

(1) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x$ ，$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6y$ ，$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-3$

(2) 點 $(0,0)$：$f_{xx}=0$，$f_{xy}=-3$，$f_{yy}=0$ ，$H=\begin{vmatrix}0&-3\\-3&0\end{vmatrix}=-9$ ，故 $(0,0)$ 為鞍點

(3) 點 $(1,1)$：$f_{xx}=6$，$f_{xy}=-3$，$f_{yy}=6$ ，$H=\begin{vmatrix}6&-3\\-3&6\end{vmatrix}=27$ ，故 $(1,1)$ 為極小點

(4) $f\big|_{min}=f(1,1)=-1$

※

類1：設 $f(x,y)=x^2+y^2+xy-3x-3y$ ，求極值？

解：由 $\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=2x+y-3=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=2y+x-3=0\end{cases}$ ，解得 $(1,1)$ 為臨界點

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2$ ，$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2$ ，$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=1$ ，$H=\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}=3$ ，

故 $(1,1)$ 為極小點。

例2：求點 $(1,2,0)$ 與曲面 $z^2=x^2+y^2$ 之最短距離？

解：設曲面上該點為 (x,y,z)，則 $d(x,y,z)=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+z^2}$

將 $z^2=x^2+y^2$ 代入 $d(x,y,z)$ 得 $d(x,y)=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+x^2+y^2}$

即 $d^2(x,y)=(x-1)^2+(y-2)^2+x^2+y^2$

$=2x^2-2x+2y^2-4y+5\equiv l$

由 $\begin{cases}\frac{\partial l}{\partial x}=4x-2=0\\ \frac{\partial l}{\partial y}=4y-4=0\end{cases}$ 解得 $x=\frac{1}{2}$，$y=1$

∴最小值為 $d=\frac{\sqrt{10}}{2}$ ※

類2：求點 $(1,2,0)$ 與曲面 $z=\sqrt{x^2+2y^2}$ 之最短距離？

解：設曲面上該點為 (x,y,z)，則 $d(x,y,z)=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+z^2}$

令 $z=\sqrt{x^2+2y^2}$ 代入 $d(x,y,z)$ 得 $d(x,y)=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+x^2+2y^2}$

即 $d^2(x,y)=(x-1)^2+(y-2)^2+x^2+2y^2$

$=2x^2-2x+3y^2-4y+5\equiv l$

由 $\begin{cases}\frac{\partial l}{\partial x}=4x-2=0\\ \frac{\partial l}{\partial y}=6y-4=0\end{cases}$ 解得 $x=\frac{1}{2}$，$y=\frac{2}{3}$

∴最小值為 $d(\frac{1}{2},\frac{2}{3})=\sqrt{\frac{19}{6}}$ ※